

О деформировании трехслойной сферической оболочки с сжимаемым наполнителем под действием акустической волны давления

к.ф.-м.н. доц. Коган Е.А., к.ф.-м.н. Юрченко А.А.
Университет машиностроения
8(495)223-05-23, kogan_ea@mail.ru

Аннотация. Построено в акустическом приближении точное решение задачи о динамической реакции трехслойной сферической оболочки, погруженной в жидкость, при действии внешнего гидродинамического давления. Система дифференциальных уравнений движения оболочки 14-го порядка, учитывающих поперечные сдвиговые и нормальные деформации и напряжения в наполнителе, интегрируется методом двойных интегральных преобразований. Оценены характеристики реакции оболочки для различных вариантов задания гидродинамического давления.

Ключевые слова: сферические трехслойные оболочки, гидродинамическое давление, акустическое приближение, интегральные преобразования.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 10-08-00258а.

Введение

Проблемы обеспечения динамической прочности тонкостенных конструкций являются весьма актуальными для многих современных областей техники. В частности, к ним относятся задачи взаимодействия ударных волн с деформируемыми конструкциями, погруженными в жидкость.

В строгой постановке связанная контактная задача гидроупругости предполагает совместное решение системы уравнений движения упругих оболочек и волнового уравнения относительно потенциала скоростей в жидкости при соответствующих граничных и начальных условиях, а также условиях непроницаемости и излучения. Ввиду сложности определения гидродинамических сил взаимодействия упругих конструкций с жидкостью обычно задача делится на два этапа. Сначала решается гидродинамическая задача по определению внешней нагрузки, действующей на оболочку, а затем интегрируются уравнения движения упругой конструкции при найденных внешних силах. При действии ударных волн, распространяющихся в жидкости, рассматривается в основном так называемое акустическое приближение. При этом полное гидродинамическое давление, действующее при падении волны на упругую преграду конечных размеров, в силу линейности внешней задачи представляется в виде алгебраической суммы давлений в падающей и отраженной волне, действующей на абсолютно жесткую, неподвижную в пространстве конструкцию, и давления излучения, обусловленного упругими деформациями оболочки и движением ее как твердого тела.

Решение задачи о действии акустической волны давления на пологую упругую однослойную сферу, находящуюся в идеальной сжимаемой жидкости, рассмотрено в [1] для частного случая специально подобранной жесткости опорного шпангоута. Различные задачи о действии ударных волн на трехслойные и многослойные сферические оболочки с несжимаемым наполнителем, погруженные в жидкость, решены в работах [2-4].

Ниже в развитии работы [1] рассмотрено деформирование трехслойной пологой сферической оболочки с жестким сжимаемым наполнителем, погруженной в жидкость, при действии ступенчатого импульса давления.

Постановка задачи

Разрешающие уравнения малых поперечных осесимметричных колебаний трехслойных пологих сферических оболочек несимметричного строения по толщине с изотропными внешними слоями и трансверсально – изотропным жестким наполнителем с учетом поперечных сдвиговых и нормальных деформаций в среднем слое имеют вид [5]:

$$\nabla^2 \nabla^2 F = \frac{Eh}{R} \nabla^2 \left[\left(1 - \frac{h^2}{\beta} \nabla^2 \right) \chi + \omega_1 \psi \right], \quad (1)$$

$$D \left[\left(1 - \frac{9h^2}{\beta} \nabla^2 \right) \nabla^2 \nabla^2 \chi + \delta_1^* \nabla^2 \nabla^2 \psi + \frac{\delta_3^*}{Rh} \nabla^2 \psi \right] + \frac{1}{R} \nabla^2 F + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[s_1 \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \nabla^2 \right) \chi + s_4 \psi \right] = q_1 + q_2, \quad (2)$$

$$D \left[\left(\mathcal{G}_2 - \frac{\mathcal{G}_3 h^2}{\beta} \nabla^2 \right) \nabla^2 \nabla^2 \chi - \delta_2^* \nabla^2 \nabla^2 \psi - \frac{\delta_4^*}{Rh} \nabla^2 (\mathcal{G}_1 \chi - \delta_5 \psi) \right] - \left(\frac{E_3}{h} \delta_3 + B \delta_4 \frac{1+\nu}{R^2} \right) \psi + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{R} \nabla^2 F + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[s_3 \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \nabla^2 \right) \chi + s_5 \psi \right] = q - q_2. \quad (3)$$

Эта система уравнений является обобщением известных уравнений Григолюка - Чулкова трехслойных оболочек с несжимаемым наполнителем [6].

При выводе уравнений для несущих слоев полагались справедливыми гипотезы Кирхгофа – Лява, для наполнителя принимался линейный закон распределения нормальных перемещений по толщине:

$$w^{3z} = w + \frac{z}{c} v, \quad (4)$$

где:

$$w = \frac{w^{(1)} + w^{(2)}}{2}, \quad v = \frac{w^{(1)} - w^{(2)}}{2}. \quad (5)$$

В уравнениях (1-3) F – функция усилий, функции перемещений χ и ψ связаны с прогибами первого $w^{(1)}$ и второго $w^{(2)}$ несущих слоев оболочки зависимостями:

$$w = \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \nabla^2 \right) \chi + (\theta_4 - K \theta_1) \psi, \quad v = -(\theta_1 + \theta_2) \psi, \quad (6)$$

ψ - «функция обжатия», которой учитываются поперечные нормальные деформации и напряжения в наполнителе (если прогибы несущих слоев одинаковы, то $\psi \equiv 0$); $q_k = q_k(r, t)$ – внешняя нагрузка, приложенная к k -му ($k=1,2$) несущему слою ($q_k > 0$, если направлена в положительном направлении оси z); $h = \sum_{k=1}^3 h_k$ – полная толщина пластины (h_k – толщина

k -го слоя, ($k=1,2,3$), $h_3 = 2c$ – толщина наполнителя); $E = \frac{1-\nu^2}{h} \sum_{k=1}^3 \frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2}$ – осредненный

модуль упругости трехслойного пакета; E_k, ν_k – модуль упругости и коэффициент Пуассона

k -го слоя; $\nu = \frac{\sum_{k=1}^3 \frac{E_k h_k \nu_k}{1-\nu_k^2}}{\sum_{k=1}^3 \frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2}}$ – приведенный коэффициент Пуассона; γ_k, t_k – безразмерные жесткостные характеристики и безразмерные толщины слоев ($k=1,2,3$):

$\gamma_k = \frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2} \right)^{-1}$, $t_k = \frac{h_k}{h}$; параметры: $D = \frac{Eh^3 \theta_0}{12(1-\nu^2)}$ – изгибная жесткость трлхслой-

ного пакета; $\beta = \frac{12Gt_3(1-\nu^2)}{E\theta_1}$ – параметр, характеризующий жесткость наполнителя на попе-

речный сдвиг (G - модуль поперечного сдвига заполнителя); $\vartheta = \frac{\theta_1\theta_3 - \theta_2^2}{\theta_0\theta_1}$ - параметр, характеризующий относительную изгибную жесткость несущих слоев; $s_1 = \sum_{k=1}^3 \rho_k h_k$ (ρ_k - удельная плотность материала k -го слоя);

$$\begin{aligned}
 s_2 &= \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \frac{1}{3} \rho_3 h_3, \quad s_3 = \rho_1 h_1 - \rho_2 h_2, \quad s_4 = s_1(\theta_4 - K\theta_1) - s_3(\theta_1 + \theta_2), \\
 s_5 &= s_3(\theta_4 - K\theta_1) - s_2(\theta_1 + \theta_2), \quad \omega_1 = \theta_4 - K\theta_1 - (\gamma_1 - \gamma_2)(\theta_1 + \theta_2), \\
 K &= \frac{E h}{G R} \frac{\theta_1}{6t_3^2(1-\nu)}, \quad B = \frac{2Eh}{1-\nu^2}, \quad \delta_1^* = \delta_1 - K\theta_1\vartheta, \quad \delta_2^* = \delta_2 + K\theta_1\vartheta_3, \quad \delta_3^* = \frac{1+\nu}{2} \vartheta_1\delta_3, \\
 \delta_4^* &= \frac{2(1+\nu)}{t_3}, \quad \delta_1 = \theta_4 - \vartheta_1(\theta_4 + \theta_5), \quad \delta_2 = \vartheta_1\theta_6 - \vartheta_2\theta_4, \quad \delta_3 = \frac{4(\theta_1 + \theta_2)}{t_3}, \\
 \delta_4 &= \frac{1}{3}\theta_0\theta_1\vartheta_1, \quad \delta_5 = \vartheta_1\theta_4 + \delta_6, \quad \vartheta_1 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_0}, \quad \vartheta_2 = \frac{\theta_4 + \theta_5}{\theta_0}, \quad \vartheta_3 = \frac{\theta_1\theta_5 - \theta_2\theta_4}{\theta_0}, \\
 \theta_0 &= \theta_1 + 2\theta_2 + \theta_3, \quad \theta_1 = 3(c_{22} - c_{12}^2), \quad \theta_2 = 3(c_{23} - c_{12}c_{13}), \quad \theta_3 = 3(c_{33} - c_{13}^2), \\
 \theta_4 &= 3(c_{24} - c_{12}c_{14}), \quad \theta_5 = 3(c_{34} - c_{13}c_{14}), \quad \theta_6 = 3(c_{44} - c_{14}^2), \quad c_{12} = t_3(\gamma_1 - \gamma_2), \\
 \theta_7 &= \theta_4 - (1+K)\theta_1 - \theta_2, \quad \theta_8 = \theta_4 + (1-K)\theta_1 + \theta_2, \\
 c_{13} &= \gamma_1 t_1 - \gamma_2 t_2, \quad c_{22} = t_3^2 \left(\gamma_1 + \gamma_2 + \frac{1}{3} \gamma_3 \right), \quad c_{23} = t_3(\gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_2), \\
 c_{33} &= \frac{4}{3}(\gamma_1 t_1^2 + \gamma_2 t_2^2), \quad c_{34} = \frac{4}{3}(\gamma_1 t_1^2 - \gamma_2 t_2^2) + \frac{1}{2} t_3 c_{13}, \quad c_{14} = \frac{1}{t_3} \left(c_{23} + \frac{1}{2} c_{22} \right), \\
 c_{24} &= t_3 \left(c_{13} + \frac{1}{2} c_{12} \right), \quad c_{44} = \frac{t_3^2}{4} \left(\gamma_1 + \gamma_2 + \frac{1}{3} \gamma_3 \right) + c_{23} + c_{33}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Удельные и обобщенные усилия и моменты в случае осесимметричного деформирования оболочки выражаются через функции усилий и перемещений по формулам:

$$N_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}, \quad N_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \tag{8}$$

моменты, обусловленные поперечным сдвигом в заполнителе

$$H_{rr} = -D \vartheta_1 \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \chi + \theta_1 \frac{1+\nu}{Rc} \psi \right], \tag{9}$$

полные изгибающие моменты

$$M_{rr} = -D \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left[\left(1 - \vartheta_1 - \frac{\vartheta h^2}{\beta} \nabla^2 \right) \chi + (\delta_1 - K\theta_1\vartheta) \psi \right] + \vartheta_1 \theta_2 \frac{1+\nu}{Rc} \psi \right\}, \tag{10}$$

моменты «второго порядка», обусловленные учетом сжимаемости заполнителя

$$L_{rr} = -D \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left[\left(\vartheta_2 - \frac{\vartheta_3 h^2}{\beta} \nabla^2 \right) \chi - (\delta_2 + K\theta_1\vartheta_3) \psi \right] + \vartheta_1 \theta_4 \frac{1+\nu}{Rc} \psi \right\}. \tag{11}$$

Моменты $H_\theta, M_\theta, L_\theta$ получаются из приведенных формул заменой оператора $\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r}$ на $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2}{\partial r^2}$.

Граничные условия для свободно опертой по контуру оболочки

$$F = \nabla^2 F = w = v = H_{rr} = M_{rr} = L_{rr} = 0$$

с учетом (6), (8-11) могут быть приведены к виду [5-7]

$$\chi = \nabla^2 \chi = \nabla^2 \nabla^2 \chi = \psi = \nabla^2 \psi = 0. \quad (12)$$

Начальные условия относительно перемещений w и v записываются в виде

$$w = \frac{\partial w}{\partial t} = v = \frac{\partial v}{\partial t} = 0. \quad (13)$$

Интегрируя первое уравнение системы (1) - (3), получим

$$\nabla^2 F = \frac{Eh}{R} \nabla^2 \left[\left(1 - \frac{h^2}{\beta} \nabla^2 \right) \chi + \omega_1 \psi \right] + \Gamma, \quad (14)$$

где Γ - некоторая гармоническая функция: $\nabla^2 \Gamma = 0$.

Так как на контуре $\nabla^2 F = \chi = \psi = 0$, то и функция $\Gamma = 0$. Поэтому на основании принципа максимума $\Gamma = 0$ всюду в рассматриваемой области [8].

Исключая теперь $\nabla^2 F$ из двух других уравнений системы (2) и (3), получим после приведения к безразмерным координатам $\alpha = \frac{\varphi}{\varphi_0} = \frac{r}{R_0}$ (здесь φ_0 – угол полураствора панели, φ - угол, отсчитываемый от вершины оболочки – рисунок 1),

$$w_0 = \frac{w}{h}, \quad v_0 = \frac{v}{h}, \quad \chi_0 = \frac{\chi}{h}, \quad \psi_0 = \frac{\psi}{h}, \quad \tau = \frac{C_* t}{R},$$

(C_* - скорость звука в среде) систему двух безразмерных уравнений 10-го порядка

$$m_1 \left(1 - \frac{h^2}{\beta R_0^2} \nabla^2 \right) \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial \tau^2} + m_3 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \tau^2} - a_{11} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \chi_0 + a_{12} \nabla^2 \nabla^2 \chi_0 -$$

$$- a_{13} \nabla^2 \chi_0 + a_{14} \chi_0 + b_{11} \nabla^2 \nabla^2 \psi_0 + b_{12} \nabla^2 \psi_0 + b_{13} \psi_0 = p^*, \quad (15)$$

$$m_4 \left(1 - \frac{h^2}{\beta R_0^2} \nabla^2 \right) \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial \tau^2} + m_5 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \tau^2} - a_{21} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \chi_0 + a_{22} \nabla^2 \nabla^2 \chi_0 -$$

$$- a_{23} \nabla^2 \chi_0 + a_{24} \chi_0 - b_{21} \nabla^2 \nabla^2 \psi_0 + b_{22} \nabla^2 \psi_0 + b_{23} \psi_0 = p^*, \quad (16)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha}$ - оператор Лапласа относительно безразмерной переменной α .

Здесь и в дальнейшем коэффициенты уравнений имеют очень громоздкий вид и из-за ограниченности размеров статьи не приводятся.

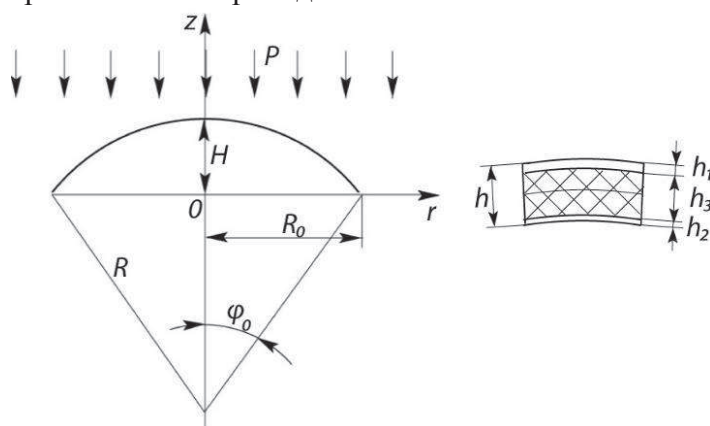


Рисунок 1. Трехслойная сферическая панель

При действии ступенчатого импульса на пологую сферическую панель на основании решения [1] полное гидродинамическое давление, действующее на сферическую оболочку, в безразмерной форме может быть представлено в виде:

$$p^* = \frac{p_0}{E}(1 - e^{-\tau})H(\tau) - \frac{\rho c_*^2 h}{ER} \int_0^\tau \left[\left(1 - \frac{h^2}{\beta R_0^2} \nabla^2 \right) \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial \tau^2} + \theta_7 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \tau^2} \right] e^{-(\tau-\tau_1)} d\tau_1 \quad (17)$$

где: p_0 - давление на фронте падающей волны; ρ - плотность среды; c_* - скорость звука в среде; $H(\dots)$ - единичная функция Хевисайда.

В частности, при использовании гипотезы плоского излучения, справедливой для начального этапа взаимодействия оболочки с волной, давление определяется по формуле

$$p^* = \frac{p_0}{E}(1 + e^{-\tau})H(\tau) - \frac{\rho c_*^2 h}{ER} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\left(1 - \frac{h^2}{\beta R_0^2} \nabla^2 \right)^2 \chi_0 + \theta_7 \psi_0 \right]. \quad (18)$$

Решение системы уравнений движения трехслойной сферической оболочки (15, 16) с учетом (17), граничных и начальных условий строится методом двойных интегральных преобразований. Сначала к уравнениям применяется интегральное преобразование Лапласа по независимой переменной τ с учетом однородных начальных условий относительно функций w и v :

$$\bar{w}(s, \alpha) = \int_0^\infty w_0(\alpha, \tau) e^{-s\tau} d\tau, \quad (19)$$

где

$$w_0(\alpha, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{w}(s, \alpha) e^{s\tau} ds, \quad (20)$$

а затем к уравнениям в изображениях - преобразование Ханкеля с конечными пределами нулевого порядка по переменной α [8]:

$$\bar{w}^*(\xi_i, s) = \int_0^{\alpha_1} \bar{w}(\alpha, s) J_0(\xi_i \alpha) \alpha d\alpha, \quad (21)$$

где:

$$w(\alpha, \tau) = \frac{2}{\alpha_1^2} \sum_i \bar{w}^*(\xi_i, s) \frac{J_0(\xi_i \alpha)}{[J_1(\xi_i \alpha_1)]^2}, \quad (22)$$

ξ_i - корни трансцендентного уравнения $J_0(\xi_i \alpha) = 0$.

В результате система изображающих уравнений относительно трансформант Ханкеля [8] приводится к виду:

$$\begin{cases} A_{11} \bar{\chi}_0^*(s, \xi_i) + A_{12} \bar{\psi}_0^*(s, \xi_i) = F_1, \\ A_{21} \bar{\chi}_0^*(s, \xi_i) + A_{22} \bar{\psi}_0^*(s, \xi_i) = F_2, \end{cases} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} &= \left(1 + \frac{h^2}{\beta R_0^2} \xi_i^2 \right) \left[m_1 s^4 + m_{11} (s^3 + s^2) \right] + g_{11} (s^2 + 2s + 2), \\ A_{12} &= (m_3 s^2 + g_{12}) (s^2 + 2s + 2) + \gamma_0 \theta_7 s^2 (s + 1), \quad m_{11} = 2m_1 + \gamma_0, \quad m_{21} = 2m_4 + \gamma_0, \\ A_{21} &= \left(1 + \frac{h^2}{\beta R_0^2} \xi_i^2 \right) \left[m_4 s^4 + m_{21} (s^3 + s^2) \right] + g_{21} (s^2 + 2s + 2), \\ A_{22} &= (m_5 s^2 - g_{22}) (s^2 + 2s + 2) + \gamma_0 \theta_7 s^2 (s + 1), \\ g_{11} &= a_{11} \xi_i^6 + a_{12} \xi_i^4 + a_{13} \xi_i^2 + a_{14}, \quad g_{21} = a_{21} \xi_i^6 + a_{22} \xi_i^4 + a_{23} \xi_i^2 + a_{24}, \\ g_{12} &= b_{11} \xi_i^4 - b_{12} \xi_i^2 + b_{13}, \quad g_{22} = b_{21} \xi_i^4 + b_{22} \xi_i^2 - b_{23}. \end{aligned} \quad (24)$$

Разрешая систему (23), получим для трансформант изображений функций перемещений:

$$\bar{\chi}_0^*(s, \xi_i) = \frac{p_0}{E} \frac{A_1(s)}{B(s, \xi_i)} \frac{J_1(\xi_i)}{\xi_i}, \quad \bar{\psi}_0^*(s, \xi_i) = \frac{p_0}{E} \frac{A_2(s)}{B(s, \xi_i)} \frac{J_1(\xi_i)}{\xi_i}, \quad (25)$$

Здесь $A_1(s)$, $A_2(s)$, $B(s, \xi_i)$ - многочлены с вещественными коэффициентами:

$$\begin{aligned} A_1(s) &= (2s^2 + 3s + 2)(\bar{A}_0s^4 + \bar{A}_1s^3 + \bar{A}_2s^2 + \bar{A}_3s + \bar{A}_4), \\ A_2(s) &= (2s^2 + 3s + 2)(\bar{D}_0s^4 + \bar{D}_1s^3 + \bar{D}_2s^2 + \bar{D}_3s + \bar{D}_4), \\ B(s) &= sB_1(s) = \bar{B}_0s^8 + \bar{B}_1s^7 + \dots + \bar{B}_7s + \bar{B}_8. \end{aligned} \quad (26)$$

В (24)-(26) $m_i, a_{ij}, b_{ij}, \bar{A}_k, \bar{B}_k, \bar{D}_k$ - безразмерные коэффициенты, зависящие от геометрических и механических характеристик слоев.

Выполняя обратные преобразования Ханкеля и Лапласа, находим оригиналы функций перемещений в виде:

$$\chi_0(\alpha, \tau) = 2p_0^* \sum_i Q_i^{(1)}(\xi_i, \tau) \frac{J_0(\xi_i \alpha)}{\xi_i J_1(\xi_i)}, \quad \psi_0(\alpha, \tau) = 2p_0^* \sum_i Q_i^{(2)}(\xi_i, \tau) \frac{J_0(\xi_i \alpha)}{\xi_i J_1(\xi_i)}, \quad (27)$$

где

$$Q_i^{(r)} = \sum_k \frac{A_r(s_k)}{B'(s_k)} e^{s_k \tau} + 2 \operatorname{Re} \sum_k \frac{A_r(s_k)}{B'(s_k)} e^{s_k \tau}, \quad (r = 1, 2). \quad (28)$$

Здесь первая сумма распространяется на все действительные корни многочлена $B(s, \xi_i)$, а вторая – на все комплексные корни с положительными мнимыми частями; s_k - корни многочлена $B(s, \xi_i)$ [9].

С учетом формул (5), (6) окончательные выражения для безразмерных прогибов несущих слоев трехслойной пологой сферической панели представляются в виде:

$$\begin{aligned} w_0^{(1)}(\alpha, \tau) &= 2p_0^* \sum_i \left[\left(1 + \frac{h^2}{\beta R_0^2} \xi_i^2 \right) Q_i^{(1)}(\xi_i, \tau) + \theta_7 Q_i^{(2)}(\xi_i, \tau) \right] \frac{J_0(\xi_i \alpha)}{\xi_i J_1(\xi_i)}, \\ w_0^{(2)}(\alpha, \tau) &= 2p_0^* \sum_i \left[\left(1 + \frac{h^2}{\beta R_0^2} \xi_i^2 \right) Q_i^{(1)}(\xi_i, \tau) + \theta_8 Q_i^{(2)}(\xi_i, \tau) \right] \frac{J_0(\xi_i \alpha)}{\xi_i J_1(\xi_i)}. \end{aligned} \quad (29)$$

Скорости и ускорения слоев получаются дифференцированием выражений (29). При этом максимальные значения ускорений слоев достигаются в начальный момент времени. Эти значения могут быть определены непосредственно из уравнений движения (15), (16). Действительно, так как при $\tau = 0$ $\chi = \nabla^2 \chi = \nabla^2 \nabla^2 \chi = \psi = \nabla^2 \psi = 0$, то, разрешая уравнения

относительно $\frac{\partial^2 \chi_0}{\partial \tau^2}$ и $\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \tau^2}$ и учитывая, что из выражения для давления в начальный момент времени следует $p = 2p_0$, получим:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial \tau^2} \right|_{\tau=0} &= \frac{2p_0}{E} \frac{m_0 s_5 - m_3 + (m_3 - m_0 s_3) \left(\theta_4 - K \theta_1 - \frac{1}{\theta_1 + \theta_2} \right)}{m_0 (m_1 s_5 - m_3 s_3)}, \\ \left. \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial \tau^2} \right|_{\tau=0} &= \frac{2p_0}{E} \frac{m_0 s_5 - m_3 + (m_3 - m_0 s_3) \left(\theta_4 - K \theta_1 + \frac{1}{\theta_1 + \theta_2} \right)}{m_0 (m_1 s_5 - m_3 s_3)}. \end{aligned} \quad (30)$$

Так как изображения представляют собой дробно – рациональные функции с простыми полюсами, обращение их производится точно с помощью теории вычетов. При этом значения корней полиномов с вещественными коэффициентами определялись методом Мюллера.

Результаты

При численных расчетах рассмотрено воздействие ступенчатого импульса на трехслойную пологую панель с параметрами: $h = 6$ см, толщины несущих слоев $h_1 = 0,1 - 0,2$ см, $h_2 = 0,1 - 0,2$ см, $E_3 = 10 - 40$ МПа, $R = 300, 600, 1200$ см при $R_0 = 155$ см; параметры среды: $\rho = 0,102 \cdot 10^{-5}$ кг·сек²/см⁴, $C_* = 1,46 \cdot 10^5$ см/сек.

Оценено влияние различных форм колебаний оболочки. Для предельного случая однослойной сферической панели на рисунке 2 сплошной линией показана зависимость максимального прогиба в полюсе от времени, а пунктирной – зависимость скорости от времени для случая, когда гидродинамическое давление на панель определялось по формуле (17). Практически при определении прогибов можно ограничиться с точностью до 2% десятью членами ряда. Коэффициент динамичности (по прогибу) составляет $k_{\text{дин}} = w_{\text{max}}^{\text{дин}} / w_{\text{max}}^{\text{см}} = 1,44$.

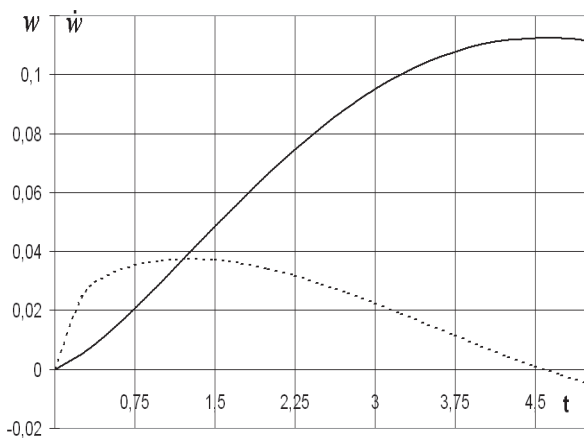


Рисунок 2. Зависимость прогиба и скорости в полюсе от времени для однослойной сферы

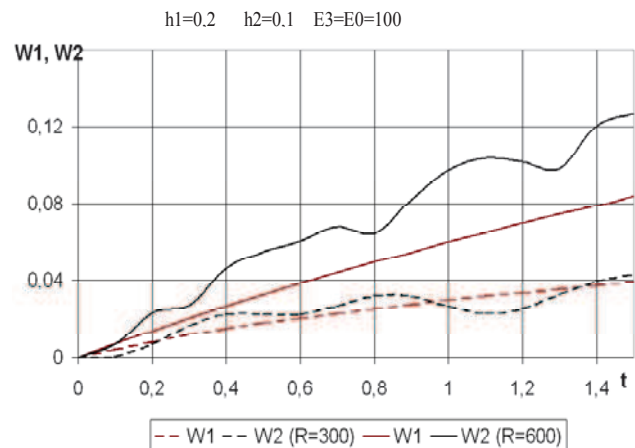


Рисунок 3. Зависимость прогибов слоев от времени для трехслойной сферы с сжимаемым наполнителем (гипотеза плоского излучения)

Расчеты показывают, что при учете поперечных сдвигов наполнителя сходимость по сравнению с однослойной оболочкой ухудшается: для получения точности в определении прогиба в 1-2% необходимо удерживать до 20 членов ряда. При вычислении ускорения надо удерживать большее число членов ряда, но максимальное ускорение при $\tau = 0$ может быть определено точно, непосредственно из системы уравнений по формулам (30).

Наиболее существенное влияние на характеристики реакции трехслойной сферы оказывает пологость панели, характеризуемая отношением H/R (рисунок 3 для трехслойной оболочки с сжимаемым наполнителем).

В расчетах варьировался радиус кривизны панели R от 300 до 600 см при фиксированном R_0 . Сплошные линии на рисунке 3 соответствуют $H/R = 0,0339$, пунктирные - $H/R = 0,1438$. Как видно, для более пологих панелей прогибы существенно возрастают.

При учете сжимаемости наполнителя (результаты приведены для гипотезы плоского излучения) в начальные моменты времени первый (нагруженный) слой резко смещается в сторону второго (ненагруженного) слоя, то есть происходит сжатие наполнителя, а затем прогибы второго слоя (волнистые кривые) становятся больше прогибов первого слоя. Поэтому в наполнителе возникают растягивающие напряжения (в рамках принятой модели пропорциональные разности прогибов несущих слоев), что может приводить к нарушению сцепления наполнителя с несущими слоями.

При этом с увеличением пологости панели различие в прогибах несущих слоев становится существенным, но лишь при малом модуле упругости наполнителя $E_3 \leq 10 - 20$ МПа.

Всплески при колебаниях ненагруженного слоя объясняются отражением проходящих волн [10].

Выводы

Построено точное аналитическое решение задачи о деформировании трехслойной сферической оболочки, погруженной в жидкость, при действии внешнего гидродинамического давления. Оценены влияние сходимости рядов для прогибов, скоростей и ускорений, пологости панели, сжимаемости заполнителя на характеристики реакции оболочки для различных вариантов задания гидродинамического давления.

Литература

1. Григолюк Э.И., Горшков А.Г. Взаимодействие слабых ударных волн с упругими конструкциями (изд. второе, исправленное и дополненное) // Институт механики МГУ. Научные труды. 1971. Вып. 13. 180 с.
2. Бабаев А.Э., Кубенко В.Д., Курбакова В.Г. Деформирование многослойной сферической оболочки под действием слабой ударной волны // Прикл. механика, 1979. Т. XII, № 12. С. 28-35.
3. Григолюк Э.И., Кузнецов Е.Б. Реакция трехслойной сферической оболочки, соединенной с жесткими массами, на акустическую волну давления // В кн. Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. Томск. Изд-во Томск. ун-та, 1975. С. 53-59.
4. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. М.: Наука, Глав. ред. физ.-матем. лит-ры, 1990. 264 с.
5. Коган Е.А. К расчету пологих трехслойных сферических оболочек при динамическом и статическом нагружении // В сб. Теория и расчет элементов тонкостенных конструкций. М.: Изд-во Моск. ун – та, 1986. С. 40-53.
6. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973. 172 с.
7. Гершунов Е.М. Расчет круглых и кольцевых пластинок на действие произвольной динамической нагрузки. Изв. АН СССР, ОТН. Механ. и машиностроение. 1964, № 6. С. 89-95.
8. Снеддон И.Н. Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1955.
9. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Изд-во Наука. Глав. ред. физ.- матем. лит-ры, 1973. 736 с.
10. Присекин В.Л. Взаимодействие трехслойной пластины с акустической волной // В сб. Расчеты элементов авиационных конструкций. Вып. 4. М.: Машиностроение, 1965. С. 157 – 167.