

К анализу эволюции собственных форм многопараметрических механических систем (круговых пластин и оболочек вращения)

к.ф.-м.н. проф. Король Е.З.

8(945) 369-96-65, 8-916-852-30-09, ez_korol@mail.ru

Аннотация. На примере анизотропных линейно-упругих (по Гуку) и малых (по Коши) деформаций тонких круговой пластины, круговых цилиндрической и прямой конической оболочки вращения даётся новая обобщённая постановка краевых задач анализа собственных форм многопараметрических систем, напряжённо-деформированное состояние которых описывается обыкновенными линейными дифференциальными многопараметрическими уравнениями (ЛОДУ) высшего порядка обобщённого эйлера и бесселева типов.

Ключевые слова: многопараметрические механические системы, анизотропные круговые пластины и оболочки вращения

Введение

На примере анизотропных линейно-упругих (по Гуку) и малых (по Коши) деформаций тонких круговой пластины, круговых цилиндрической и прямой конической оболочки вращения даётся новая обобщённая постановка краевых задач анализа собственных форм многопараметрических систем, напряжённо-деформированное состояние которых описывается обыкновенными линейными дифференциальными многопараметрическими уравнениями (ЛОДУ) высшего порядка обобщённого эйлера и бесселева типов. Многопараметричность таких систем отражается с одной стороны в так называемых «коэффициентах жёсткости» (КЖ) ЛОДУ, параметрически зависящих от мембранных усилий, значения которых в свою очередь зависят от внешней краевой нагрузки и условий закрепления, а с другой – в структурных параметрах собственных осцилляционных изгибных форм механических систем - решениях соответствующих краевых задач.

Обобщённая формулировка включает задание в пространстве «коэффициентов жёсткости» траектории нагружения (ТН) и критических состояний (КС). Критические состояния связываются с достижением траекторией нагружения характеристических линий (КЛ) и точек (КТ). К числу характеристических относятся линии раздела видов модуляций (ЛРВМ), линии уровней квадратов собственных частот (ЛУЧ), длин волн (ЛУДВ) и сдвига фаз (ЛУСФ). Вид этих линий и их положение в пространстве «коэффициентов жёсткости» соответствует видам модуляции (ВМ) и определяется соотношениями связности (СС) «коэффициентов жёсткости» и структурных параметров. К числу критических точек относятся точки пересечения критических линий (бинарности и полинарности), среди которых выделяются точки изогональности (изоклинности), в частности ортогональности. Положение критических (собственных) линий и точек на них определяется соответствующей системой детерминантно – краевых определяющих (ДКУ) уравнений (тригонометрических или трансцендентных), составленной по заданным линейным краевым условиям дифференциального типа. Отмечается, что в общем случае аналитические выражения собственных форм таких систем относятся к установленному ранее классу «изогональных» функций (ИФ), собственный интеграл на заданном интервале от скалярного произведения их нормированных функций равен единице при одинаковых индексах и постоянному числу, не равному единице, при различных индексах, в частности, в случае ортогональности – нулю.

Задача отыскания собственных чисел и собственных форм в предлагаемой данной постановке сводится к решению системы детерминантно-краевых уравнений, соответствующих всем возможным видам собственных форм, принимаемых системой на введенной в постановку «траектории нагружения» в пространстве «коэффициентов жёсткости» и дополнен-

ных выражениями «соотношений связности».

При непрерывном параметрическом нагружении оболочки [1-6] наблюдается, прежде всего, появление новых осцилляций при одном и том же виде модуляции. Для их описания используются [5-9], линейные или квазилинейные дифференциальные уравнения четвертого и выше порядков с параметрическими независимыми от координат естественными коэффициентами жёсткости, при решении которых применяются методы продолжения по параметру [5,6]. Устойчивость и критические состояния оболочки связываются [7] с характерными точками (ветвления, перескока и пр.) на так называемой кривой жёсткости («внешняя нагрузка ~ прогиб характерной точки»). Точность такого «локального» критерия зависит не только от выбора характерной точки.

Ниже даётся обобщённая постановка [11] и решение задачи анализа собственных форм, основанная на введении понятий траектории нагружения механической системы, изопараметрических траекторий - линий уровня собственных частот (длин волн) и сдвига фаз, кратных числу полуволн, и установления бинарных критических точек, параметры которых удовлетворяют условиям ортогональности и изогональности или изоклинности.

Постановка краевой задачи о собственных формах цилиндрической круговой оболочки

Дифференциальные уравнения форм. Собственные осесимметрические формы ортотропной линейно упругой (по Гуку) круговой цилиндрической оболочки радиуса R , постоянной толщины h и плотности ρ при малых (по Коши) деформациях описываются уравнением [1] типа «краевого эффекта» изгиба оболочки (по Кирхгоффу-Ляву) - линейным обыкновенным дифференциальным уравнением четвертого порядка относительно функции прогиба $w(\xi, \vec{\gamma})$ с постоянными, зависящими от внешних $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ параметров коэффициентами:

$$Z(w, \vec{\gamma}) = w^{IV} + a_2^{(4)}(\vec{\gamma})w'' + a_0^{(4)}(\vec{\gamma})w = 0, \quad w^{(k)} \equiv \frac{d^k w}{d\xi^k}, k = 0, 2, 4 \quad (1)$$

«Коэффициенты жёсткости» $a_n^{(4)}(\vec{\gamma}), n = 0, 2$ выражаются через мембранные осевые N_1 и кольцевые N_2 усилия. При однородном напряжённо-деформированном состоянии они не зависят от координат $0 \leq \xi = \frac{x}{L} \leq 1$, а зависят от внешней нагрузки - параметров $\vec{\gamma}$. В частности, для рассматриваемой оболочки «коэффициенты жёсткости» - функции вида $a_2^{(4)}(\vec{\gamma}) = \gamma_1$ и $a_0^{(4)}(\vec{\gamma}) = c\gamma_1 + c\gamma_2 + \gamma_3$. Где: $\gamma_1 = (N_{10}hL^2)/D_1$ - осевое усилие и $\gamma_2 = (ph^2L^4)/(R^2D_1)$ - радиальное давление, а $\gamma_3 = (\rho g\omega^2h^2L^4)/D_1$ - инерционные силы. Здесь принято следующее: w - отнесённый к толщине прогиб; $D_1 = E_1h^3/12(1 - \mu_{12}\mu_{21})$ - цилиндрическая жёсткость; E_1 - модуль упругости (Юнга) по образующей; $c = E_2/E_1$ - коэффициент ортотропии (главные оси ортотропии совпадают с направлениями главных кривизн оболочки); μ_{12}, μ_{21} - коэффициенты поперечной деформации (Пуассона); ω - круговая частота; $g = 980 \text{ см}/\text{с}^2$ - ускорение силы тяжести. Двухпараметрическое уравнение (1) с постоянными, не зависящими от координат коэффициентами учитывает неоднородность напряжённо-деформированного состояния с начала нагружения, обусловленную поперечной деформацией при действии продольного усилия (так называемым эффектом Пуассона), и начальную (возникающую уже при малых нагрузках) погибь. При анализе собственных форм используем введенные в [13-16] понятия траектории нагружения в пространстве «коэффициентов жёсткости».

Пространство «коэффициентов жёсткости» и траектория нагружения. «Коэффициенты жёсткости» как функции параметров $\vec{\gamma}(\tau)$, являющиеся в свою очередь функциями одного независимого параметра τ - «условного времени», определяющего очередность приложения внешних нагрузок, задают в пространстве «коэффициентов жёсткости» ($a_2^{(4)} \sim a_0^{(2)}$)

«траекторию нагружения» соотношениями

$$\left. \begin{aligned} a_0^{(4)} &= a_0^{(4)}(\vec{\gamma}) \\ a_2^{(4)} &= a_2^{(4)}(\vec{\gamma}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Psi_T(a_0^{(4)}(\vec{\gamma}(\tau)), a_2^{(4)}(\vec{\gamma}(\tau))) = 0 \Leftrightarrow \Phi_T(\gamma_1(\tau), \gamma_2(\tau), \gamma_3(\tau)) = 0 \quad (2)$$

Каждой точке $(a_0^{(4)}, a_2^{(4)})$ траектории (1.2) соответствует определённая собственная сложная (модулированная) форма, геометрические параметры которой удовлетворяют характеристическому показательному «вековому» биквадратному определяющему уравнению

$$\lambda^4 + a_2^{(4)}(\vec{\gamma})\lambda^2 + a_0^{(4)}(\vec{\gamma}) = 0, \quad \lambda^{(4)_{1,2}}(\vec{\gamma}) = -\frac{a_2^{(4)}(\vec{\gamma})}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_2^{(4)}(\vec{\gamma})}{2}\right)^2 - a_0^{(4)}(\vec{\gamma})} \quad (3)$$

Здесь $d(\vec{\gamma}) = [(a_2^{(4)}(\vec{\gamma})/2)^2 - a_0^{(4)}(\vec{\gamma})]$ - дискриминант подкоренного выражения. При значениях $d(\vec{\gamma}) > 0$ имеем простые, а при $d(\vec{\gamma}) = 0$ и $a_2^{(4)}(\vec{\gamma}) < 0$ кратные, действительные или комплексно - сопряжённые корни. Им соответствуют различные основные или переходные виды модуляции. В пространстве $a_0^{(4)} \sim a_2^{(4)}$ будем различать области К-разбиения, подобные областям D-разбиения, применяемым в теории устойчивости колебаний механических многопараметрических систем.

Области К-разбиения. Отличие их от указанных состоит в том, что среди возможных значений характеристических показателей допускаются не только мнимые, но и комплексно-сопряжённые и действительные: **область К** (комплексно-сопряжённых показателей $\lambda_{1-4}^{(4)} = \pm\alpha \pm i\beta$) - бесконечная $\Omega_K : a_0^{(4)} > (a_2^{(4)}/2)^2$, ограниченная снизу параболой $L_{K-Z} : a_0^{(2)} = (a_2^{(4)}/2)^2$, с одним осцилляционным структурным параметром β полуплоскость; **область Z** (мнимых показателей $\lambda_{1k,2k}^{(4)} = \pm i\beta_k$)- правая угловая часть $\Omega_Z : 0 < a_0^{(4)} < (a_2^{(4)}/2)^2, a_2^{(4)} > 0$, ограниченная сверху правой частью параболы $L_{K-Z} : a_0^{(2)} = (a_2^{(4)}/2)^2$, а снизу – полуосью $L_{Z-T} : a_2^{(4)} > 0$, с двумя осцилляционными структурными параметрами $\beta_{1,2}$; **область T** (мнимых $\lambda_{1,2}^{(4)} = \pm i\beta$ и действительных $\lambda_{3,4}^{(4)} = \pm\nu$ показателей) - нижняя полуплоскость $\Omega_T : a_0^{(4)} < 0$, ограниченная сверху осью абсцисс $L_{Z-T} : a_2^{(4)} > 0 + L_{T-E} : a_2^{(4)} < 0$, с одним осцилляционным параметром β ; **область E** (действительных показателей $\lambda_{1k,2k}^{(4)} = \pm\nu_k$)- левая угловая часть $\Omega_E : 0 < a_0^{(4)} < (a_2^{(4)}/2)^2, a_2^{(4)} < 0$, ограниченная сверху правой частью параболы $L_{K-E} : a_0^{(2)} = (a_2^{(4)}/2)^2$, а снизу – полуосью $L_{T-E} : a_2^{(4)} < 0$, с двумя не осцилляционными структурными параметрами $\nu_{1,2}$ (рисунок 1).

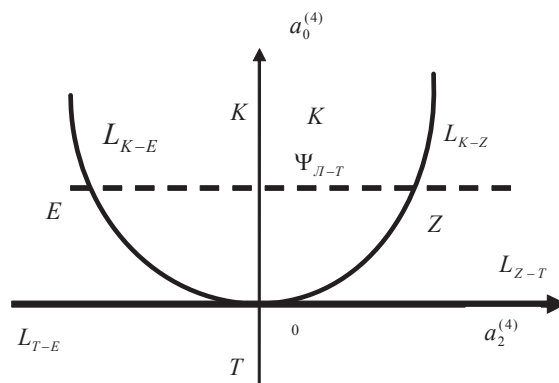


Рисунок 1. Области К-разбиения различных видов модуляций для ЛОДУ четвёртого порядка и траектория $\Phi_T(a_0^{(4)}, a_2^{(4)})$ нагружения в задаче Лоренца-Тимошенко

Используя значения характеристических показателей, уравнение (1) записывается в форме операторного произведения:

$$E^{(4)}\{w, \xi, \lambda^{(4)}(\vec{\gamma})\} \equiv \prod_{n=1}^4 (D - \lambda_n^{(4)}(\vec{\gamma}))\{w\} = 0, \quad D\{w\} \equiv \frac{dw}{d\xi}, \quad D^k\{w\} \equiv \frac{d^k w}{d\xi^k}, \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (4)$$

из которого в соответствии с (1) устанавливаются соотношения «коэффициентов жёсткости» и характеристических показателей – соотношения связности.

Соотношения связности. Общие выражения этих соотношений имеют вид;

$$a_0^{(4)}(\vec{\gamma}) = \prod_{n=1}^4 \lambda_n^{(4)}(\vec{\gamma}), \quad a_2^{(4)}(\vec{\gamma}) = \sum_{k=1}^{C_4^2} \prod_{j_k=1}^2 \lambda_j^{(4)}(\vec{\gamma}) \quad (5)$$

и для указанных выше областей К-разбиения, в частности для областей и границ раздела областей с осциллирующими формами

$$\begin{aligned} a_0^{(4)}, a_2^{(4)} \in K: \quad & a_2^{(4)}(\vec{\gamma}) = 2(\beta^2(\vec{\gamma}) - \alpha^2(\gamma)), \quad a_0^{(4)}(\vec{\gamma}) = (\alpha^2(\vec{\gamma}) + \beta^2(\vec{\gamma}))^2 \\ a_0^{(4)}, a_2^{(4)} \in Z: \quad & a_2^{(4)}(\vec{\gamma}) = (\beta_1^2(\vec{\gamma}) + \beta_2^2(\gamma)), \quad a_0^{(4)}(\vec{\gamma}) = \beta_1^2(\vec{\gamma})\beta_2^2(\vec{\gamma}) \\ a_0^{(4)}, a_2^{(4)} \in T: \quad & a_2^{(4)}(\vec{\gamma}) = (\beta^2(\vec{\gamma}) - \nu^2(\gamma)), \quad a_0^{(4)}(\vec{\gamma}) = -\nu^2(\vec{\gamma})\beta^2(\vec{\gamma}) \\ a_0^{(4)}, a_2^{(4)} \in L_{K-Z}: \quad & a_2^{(4)}(\vec{\gamma}) = 2\beta^2(\vec{\gamma}), \quad a_0^{(4)}(\vec{\gamma}) = \beta^4(\vec{\gamma}) \\ a_0^{(4)}, a_2^{(4)} \in L_{Z-T}: \quad & a_2^{(4)}(\vec{\gamma}) = \beta_1^2(\vec{\gamma}), \quad a_0^{(4)}(\vec{\gamma}) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

и для областей и границ раздела областей с не осциллирующими формами

$$\begin{aligned} a_0^{(4)}, a_2^{(4)} \in E: \quad & a_2^{(4)}(\vec{\gamma}) = -(\nu_1^2(\vec{\gamma}) + \nu_2^2(\gamma)), \quad a_0^{(4)}(\vec{\gamma}) = \nu_1^2(\vec{\gamma})\nu_2^2(\vec{\gamma}) \\ a_0^{(4)}, a_2^{(4)} \in L_{T-E}: \quad & a_2^{(4)}(\vec{\gamma}) = -\nu^2(\gamma), \quad a_0^{(4)}(\vec{\gamma}) = 0 \\ a_0^{(4)}, a_2^{(4)} \in L_{E-K}: \quad & a_2^{(4)}(\vec{\gamma}) = -2\nu_1^2(\vec{\gamma}), \quad a_0^{(4)}(\vec{\gamma}) = \nu_1^4(\vec{\gamma}). \end{aligned} \quad (7)$$

Осцилляционные собственные формы ЛОДУ четвёртого порядка. Виды модуляций и линии раздела (ЛРВМ) модуляций. К осциллирующим видам модуляций относятся три основных в указанных областях К-разбиения:

1) амплитудно-фазовая (К) гиперболическая $K_{\alpha\beta}^{(4)} = H_{\alpha}^{(2)} \cap G_{\beta}^{(2)}$

$$\begin{aligned} w(\xi, \alpha, \beta, C_n) &= A(\alpha, \xi, C_n) \sin(\beta\xi + \varphi(\alpha, \xi, C_n)) \\ A(\alpha, \xi, C_n) &= \sqrt{(C_1 \operatorname{ch}(\alpha\xi) + C_4 \operatorname{sh}(\alpha\xi))^2 + (C_2 \operatorname{sh}(\alpha\xi) + C_3 \operatorname{ch}(\alpha\xi))^2} \\ \varphi(\alpha, \xi, C_n) &= \operatorname{arctg} \frac{C_2 \operatorname{sh}(\alpha\xi) + C_3 \operatorname{ch}(\alpha\xi)}{C_1 \operatorname{ch}(\alpha\xi) + C_4 \operatorname{sh}(\alpha\xi)} \end{aligned}$$

модуляции, у которой амплитуда и сдвиг фазы, переменные (гиперболически) по координате, и одна частота;

2) амплитудно-фазовая бигармоническая (Z) $Z_{\beta_1\beta_2}^{(4)} = G_{\beta_1}^{(2)} \cup G_{\beta_2}^{(2)}$

$$\begin{aligned} w(\xi, \beta_1, \beta_2, C_n) &= A_1(C_n) \sin(\beta_1\xi + \varphi_1(C_n)) + A_2(C_n) \sin(\beta_2\xi + \varphi_2(C_n)) \\ A_1(C_n) &= \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad A_2(C_n) = \sqrt{C_3^2 + C_4^2}, \quad \varphi_1(C_n) = \operatorname{arctg} \left\{ \frac{C_2}{C_1} \right\}, \quad \varphi_2(C_n) = \operatorname{arctg} \left\{ \frac{C_4}{C_3} \right\}, \end{aligned}$$

наложение двух гармоник разных частот;

3) гиперболическая (Т) $T_{\beta\nu_2}^{(4)} = G_{\beta}^{(2)} \cup H_{\nu}^{(2)}$

$$\begin{aligned} w(\xi, \beta, \nu_2, C_n) &= A_1(C_n) \sin(\beta\xi + \varphi_1(C_n)) + A_2(C_n) \operatorname{sh}(\nu_2\xi + \varphi_2(C_n)) \\ A_1(C_n) &= \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad A_2(C_n) = \sqrt{C_3^2 + C_4^2}, \quad \varphi_1(C_n) = \operatorname{arctg} \left\{ \frac{C_2}{C_1} \right\}, \quad \varphi_2(C_n) = \operatorname{arctg} \left\{ \frac{C_4}{C_3} \right\}, \end{aligned}$$

одночастотная модуляция с гиперболической несущей; и две разделительных на линиях-ЛРВМ раздела границ областей:

1) амплитудно - фазовая (L_{K-Z}) полиномиальная $K_{\alpha\beta}^{(4)} = Z_{\beta_1\beta_1}^{(4)} = G_{\beta}^{(2)} \cup (G_{\beta}^{(2)} \cap P_1^{(1)})$

$$w(\xi, \beta, C_n) = A(\xi, C_n) \sin(\beta\xi + \varphi(\xi, C_n))$$

$$A(C_n) = \sqrt{(C_1 + C_3\xi)^2 + (C_2 + C_4\xi)^2} \quad \varphi(\xi, C_n) = \operatorname{arctg}\left\{\frac{C_2 + C_4\xi}{C_1 + C_3\xi}\right\}$$

модуляция, у которой амплитуда и сдвиг фазы, переменные (полиномиально) по координате;
 2) полиномиальная $(L_{Z-T}) Z_{0\beta_1}^{(4)} = T_{\beta_0}^{(4)} = G_{\beta}^{(2)} \bigcup P_2^{(2)}$,

$$w(\xi, \beta_1, C_n) = A_1(C_n) \sin(\beta_1\xi + \varphi_1(C_n)) + C_3\xi + C_4$$

$$A_1(C_n) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \varphi_1(C_n) = \operatorname{arctg}\left\{\frac{C_2}{C_1}\right\},$$

одночастотная модуляция с несущей – полиномом первой степени. При этом остаются с не осциллирующими формами модуляции: одна (E) область $E_{\nu\nu}^{(4)} = H_{\nu_1}^{(2)} \bigcup H_{\nu_2}^{(2)}$ и две линии (L_{T-E}) и (L_{E-K}) ЛРВМ $T_{\nu_0}^{(4)} = E_{0\nu}^{(4)} = H_{\nu}^{(2)} \bigcup P_2^{(2)}$ и $E_{\nu\nu}^{(4)} = K_{\alpha 0}^{(4)} = H_{\nu}^{(2)} \bigcup (H_{\nu}^{(2)} \cap P_1^{(1)})$. Здесь $C_n, n = 1, 2, 3, 4$ - постоянные интегрирования, определяемые из граничных (краевых условий).

Таблица 1

Виды модуляций ЛОДУ четвёртого порядка

№	Виды модуляции, уравнение в операторной форме	Коэффициенты уравнения, соотношения связности, области К-разбиения	Характеристические показатели форм
К	$K_{\alpha\beta}^{(4)} = H_{\alpha}^{(2)} \cap G_{\beta}^{(2)}$ амплитудно-фазовая гиперболическая $[(D-\alpha)^2 + \beta^2][(D+\alpha)^2 + \beta^2]\{w\} = 0$	$a_0^{(4)} = (\alpha^2 + \beta^2)^2, \quad a_2^{(4)} = 2(\beta^2 - \alpha^2)$ $\Omega_K : a_0^{(4)} > \left(\frac{a_2^{(4)}}{2}\right)^2$	$\nu_{1-4} = \pm\alpha \pm i\beta$
L_{K-Z}	$K_{0\beta}^{(4)} = Z_{\beta_1\beta_1}^{(4)} = G_{\beta}^{(2)} \bigcup (G_{\beta}^{(2)} \cap P_1^{(1)})$ амплитудная полиномиальная $[(D^2 + \beta^2)^2]\{w\} = 0$	$a_0^{(4)} = \beta^4, \quad a_2^{(4)} = 2\beta^2$ $\Omega_{Z=K} : a_0^{(4)} = \left(\frac{a_2^{(4)}}{2}\right)^2, \quad a_2^{(4)} > 0$	$\nu_{1,2} = \nu_{3,4} = \pm i\beta$
Z	$Z_{\beta_1\beta_2}^{(4)} = G_{\beta_1}^{(2)} \bigcup G_{\beta_2}^{(2)}$ бигармоническая $(D^2 + \beta_1^2)(D^2 + \beta_2^2)\{w\} = 0$	$a_0^{(4)} = \beta_1^2\beta_2^2, \quad a_2^{(4)} = (\beta_1^2 + \beta_2^2)$ $\Omega_Z : 0 < a_0^{(4)} < \left(\frac{a_2^{(4)}}{2}\right)^2, \quad a_2^{(4)} > 0$	$\nu_{1,2} = \pm i\beta_1,$ $\nu_{3,4} = \pm i\beta_2$
L_{Z-T}	$Z_{0\beta_1}^{(4)} = T_{\beta_0}^{(4)} = G_{\beta}^{(2)} \bigcup P_2^{(2)}$ полиномиальная $(D^2 + \beta^2)D^2\{w\} = 0$	$a_0^{(4)} = 0, \quad a_2^{(4)} = \beta_1^2$ $\Omega_{Z=T} : a_0^{(4)} = 0, \quad a_2^{(4)} > 0$	$\nu_{1,2} = \pm i\beta_1,$ $\nu_{3,4} = 0$
T	$T_{\beta\nu_2}^{(4)} = G_{\beta}^{(2)} \bigcup H_{\nu}^{(2)}$ гиперболическая $(D^2 + \beta^2)(D^2 - \nu^2)\{w\} = 0$	$a_0^{(4)} = -\beta^2\nu^2, \quad a_2^{(4)} = 2(\beta^2 - \nu^2) > 0$ $\Omega_T : a_0^{(4)} < 0,$	$\nu_{1,2} = \pm i\beta,$ $\nu_{3,4} = \pm\nu$
L_{T-E}	$T_{\nu_0}^{(4)} = E_{0\nu}^{(4)} = H_{\nu}^{(2)} \bigcup P_2^{(2)}$ $(D^2 - \nu^2)D^2\{w\} = 0$	$a_0^{(4)} = 0, \quad a_2^{(4)} = -2\nu^2 < 0$ $\Omega_{T=E} : a_0^{(4)} = 0, \quad a_2^{(4)} < 0$	$\nu_{1,2} = \pm\nu_1,$ $\nu_{3,4} = 0$
E	$E_{\nu\nu}^{(4)} = H_{\nu_1}^{(2)} \bigcup H_{\nu_2}^{(2)}$ $(D^2 - \nu_1^2)(D^2 - \nu_2^2)(w) = 0$	$a_0^{(4)} = \nu_1^2\nu_2^2, \quad a_2^{(4)} = -2(\nu_1^2 + \nu_2^2)$ $\Omega_E : 0 < a_0^{(4)} < \left(\frac{a_2^{(4)}}{2}\right)^2, \quad a_2^{(4)} < 0$	$\nu_{1,2} = \pm\nu_1,$ $\nu_{3,4} = \pm\nu_2$
L_{E-K}	$E_{\nu\nu}^{(4)} = K_{\alpha 0}^{(4)} = H_{\nu}^{(2)} \bigcup (H_{\nu}^{(2)} \cap P_1^{(1)})$ $(D^2 - \nu^2)^2(w) = 0$	$a_0^{(4)} = \nu_1^4, \quad a_2^{(4)} = -2\nu_1^2$ $\Omega_{E=K} : a_0^{(4)} > \left(\frac{a_2^{(4)}}{2}\right)^2, \quad a_2^{(4)} < 0$	$\nu_{1,2} = \nu_{3,4} = \pm\nu$

Виды модуляций механических систем, описываемых ЛОДУ четвёртого порядка пред-

ставлены в таблице 1.

Модуляции **Z**, **T** и L_{Z-T} аддитивные и представимы суммой двух гармонической функции или гармонической и гиперболической или полинома соответственно. Аддитивные составляющие с постоянными параметрами - несущие, а переменными - модулирующие.

Линии раздела видов модуляции (ЛРВМ) и критические точки первого рода. Указанные выше линии раздела видов модуляций, одна из которых парабола, ветви которой, правая ($L_{Z-T}, a_2^{(4)} > 0$)

$$a_0^{(4)} = \left(\frac{a_2^{(4)}}{2}\right)^2 \quad (8)$$

и левая ($L_{Z-E}, a_2^{(4)} < 0$), разделяют пары областей модуляций: амплитудно-фазовой гиперболической (**K**) и бигармонической (**Z**) и бигиперболической (E) и гиперболической (**K**). Вторая - прямая (ось абсцисс $a_0^{(4)} = 0$), левая ($L_{Z-T}, a_2^{(4)} > 0$) и правая ($L_{Z-T}, a_2^{(4)} < 0$) ветви, которой разделяют пары **областей K-разбиения**:

$$a_0^{(4)} = 0 \quad (9)$$

бигармонической (**Z**) и гиперболической (**T**) и соответственно гиперболической (**T**) и бигиперболической (**E**). При пересечении траекторией нагружения (2) этих линий происходит смена видов модуляции, и поэтому они отнесены к критическим линиям раздела видов модуляции (ЛРВМ), а точки пересечения их траекторией нагружения – критическими точками первого рода. Линии раздела видов модуляции (ЛРВМ), области K – разбиения, траектория Лоренца-Тимошенко и критические точки первого рода в пространстве «коэффициентов жёсткости» изображены на рисунке 1.

Изопараметрические линии уровней частот (ЛУЧ) и сдвига фаз (ЛУСФ). Из соотношений связности (6) следуют выражения изопараметрических линий, в частности линий уровня (ЛУЧ) частот $\beta^2 = C^2 = const$ в каждой из областей K-разбиения видов модуляции:

1) для амплитудно-фазовой (**K**) гиперболической $K_{\alpha\beta}^{(4)} = H_{\alpha}^{(2)} \cap G_{\beta}^{(2)}$ модуляции - семейство левых ветвей непересекающихся между собой парабол со смещённой по оси абсцисс на $2C^2$ вершиной, подобных ЛРВМ (8), и с правой граничной точкой, лежащей на правой ветви параболы (1.8)

$$a_0^{(4)} = \left(2C^2 - \frac{a_2^{(4)}}{2}\right)^2 \quad (10)$$

2) для бигармонической (**Z**) $Z_{\beta_1\beta_2}^{(4)} = G_{\beta_1}^{(2)} \cup G_{\beta_2}^{(2)}$ модуляции – семейство взаимно пересекающихся между собой в этой области прямых с угловым коэффициентом наклона к оси абсцисс C^2 , касательных к правой ветви параболы ЛРВМ (8) и пересекающей ось абсцисс в точке $a_2^{*(4)} = C^2$; точки взаимного пересечения прямых лежат выше точек касания их линии ЛРВМ (8)

$$a_0^{(4)} = C^2 a_2^{(4)} - C^4 \quad (11)$$

3) для гиперболической (**T**) $T_{\beta\nu_2}^{(4)} = G_{\beta}^{(2)} \cup H_{\nu}^{(2)}$ модуляции – семейство прямых (11).

Аналогичные выражения следуют для изопараметрических линий сдвига фаз ЛУСФ. Из всего семейства ЛУЧ выделяется **первая – основная**, соответствующая минимальной частоте. Эта линия состоит из двух частей: правой части параболы (10) и прямой (11). Вершина параболы смещена вправо на величину $C^2 = 4\beta_{\min}^2$, а её конечная правая точка ($a_0^{***4)} = \beta_{\min}^4, a_2^{***4)} = 2\beta_{\min}^2$) является точкой касания линии (8), наклонённой к оси абсцисс под углом $\vartheta = \arctg \beta_{\min}^2$ и пересекающей абсцисс в точке $a_2^{****4)} = \beta_{\min}^2$. **Угол изоклинности** между параболами (8) и (10) равен 2ϑ .

На рисунке 2 изображены изопараметрические семейства линий частот ЛУЧ и сдвига фаз ЛУСФ в каждой из областей К-разбиения. При достижении траектории нагружения (пересечении) изопараметрических линий собственные формы принимают соответствующий вид; при этом, попадая в точку пересечения линий ЛРВМ и ЛУЧ или ЛУСФ или пересечения линий ЛУЧ в области бигармоничности Z , формы (и соответственно, параметры форм) неоднозначны. Такие точки относятся к разряду критических точек второго рода и среди них точки бинарности и полинарности (критические точки высших родов).

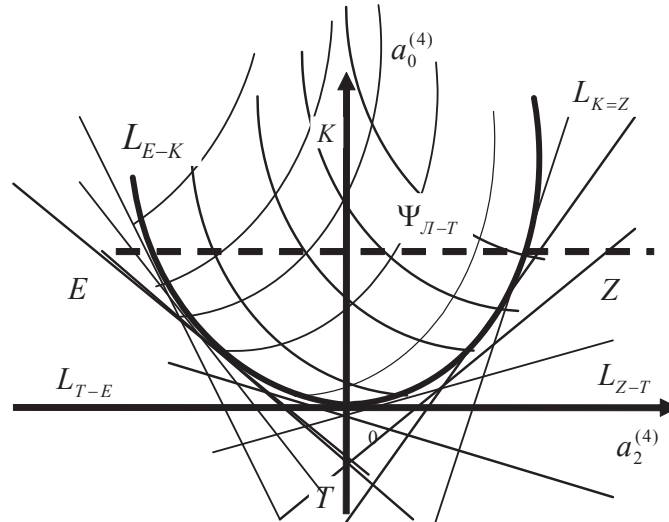


Рисунок 2. Изопараметрические линии ЛРВМ (разделов видов - сплошные жирные), ЛУЧ и ЛУСФ (частот - тонкие), траектория Л-Т и точки пересечения их

Точки бинарности и полинарности. К критическим точкам второго рода относятся точки пересечения траекторией нагружения изопараметрических линий, среди которых выделяются **точки бинарности**, т.е. точки взаимного пересечения линий разного типа (ЛУЧ и ЛУСФ) или одного типа (ЛУЧ). Если траектория проходит через такую точку или в ней касается, то состояние системы, по крайней мере, двойственно, особенно это относится к точкам пересечения линий ЛУЧ в бигармонической области. Здесь пересекаются прямые (11) с различными частотами и малые изменения направления траектории приводят к смене несущей формы (частоты) на модулированную (частоту) и наоборот. Изображённые на рисунке 2 линии ЛУЧ сгущаются вблизи вершины клиновидной области Z . При этом следует отметить важное свойство – линия ЛУЧ с **минимальной частотой** β_{\min} (**основная ОЛУЧ**) – первая основная линия пересекает все остальные с **упорядоченной** системой точек пересечения (**упорядоченными – возрастающими** значениями частоты) – линий с большими частотами; остальные (с частотами $\beta_C = \beta_k > \beta_{\min}$) – пересекаются с **неупорядоченной** системой точек пересечения (с частотами $\beta_{\min} < \beta_1 < \dots < \beta_C = \beta_k < \beta_{k+1}$) – сначала линий с меньшей частотой, а затем – с большей. Механические системы, следуя по таким траекториям нагружения, при этом могут «перескакивать» с одной критической частоты на другую. На этих линиях в точках бинарности собственные функции обладают свойством изоклинности и поэтому их относят к так называемым **точкам изогональности (изоклинности)**. **Траектория E** в задачах о статической устойчивости стержня Эйлера и цилиндрической ортотропной оболочки (с нулевым коэффициентом ортотропии) [1, 3] – прямая линия, совпадающая с осью абсцисс – линия L_{Z-T} , линия раздела бигармонической и гармонически-гиперболической видов модуляций, на которой реализуется одночастотная модуляция

$$\Psi_{T-E}(a_2^{(4)}(\lambda_{\min})) = \tilde{a}_{2E} \cdot k = \beta_{1E}^2(k), \quad a_0^{(4)} = \text{const} = \tilde{a}_{0E} = 0 \quad (1.12)$$

Траектория $\Psi_E(a_2^{(4)}(\beta_{\min}^2))$, соответствующая **минимальной частоте** β_{\min} , **главная**, отделяющая **подобласть** $(a_2^{(4)}, a_0^{(4)}) \in \psi_E$ **устойчивых некритических состояний**.

Условия изогональности (изоклинности). Условия изогональности (изоклинности) и ортогональности связано со значением интеграла $J\{\bar{w}_n \cdot \bar{w}_m\} = \int_0^1 \bar{w}_n(\xi) \cdot \bar{w}_m(\xi) d\xi$ - скалярного произведения ортонормированных собственных $\bar{w}_n(\xi) = \bar{w}(\xi, \beta_0, \beta_n)$ функций, соответствующих разным значениям собственных чисел $\{\beta_{10}, \beta_{1n}\}$ определённого семейства; в общем - **изогональности**

$$J\{n, m\} = J(\bar{w}_n \cdot \bar{w}_m) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m \\ j_g = const \neq \{0, 1\} & \text{при } n \neq m \end{cases} \quad (13)$$

когда при несовпадающих индексах скалярное произведение равно постоянному, отличному от нуля и единице, числу, одинаковому для данного семейства, а в частном случае - **ортогональности**

$$J\{n, m\} = J(\bar{w}_n \cdot \bar{w}_m) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m \\ 0 & \text{при } n \neq m \end{cases}$$

Свойство изогональности присуще двум и более частотным осцилляционным функциям, например, бигармоническим (Z), ортогональности – одночастотным ((L_{K-Z}, L_{Z-T}, T)).

Таким образом, при анализе процесса эволюции осесимметрических форм образующей тонкой упругой цилиндрической оболочки средней длины в качестве критериев критичности состояний используются указанные выше критические линии и точки, при пересечении которых или прохождении через которые траекторией нагружения могут наступить критические состояния, что, в частности, может быть связано с потерей устойчивости.

Фундаментальная система решений. Краевые условия. Детерминантно-краевое частотное (или волновое) определяющее уравнение. Общее решение $\bar{w}(\xi, \bar{\lambda}, \bar{C})$ однородного уравнения (1.1) четвёртого порядка и полное решение $w(\xi, \bar{\lambda}, \bar{C})$ содержат четыре линейно независимых функции - фундаментальных решений $\bar{w}_n(\xi, \nu_n)$, четыре частных решений $W(\xi, \bar{\lambda})$ и четыре постоянных интегрирования $\bar{C} = \{C_n\}$

$$\bar{w}(\xi, \bar{\lambda}, \bar{C}) = \sum_{n=1}^4 C_n \bar{w}_n(\xi, \nu_n), \quad w(\xi, \bar{\lambda}, \bar{C}) = \bar{w}(\xi, \bar{\lambda}, \bar{C}) + W(\xi, \bar{\lambda}) \quad (14)$$

Система фундаментальных решений (ФСР) должна быть представлена в виде, пригодном для непрерывного продолжения (предельного перехода) по параметрам. Краевые условия линейные дифференциального типа на концах $\xi_0 = 0, \xi_1 = 1$ интервала с однородной правой частью представляются в общем виде выражением

$$L_i^{(3)}\{w\} \equiv \left(b_{i0} w + b_{i1} \frac{dw}{d\xi} + b_{i2} \frac{d^2 w}{d\xi^2} + b_{i3} \frac{d^3 w}{d\xi^3} \right) \Big|_{\xi=0,1} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (15)$$

где: коэффициенты $b_{im} = const$ постоянные числа. Соответствующая (15) система уравнений относительно постоянных интегрирования

$$\sum_{k=1}^4 C_k L_i^{(3)}\{\bar{w}_k(\xi, \nu_k)\} \Big|_{\xi=0,1} = L_i^{(3)}\{W(\xi, \bar{\lambda})\} \Big|_{\xi=0,1} \quad (16)$$

имеет множество не тривиальных ограниченных и множество неограниченных решений при условии, что детерминант системы (1.16) равен нулю, т.е.

$$D\{\nu_n\} \equiv \left\| L_i^{(3)}\{\bar{w}_k(\xi, \nu_k)\} \Big|_{\xi=0,1} \right\| = 0 \quad (17)$$

В общем случае левая часть выражения (17) детерминантно-краевая функция (ДТФ) детерминантно - краевого определяющего уравнения (ДКУ) это трансцендентная полиномиальная функция, содержащая тригонометрические функции и полиномы, общий порядок ко-

торой четвёртый. Траектория нагружения (2), соотношения связности (6), (7) вместе с детерминантно - краевым уравнением (17) образуют полную (расширенную, дополненную) систему уравнений на собственные значения (УСЗ) и тем самым на структурные параметры эволюционирующих собственных форм.

Обобщённая (расширенная) постановка задачи анализа эволюции изгибных форм.

Таким образом, расширенная постановка задач анализа включает: линейное обыкновенное дифференциальное уравнение состояния (1); задание траектории нагружения (2); классификации видов модуляций (таблица 1); классификации областей видов модуляции и их границ (таблица 2); соотношения связности (6), (7) «коэффициентов жёсткости» ЛОДУ и структурных параметров – «коэффициентов бесселевых добавок»; классификации критических (8)-(11) линий - изопараметрических ИПЛ и точек (12), (13); линейные краевые условия дифференциального типа (15); детерминантно – краевые уравнения (ДКУ) (17).

Таблица 2

Система фундаментальных решений ЛОДУ 4-ого порядка

модуляция	\bar{w}_1	\bar{w}_2	\bar{w}_3	\bar{w}_4
K	$ch\alpha\xi \cos \beta\xi$	$\frac{\alpha sh\alpha\xi \cos \beta\xi}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{\beta ch\alpha\xi \sin \beta\xi}{\alpha^2 + \beta^2}$	$\frac{sh\alpha\xi \sin \beta\xi}{2\alpha\beta}$	$\frac{\alpha ch\alpha\xi \sin \beta\xi}{2\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)} - \frac{\beta sh\alpha\xi \cos \beta\xi}{2\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)}$
L_{K-Z}	$\cos \beta\xi$	$\frac{\sin \beta\xi}{\beta}$	$\frac{\xi \sin \beta\xi}{2\beta}$	$\frac{\sin \beta\xi}{2\beta^3} - \frac{\beta \cos \beta\xi}{2\beta^3}$
Z	$\frac{\cos \beta_1\xi + \cos \beta_2\xi}{2}$	$\frac{\sin \beta_1\xi}{2\beta_1} + \frac{\sin \beta_2\xi}{2\beta_2}$	$-\frac{\cos \beta_1\xi}{\beta_1(\beta_1^2 - \beta_2^2)} - \frac{\cos \beta_2\xi}{\beta_2(\beta_2^2 - \beta_1^2)}$	$-\frac{\sin \beta_1\xi}{2\beta_1(\beta_1^2 - \beta_2^2)} - \frac{\sin \beta_2\xi}{2\beta_2(\beta_1^2 - \beta_2^2)}$
L_{Z-T}	$\frac{\cos \beta_1\xi + 1}{2}$	$\frac{\sin \beta_1\xi}{2\beta_1} + \frac{1}{2}$	$-\frac{\cos \beta_1\xi - 1}{\beta_1^2}$	$-\frac{\sin \beta_1\xi}{\beta_1^3} + \frac{\xi}{\beta_1^2}$

Основная особенность и трудность этих задач состоит в том, что для указанных многопараметрических (по значениям «коэффициентов жёсткости») механических систем высшего (четвёртого и выше) порядка структурных параметров (значений частот и сдвигов фазы) всегда два и более, а осцилляционных составляющих – фундаментальных (ФСР) решений четыре и более. Трудность, в первую очередь, заключается в наличии «неопределённости», т.е. параметрической зависимости «коэффициентов жёсткости» ЛОДУ (они же коэффициенты характеристических показательных полиномов эйлеровых). Во вторую очередь - отсутствие аналитических решений для трансцендентных или тригонометрических детерминантно - краевых уравнений высокого (четвёртого и выше) порядков. И, в третью очередь, форма представления фундаментальной системы (ФСР) решений ЛОДУ эйлера типа должна быть универсальной. В частности, непрерывной по структурным параметрам и обладать свойством непрерывного перехода от одного вида модуляции к другому как в случае простых (некратных параметров), так и в случае кратных.

Эволюция собственных форм в задаче устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии по траектории Тимошенко-Лоренца (Л-Т). Рассмотрим в качестве примера задачу об осесимметрических собственных формах при потере устойчивости тонкой линейно упругой круговой цилиндрической оболочки средней длины (задача Лоренца - Тимошенко). Для случая осевого сжатия цилиндрической оболочки «коэффициенты жёсткости

$$a_2(\lambda_1) = 12(1 - \mu_{12}\mu_{21})(L/R)^2(R/h)^2 \lambda_1, \quad a_0 = 12c(1 - \mu_{12}\mu_{21})(L/R)^4(R/h)^2 = const$$

как функции монотонного параметра нагружения $\bar{\lambda} = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, положительно полуопределённые или полностью определённые, на плоскости $(a_2 \sim a_0)$ образуют **траекторию** нагружения **Тимошенко-Лоренца** (Л-Т) [9, 10] – **прямую** параллельную оси абсцисс линию

$$a_0^{(4)}(\bar{\lambda}) = const, \quad a_2^{(4)}(\bar{\lambda}) > 0 \quad (18)$$

На ней реализуются **два вида** основных модуляций: **одночастотная** амплитудно-фазовая K и **двухчастотная** фазовая Z и одна переходная амплитудно-фазовая L_{K-Z} . Она проходит через две области К-разбиения: область крыловскую (К) и область бигармоническую (Z) и пересекает линию раздела L_{K-Z} в некоторой точке $(a_0^{*(4)}, a_2^{*(4)})$ и семейство ЛУЧ в точках $(a_{0k}^{** (4)}, a_{2k}^{** (4)}, k = 1, 2, \dots)$. Часть точек пересечения траектории с линиями ЛУЧ лежит в области (К), а другая - в области (Z).

Траектории Т-Л, у которых $a_0^{(4)}(\bar{\lambda}) \leq \beta_{1\min}^4$ ($\beta_{1\min}$ - минимальная частота) пересекает линии ЛУЧ в порядке возрастания значений частот, называются упорядоченными, а при $a_0^{(4)}(\bar{\lambda}) > \beta_{1\min}^4$ - неупорядоченными. Траектория задана как функция параметров $(\alpha, \beta), (\beta), (\beta_1, \beta_2)$ и как функция коэффициентов (a_2, a_0)

$$\Psi_{Л-Т}(a_2^{(4)}, a_0^{(4)}) = 0 \Rightarrow a_0^{(4)}(\bar{\lambda}) = \begin{cases} (\alpha^2 + \beta^2)^2 \\ \beta^4 \\ \beta_1^2 \beta_2^2 \\ 0 \end{cases} = const, \quad a_2^{(4)}(\bar{\lambda}) = \begin{cases} 2(\beta^2 - \alpha^2) \text{ при } K \\ 2\beta^2 \text{ при } L_{K-Z} \\ (\beta_1^2 + \beta_2^2) \text{ при } Z \\ \beta_1^2 \text{ при } L_{Z-T} \end{cases} > 0 \quad (19)$$

которые в свою очередь есть функции параметра нагружения $\bar{\lambda} = \{\lambda_1\}$, определённых соотношениями

$$a_2(\bar{\lambda}) = a_2^0 + A_2(\bar{\lambda}) \geq 0, \quad 0 < a_0(\bar{\lambda}) = a_0^0 + A_0(\bar{\lambda}) < \frac{a_2^2(\bar{\lambda})}{4}, \quad \rightarrow F_T(a_2, a_0) = 0 \quad (20)$$

где $A_2(\bar{\lambda}), A_0(\bar{\lambda})$ - функции параметра нагружения $\bar{\lambda}$, а $(a_2^0, a_0^0) \in \Omega_Z$ - её начальные координаты - значения коэффициентов жёсткости при значениях $\bar{\lambda} \rightarrow 0$ в начальном (исходном) состоянии.

Система фундаментальных решений уравнения (таблица 1) в указанных областях К-разбиения, в которых пролегает траектория Л-Т, содержит одночастотные осцилляции (модуляция амплитудно-фазовая гиперболическая) в области К и на линиях ЛРВМ L_{K-Z} (амплитудно-фазовая полиномиальная) и L_{Z-T} (полиномиальная) и двухчастотную осцилляцию в области Z (амплитудно-фазовая гармоническая модуляция). Краевые условия типа (15) приняты для жёсткого заземления торцов оболочки:

$$w(0, \lambda_1) = w(1, \lambda_1) = \left. \frac{dw}{d\xi} \right|_{\xi=0} = \left. \frac{dw}{d\xi} \right|_{\xi=1} = 0 \quad (19)$$

При расчётах приняты следующие значения: геометрических $L/R = 1, R/h = 100$ и механических характеристик $\mu_{12} = \mu_{21} = \mu = 0.3$ - коэффициента Пуассона. Диапазон изменения частот $0 \leq \beta \leq 34$; значение коэффициента жёсткости $a_0^{L(4)} = 1.092 \cdot 10^5$; коэффициент $a_2^{L(4)}(k)$ принят на траектории Т-Л зависимостью от параметра $a_2^{(4)}(k) = a_2^{L(4)} \cdot k, k = \sigma / \sigma_L$, где $(R/h) / \sqrt{3(1 - \mu^2)}$ - «Лоренцова сила» ($0 \leq k \leq 2$). Детерминантно-краевые трансцендентные и тригонометрические уравнения (17) четвёртого порядка в соответствующих областях К-разбиения решались графическим способом, путём построения функции – ДКУФ типа (17), при этом учитывалось то, что основные частоты могут быть определены на «траектории Эйлера» $a_0^{(4)}(\bar{\lambda}) = 0, a_2^{(4)}(\bar{\lambda}) > 0$, т.е. на оси абсцисс («балочная» траектория) по

«усечённому-частотному» уравнению вида:

$$E^{(4)}\{w, \xi, \bar{\lambda}\} = w^{IV} + a_2^{(4)}w'' = w^{IV} + \beta^2 w'' = 0 \quad (20)$$

При подходе к граничным линиям раздела видов модуляции осуществляются предельные переходы: из области К на линии (8) по структурному параметру $\alpha \rightarrow 0$, а из области бигармонической Z в область гармонически-гиперболическую К на линии (8) - по параметру $\beta_2 \rightarrow \beta_1$; из области Z бигармонической модуляции в область Т гармонически-гиперболической модуляции на линии (9) осуществляется предельный переход по структурному параметру $\beta_2 \rightarrow 0$. Значения первых девяти частот, приведенных ниже, получены с удержания столько знаков после запятой, чтобы отклонение от нуля в ДКУ типа (17) было одинаковым и составляло $\sim 10^{-5} - 10^{-6}$. Характер ДКУФ в окрестности нулей (корней - частот) таков, что требовалось до десяти итераций по методу «половинного деления»:

$$\beta = 8.9868; 15.405; 21.808333; 28.13283; 34.44151; 40.742605; 47.03899; 53.33108 \quad (21)$$

Точность определения координат точки нуля существенно зависит от угла подхода ДКФ к оси абсцисс (или, что то же, производной ДКФ) в окрестности нуля; в точке касания особенно. Детерминантно-краевая функция которой (ДКФ) при значениях параметра $0 < k < 2$ в окрестности оси абсцисс имеет точки касания и точки пересечения, поэтому при определении нулей требуется применять соответствующие процедуры для повышения соответствующей точности (разрядности). На это обстоятельство следует обращать особое внимание и учитывать при решении задач на собственные значения многопараметрических механических систем. При практических расчётах в таких случаях приходится учитывать до седьмого знака после запятой при вычислительном «нуле» ДКФ на уровне $10^{-3} - 10^{-4}$. Приведенные на рисунке 3 значения относительного прогиба $\tilde{w} = w/w_L$ отнесены к величине прогиба от равномерной (реактивной) распределённой нагрузки $w_L = f(\bar{\lambda})/a_0^{(4)}$. На графиках, представляющих модулированные осесимметрические формы цилиндрической оболочки при осевом сжатии по траектории Т-Л выше порога упорядочения, видно резкое возрастание на два-три порядка величины прогиба. Форма прогиба сложная с участками немонотонности, и, таким образом, на начальном участке наблюдается переход формы от высшей частоты к низшей.

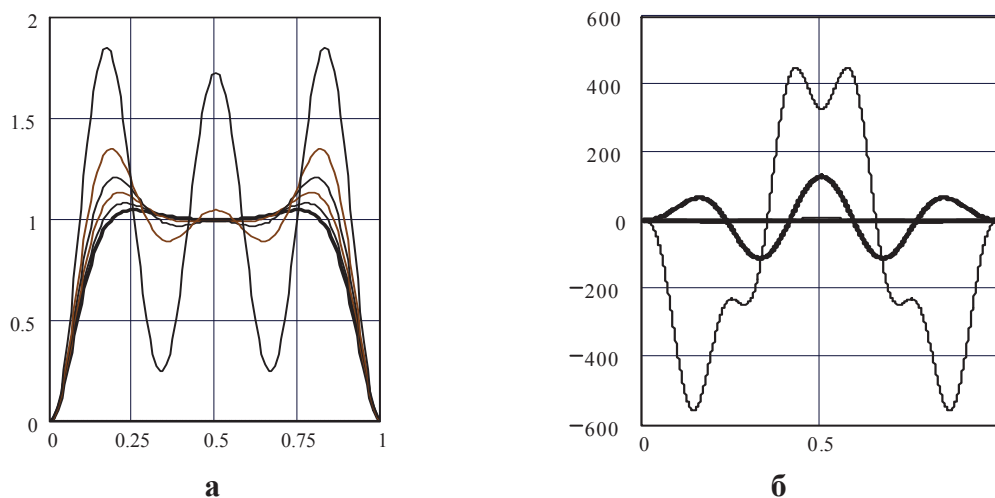


Рисунок 3. Гиперболо-гармонические (а) и бигармонические (б) осесимметрические изгибные формы цилиндрической оболочки с жёстко заделанными торцами при осевом сжатии по траектории Т (при нагрузках $k = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.99$ и $k = 1.0568; 1.9705$)

Из приведенных на рисунке 3а в области К форм видно, что число точек пересечения траекторией критических линий конечно, т.е. число осцилляций конечно: равно трём при

$k = 0.2$ и равно пяти при $k = 0.99$. В области Z (рисунок 3б) число осцилляций бесчисленное множество.

Отметим одну важную особенность решений на траектории Е-Л при пересечении с траекторией Z : собственные значения $\beta_{1n} = 2\pi n$ (которые соответствуют решению Тимошенко-Лоренца) определяют численно связь геометрических и механических величин, а именно

$$a_0 = 12c(1 - \mu_{12}\mu_{21})(L/R)^4(R/h)^2 = const = \beta_{1n}^4 = 16\pi^4 n^4 \quad (22)$$

Из этих соотношений следует **эффект «пи - энности»**, состоящий в том, что указанные характеристики жёстко связаны с иррациональным числом «пи». Решения подобного типа приведены в монографии [1]. Указанным в предыдущем пункте собственным числам соответствуют собственные функции:

- на **траектории Е**, свойство **изогональности** чётных и нечётных и **ортогональности** перекрёстных функций

$$w_{EC}(\xi, n, 0) = \cos 2\pi n \xi - 1, \quad w_{@S}(\xi, \beta_{1n}, 0) = (\cos \beta_{1n} \xi - 1) - 2\left(\frac{\sin \beta_{1n} \xi}{\beta_{1n}} - \xi\right)$$

отражено в значениях скалярных произведений, приведенных ниже

$$J_C\{n, m\} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m \\ 0.667 & \text{при } n \neq m \end{cases}, \quad J_S\{n, m\} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m \\ 0.4 & \text{при } n \neq m \end{cases}, \quad J_0\{n, m\} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m \\ 0 & \text{при } n \neq m \end{cases}$$

- на **траектории К**, свойство **изогональности** чётных и нечётных и **ортогональности** перекрёстных функций

$$w_C(\xi, \beta_{10}, \beta_{1n}) = (\cos \beta_{1C0} \xi - \cos \beta_{1Cn} \xi) + 2\left(\frac{\sin \beta_{1C0} \xi}{\beta_{1C0}} - \frac{\sin \beta_{1Cn} \xi}{\beta_{1Cn}}\right)$$

$$w_S(\xi, \beta_{10}, \beta_{1n}) = (\cos \beta_{1S0} \xi - \cos \beta_{1Sn} \xi) - 2\left(\frac{\sin \beta_{1S0} \xi}{\beta_{1S0}} - \frac{\sin \beta_{1Sn} \xi}{\beta_{1Sn}}\right)$$

отражено в значениях скалярных произведений, приведенных ниже

$$J_C\{n, m\} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m \\ 0.5 & \text{при } n \neq m \end{cases}, \quad J_S\{n, m\} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m \\ 0.773 & \text{при } n \neq m \end{cases}, \quad J_0\{n, m\} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m \\ 0 & \text{при } n \neq m \end{cases}.$$

Свойство ортогональности для скалярного произведения собственных функций разных семейств (чётных и нечётных) очевидно, т.к. интеграл на интервале $\xi = 0,1$ от нечётной относительно середины интервала функции равен нулю, а произведение чётной относительно середины интервала функции на нечётную есть функция нечётная.

Обобщённый ряд Фурье по изогональной системе собственных функций. Свойство изогональности и ортогональности двух семейств собственных функций даёт возможность представления произвольной интегрируемой функции $f(\xi)$ обобщённым рядом Фурье

$$S(\xi) \sim f(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \bar{w}_{Cn}(\xi, \beta_{20}, \beta_{2n}) + \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \bar{w}_{Sn}(\xi, \beta_{10}, \beta_{2n}) \quad (24)$$

Коэффициенты ряда представляются конечной и рекуррентной формулами

$$c_n = \frac{1}{J_C} \int f(\xi) [\bar{w}_{Cn}(\xi, \beta_{1C0}, \beta_{1Cn}) - \frac{J_C}{I_C}] d\xi \quad (26)$$

$$d_n = d_{n-1} - \frac{1}{J_S} \int f(\xi) [\bar{w}_{Sn}(\xi, \beta_{2S0}, \beta_{2Sn}) - \bar{w}_{S(n-1)}(\xi, \beta_{2S0}, \beta_{2S(n-1)})] d\xi \quad (27)$$

где соответствующие нормирующие коэффициенты - интегралы равны

$$I_C = \int_0^1 \bar{w}_{Cn}(\xi, \beta_{1C0}, \beta_{1Cn}) d\xi, \quad J_C = \left(\int_0^1 \bar{w}_{Cn}^2(\xi, \beta_{1C0}, \beta_{1Cn}) d\xi\right)^{1/2}, \quad J_S = \left(\int_0^1 \bar{w}_{Sn}^2(\xi, \beta_{1S0}, \beta_{1Sn}) d\xi\right)^{1/2}.$$

Выводы

В области амплитудно-фазовой К-модуляции «наблюдается расчётно» смена частот (числа осцилляций) при значениях продольного усилия равных $k \approx 0.2$, т.е. ниже «лоренцовой» и более соответствующих экспериментально определённым. При этом в диапазоне нагрузок $k \approx 0.4 - 0.6$ происходит «скачок» сдвига фазы.

В области бигармонических модулированных форм существует подобласть в виде криволинейного треугольника, ограниченного снизу отрезком (ЛРМ-Е) оси абсцисс до первой критической частоты $\beta_{1\min}$, сверху - частью параболы (ЛРМ-Т) и справа - отрезком касательной ЛУЧ-К к параболе ЛРМ-Т, проходящей через конец отрезка ЛРМ-Е.

Модулированные собственные функции бинарных критических точек изогональны (изоклины) в каждом из множеств (чётных или нечётных) и ортогональны между собой.

Обобщённая постановка задач анализа форм в полярной и конической системах координат

Уравнение состояния. Уравнение состояния – линейное обыкновенное дифференциальное уравнение (ЛОДУ) $2N$ -ого порядка бесселева типа относительно действительной функции $W(\eta)$ нормированной действительной переменной $0 \leq \eta \leq 1$

$$B^{(2N)}(\vec{b}^{(2N)}, s)\{W\} \equiv \overbrace{[E^{(2N)}(\vec{b}^{(2N)}, s)]}^{\text{эйлерова часть}} + \underbrace{b_0^{(2N)} \eta^{2Ns}}_{\text{бесселев добавок}} \{W\} = f(\eta) \quad (2.1)$$

включает: «обобщённо - эйлерову часть», представляемую суммой произведений линейных дифференциальных (ЛДО) операторов Эйлера $E_{2n}^{(2N)}(\sigma, \mu, s)\{W\}$ до $2N$ -ого порядка на степени координатной переменной $\eta^{2(N-n)}$

$$E^{(2N)}(\vec{b}^{(2N)}, s)\{W\} = \sum_{n=1}^N b_{2n}^{(2N)}(\vec{\lambda}) \eta^{2(N-n)} E_{2n}^{(2N)}(\sigma, \mu, s)\{W\} \quad (2.2)$$

и «бесселев добавок» - произведение степени координатной переменной η^{2Ns} на искомую функцию с действительными параметрическими «коэффициентами (КЖ) жёсткости» и «коэффициентом бесселева (КДБ) добавка» ЛОДУ $\vec{b}^{(2N)}(\vec{\lambda}) = \{b_{2n}^{(2N)}(\vec{\lambda}), n = \overline{0, N}\}$ - функциями «комбинированной внешней нагрузки» $\vec{\lambda}$, например, изменяющихся в процессе нагружения мембранных усилий, и показателем степени бесселева добавка – неизменного параметра s .

Траектория нагружения. Операторы $E_{2n}^{(2N)}(\sigma, \mu, s)\{W\}$ однотипные, специального вида:

$$E_{2n}^{(2N)}(\sigma, \mu, s)\{W\} = \sum_{k=0}^{2n} d_{2n,k}^{(2N)} D_{\eta}^k \{W\} = \prod_{k=1}^n E_k^{(2)}(\sigma, \mu, s)\{W\} = \prod_{k=1}^n (D_{\eta} - \nu_{2n,1k})(D_{\eta} - \nu_{2n,2k})\{W\} \quad (2.3)$$

представимы некоммутативным произведением эйлеровыми ЛДО специального типа второго порядка

$$E_k^{(2)}(\sigma, \mu, s)\{W\} = (D_{\eta} - \nu_{1k})(D_{\eta} - \nu_{2k})\{W\} = [(D_{\eta} + \sigma - 2s(k-1))^2 - \mu^2]\{W\} \quad (2.4)$$

имеющими характеристические показатели ν_{1k}, ν_{2k} , зависящие от трёх структурных неизменных параметров (σ, μ, s) и номера k – корнями вековых характеристических полиномов степени $2n$

$$E_{2n}^{(2N)}\{W\} \Rightarrow P_E^{(2n)}(\nu) = \sum_{k=0}^{2n} d_{2n,k}^{(2N)} \nu = 0 \quad (2.5)$$

Характеристические ЛДО показатели удовлетворяют условиям: разности значений характеристических показателей для пар одного номера, начиная с меньшего номера, одинаковы; разности характеристических показателей для каждых последовательных пар постоянны

$$\nu_{1k} - \nu_{2k} = 2\mu, \quad \nu_{1k} + \nu_{2k} = 2\sigma - 4s(k-1), \quad \nu_{1(k+1)} - \nu_{1k} = \nu_{2(k+1)} - \nu_{2k} = 2s \quad (2.6)$$

Обобщённое преобразование Ломмеля-Томсона. Линейный дифференциальный бesselев оператор (2.1), эйлера часть и бesselев добавок которого удовлетворяют условиям (2.2)-(2.6), представим суммой:

$$B^{(2N)}(\vec{b}^{(2N)}(\vec{\lambda}))\{W\} = \eta^{2Ns} \left[\sum_{n=1}^N b_{2n}^{(2N)}(\vec{\lambda}) K^{(2n)}(\sigma, \mu, s) + b_0^{(2N)}(\vec{\lambda}) \right] \{W\} \quad (2.7)$$

и коммутативным произведением

$$B^{(2N)}(\sigma, \mu, s, \vec{\lambda})\{W\} = \eta^{2Ns} \prod_{n=1}^N B_m^{(2)}(\sigma, \mu, s, \Lambda_n^2)\{W\} = \eta^{2Ns} \left[\prod_{n=1}^N (K_1^{(2)}(\sigma, \mu, s) + \Lambda_n^2) \right] \{W\} \quad (2.8)$$

Здесь введены «обобщённые эйлеровы» степенно-дифференциальные операторы второго порядка, аналогичные операторам Лапласа [12-17]

$$K^{(2n)}(\sigma, \mu, s)\{W\} = \prod_{k=1}^n K_k^{(2)}(\sigma, \mu, s)\{W\} = \underbrace{\eta^{-2s} E_1^{(2)} \{ \eta^{-2s} E_1^{(2)} \{ \eta^{-2s} E_1^{(2)}(\sigma, \mu) \} \{W\} \}}_{n \text{ раз}} \quad (2.9)$$

и «обобщённые бesselевы» дифференциальные операторы высшего порядка специального типа [13-18]

$$B_m^{(2)}(\sigma, \mu, s, \Lambda_m^2)\{W\} = [K_1^{(2)}(\sigma, \mu) + \Lambda_m^2]\{W\} = [\eta^{-2s} E_1^{(2)}(\sigma, \mu) + \Lambda_m^2]\{W\} \quad (2.10)$$

представляющие собой «степени» - обобщённого степенно-дифференциального эйлера оператора второго порядка (аналог преобразования Ломмеля – Томсона [19-20])

$$K_1^{(2)}(\sigma, \mu, s)\{W\} = \eta^{-2s} E_1^{(2)}(\sigma, \mu)\{W\} = \eta^{-2s} [(D_\eta + \sigma)^2 - \mu^2]\{W\} \quad (2.11)$$

Соотношения связности «коэффициентов жёсткости» ЛОДУ и характеристических структурных параметров форм. Здесь «коэффициенты бesselевых добавок» $\Lambda_m^2, m = \overline{1, N}$ в разложении (2.11) есть корни характеристического полинома

$$P_B(\Lambda) = \sum_{n=0}^N b_{2n}^{(2N)}(\vec{\lambda}) \Lambda^2 = 0 \quad (2.12)$$

и являются основными структурными параметрами решений, связанные с «коэффициентами жёсткости» соответствующими соотношениями [17-21]

$$b_{2N}^{(2N)}(\vec{\lambda}) = 1, \quad b_{2n}^{(2N)}(\vec{\lambda}) = \sum_{j=1}^{C_n^N} \prod_{k_j=1}^n \Lambda_{k_j}^2(\vec{\lambda}), \quad b_{2N-2}^{(2N)}(\vec{\lambda}) = \sum_{n=1}^N \Lambda_n^2(\vec{\lambda}), \quad b_0^{(2N)}(\vec{\lambda}) = \prod_{n=1}^N \Lambda_n^2(\vec{\lambda}) \quad (2.13)$$

Представление бesselева оператора высшего порядка коммутативным произведением бesselевых операторов второго порядка. Используя элементарные операторные соотношения

$$\eta \frac{dW}{d\eta} = D_\eta \{W\}, \quad \eta^2 \frac{d^2 W}{d\eta^2} = D_\eta (D_\eta - 1) \{W\}, \quad \mu^n \frac{d^n W}{d\eta^n} = \prod_{k=1}^n [D_\eta - (k-1)] \{W\}$$

и преобразования Ломмеля - Томсона искомой функции $W(\eta) = \eta^{-\sigma} w$ с учётом соответствующих выражений – операторов сдвига

$$D_\eta \{W\} = \eta^{-\sigma} (D_\eta - \sigma) \{w\}, \quad D_\eta^k \{W\} = \eta^{-\sigma} (D_\eta - \sigma)^k \{w\}$$

и координатной переменной $\xi = \eta^s$ выражений – операторов умножения

$$D_\eta \{w\} = s D_\xi \{w\}, \quad D_\eta^k \{w\} = s^k D_\xi^k \{w\}$$

обобщенные операторы Эйлера и Бесселя примут «каноническую» форму

$$B_\eta^{(2N)}(\sigma, \mu, \vec{\lambda})\{W\} = s^{2N} \eta^\sigma B_\xi^{(2N)}(\bar{\mu}, \bar{\lambda})\{w\} = s^{2N} \eta^\sigma \prod_{n=1}^N [(D_\xi^2 - \bar{\mu}^2) + \bar{\Lambda}_n^2 \xi^2] \{w\} \quad (2.14)$$

где $\bar{\mu} = \mu/s, \quad \bar{\Lambda}_n = \Lambda_n/s$ и при этом справедливы операторные соотношения

$$\xi \frac{dw}{d\xi} = D_\xi \{w\}, \quad \xi^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} = D_\xi (D_\xi - 1) \{w\}, \quad \xi^n \frac{d^n w}{d\xi^n} = \prod_{k=1}^n [D_\xi - (k-1)] \{w\}$$

Представление (2.14) позволяет переписать уравнение (2.1) в форме, левая часть которого есть коммутативное произведение «обобщённых бесселевых» дифференциальных операторов, где эйлеров оператор представлен в форме лапласа

$$\prod_{n=1}^N [\xi^{-2} (D_\xi^2 - \bar{\mu}^2) + \bar{\Lambda}_n^2] \{w\} = \bar{f}(\xi) \quad (2.15)$$

Вследствие коммутативности операторной части (2.15) исходное уравнение высшего $2N$ -ого порядка с однородной (нулевой) правой частью равносильно системе N независимых уравнений Бесселя второго порядка

$$[(D_\xi^2 - \bar{\mu}^2) + \bar{\Lambda}_n^2 \xi^2] \{w\} = 0, n = \overline{1, N} \quad (2.16)$$

где: $\bar{\mu} = \mu / s = (v_1 - v_2) / s$ - индекс (или порядок) цилиндрических функций; $\bar{\Lambda}_n$ - коэффициенты бесселевых добавок – корни характеристического уравнения (2.12) для КДБ

$$P_B(\bar{\Lambda}) = \sum_{n=0}^N \frac{b_{2n}^{(2N)}(\bar{\lambda})}{s^{2N}} \bar{\Lambda}^2 = \prod_{n=1}^{N_1} (\bar{\Lambda}^2 - \bar{\Lambda}_n^2)^{p_n} \prod_{m=1}^{N_2} (\bar{\Lambda}^2 + \bar{\Lambda}_m^2)^{p_m} \prod_{k=1}^{N_3} (\bar{\Lambda}^4 - 2\alpha_k^2 \bar{\Lambda}^2 + (\alpha_k^4 + \beta_k^4))^{p_k} = 0 \quad (2.17)$$

Основные типы собственных форм и критических линий раздела характерных областей. Среди $\bar{\Lambda}_n^2$ корней КДБ уравнения (2.17) возможны четыре типа: единичные действительные положительные $\bar{\Lambda}_n^2 > 0$, отрицательные $\bar{\Lambda}_m^2 < 0$ и нулевые $\bar{\Lambda}_j^2 = 0$ и парные комплексно-сопряжённые $\bar{\Lambda}_{1,2(k)}^2 = \alpha_k^2 \pm i\beta_k^2$ соответствующих кратностей p_n, p_m, p_j и p_k ,

так что
$$\sum_{n=1}^{N_1} p_n + \sum_{m=1}^{N_2} p_m + 2 \sum_{k=1}^{N_3} p_k + \sum_{j=1}^{N_4} p_j = N.$$

Решения любого ЛОДУ второго порядка из системы (2.16) для единичных простых (некратных) и не целых КДБ есть пара цилиндрических функций, представленная обобщённо-степенными рядами вида:

$$[(D_\xi^2 - \bar{\mu}^2) + \bar{\Lambda}_n^2 \xi^2] \{Z\} = 0 \Rightarrow Z_{\pm \bar{\mu}(n)}(\xi) = \xi^{\pm \bar{\mu}} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{\bar{\Lambda}_n \xi}{2} \right)^{2m} \frac{1}{m! \prod_{k=1}^m (\pm \bar{\mu} + k)} \right) \quad (2.18)$$

Для простых (некратных) значений бесселевых добавок весь набор ФСР определяется по форме (2.18), а для кратных (в зависимости от кратности) – по схеме Лопиталья: для двукратных

$$\bar{Z}_{\pm \bar{\mu}(n+1)}(\xi) = \lim_{\bar{\lambda}_{n+1} \rightarrow \bar{\lambda}_n} \frac{Z_{\pm \bar{\mu}(n)}(\bar{\lambda}_n \xi) - Z_{\pm \bar{\mu}(n+1)}(\bar{\lambda}_{n+1} \xi)}{\bar{\lambda}_n - \bar{\lambda}_{n+1}} = \xi \frac{dZ_{\pm \bar{\mu}(n)}(\bar{\lambda}_n \xi)}{d\bar{\lambda}_n} \quad (2.19)$$

и для многократных

$$\bar{Z}_{\pm \bar{\mu}(n+2)}(\xi) = \xi^2 \frac{d^2 Z_{\pm \bar{\mu}(n)}(\bar{\lambda}_n \xi)}{d\bar{\lambda}_n^2}, \dots, \bar{Z}_{\pm \bar{\mu}(n+m)}(\xi) = \xi^m \frac{d^m Z_{\pm \bar{\mu}(n)}(\bar{\lambda}_n \xi)}{d\bar{\lambda}_n^m} \quad (2.20)$$

При действительных $\bar{\Lambda}_n^2 > 0$ положительных значениях КДБ единичных корней цилиндрические функции (2.18) называются функциями Бесселя (Вебера, Неймана, Ханкеля) первого рода действительного аргумента индекса $\bar{\mu}$. При действительных $\bar{\Lambda}_m^2 < 0$ отрицательных значениях КДБ – функциями Бесселя (Макдональда) второго рода мнимого аргумента индекса $\bar{\mu}$, при нулевых значениях Эйлеровы (степенные) действительного аргумента и для парных комплексно-сопряжённых $\bar{\Lambda}_{1,2(k)}^2 = \alpha_k^2 \pm i\beta_k^2$ - функции Бесселя – Кельвина комплексного аргумента. Их явные выражения редко встречаются в публикациях, поэтому они представлены ниже

$$Kc_{\pm\bar{\mu}(k)}(\xi) = \xi^{\pm\bar{\mu}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\rho_k \xi}{2} \right)^{2n} \frac{\cos 2n\varphi_k}{n! \prod_{m=1}^n (\pm\bar{\mu} + m)} \right),$$

$$Ts_{\pm\bar{\mu}(k)}(\xi) = \xi^{\pm\bar{\mu}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\rho_k \xi}{2} \right)^{2n} \frac{\sin 2n\varphi_k}{n! \prod_{m=1}^n (\pm\bar{\mu} + m)} \right) \quad (2.21)$$

где параметры комплексно-сопряжённых коэффициентов бesselевых добавок следующие

$$\bar{\Lambda}_k^2 = \alpha_k^2 \pm i\beta_k^2 \Rightarrow \rho_k = \sqrt{\alpha_k^4 + \beta_k^4}, \quad \varphi_k = \pm \operatorname{arctg} \frac{\beta_k^2}{\alpha_k^2} \quad (2.22)$$

Таблица 2.1

Виды простых осцилляций и монотонностей цилиндрических функций второго и четвёртого порядков

№	Названия видов осцилляции или монотонности	Значения коэффициента бesselева добавка $\bar{\Lambda}^2$	Аргументы функций	Написание функций
1	Бесселевы I-го рода. (Неймана, Вебера, Ханкеля) индекса (порядка) $\bar{\mu}$ действительного аргумента $\xi^2 w'' + \xi w' - \bar{\mu}^2 w + \bar{\Lambda}^2 \xi^2 w = 0$	$\bar{\Lambda}^2 > 0$ положительные	$\pm \bar{\Lambda} \xi$ действительные	$J_{\pm\bar{\mu}}, N_{\pm\bar{\mu}}, Y_{\pm\bar{\mu}}$ действительные осциллирующие
2	Бесселевы II-го рода (Макдональда) (модифицированные функции Бесселя индекса (порядка) $\bar{\mu}$) мнимого аргумента $\xi^2 w'' + \xi w' - \bar{\mu}^2 w - \bar{\Lambda}^2 \xi^2 w = 0$	$\bar{\Lambda}^2 < 0$ отрицательные	$\pm i \bar{\Lambda} \xi$ мнимые	$I_{\pm\bar{\mu}}, K_{\pm\bar{\mu}}$ действительные монотонные
3	Эйлера действительного аргумента $\xi^2 w'' + \xi w' - \bar{\mu}^2 w = 0$	$\bar{\Lambda}^2 = 0$ действительные нулевые	$\bar{\Lambda}_{1,2} = 0$ действительные нулевые	$e_{\pm\bar{\mu}} = \xi^{\pm\bar{\mu}}$ действительные степенные монотонные
4	Кельвина-Ханкеля индекса (порядка) $\bar{\mu}$ комплексного аргумента $\xi^4 w^{IV} + 2\xi^3 w^{III} - (1 + 2\bar{\mu}^2)\xi^2 w'' + (1 + 2\bar{\mu}^2)\xi w' - \bar{\mu}^2(4 - \bar{\mu}^2)w + 2\xi^2 \alpha^2(\xi^2 w'' + \xi w' - \bar{\mu}^2 w) + (\alpha^4 + \beta^4)\xi^4 w = 0$	$\bar{\Lambda}^2 = \alpha^2 \pm i\beta^2$ $\beta^2 = \sqrt{ \alpha^4 - \bar{\Lambda}^4 }$ комплексно-сопряжённые	$\pm \sqrt{\alpha^4 + \beta^4} e^{i\varphi}$ $\varphi = \pm \operatorname{arctg} \frac{\beta^2}{\alpha^2}$ комплексно-сопряжённые	$Kc_{\pm\bar{\mu}}, Ts_{\pm\bar{\mu}},$ $Hr_{\pm\bar{\mu}}, Hi_{\pm\bar{\mu}}$ действительные осциллирующие
5	Бесселя-Кельвина (Томсона) индекса (порядка) $\bar{\mu}$ комплексного аргумента $\xi^2 w'' + \xi w' - \bar{\mu}^2 w \pm i\bar{\Lambda}^2 \xi^2 w = 0$	$\pm i\bar{\Lambda}^2$ мнимые	$\pm \frac{\sqrt{2}}{2} (1 \pm i)\bar{\Lambda} \xi$ комплексные	$ber_{\pm\bar{\mu}}, ker_{\pm\bar{\mu}},$ $bei_{\pm\bar{\mu}}, kei_{\pm\bar{\mu}}$ действительные части комплексных осциллирующих

Каждому типу элементарных простых (некратных) решений соответствуют простые формы осцилляций и монотонностей, перечень которых приведен в таблице 2.1. В число простых модуляций цилиндрических функций четвёртого порядка входят четыре вида двух-

параметрических и четыре – однопараметрических (таблица 2.2), где при классификации видов используются обобщённые дифференциальные операторы Лапласа второго и четвёртого порядка

$$\nabla^2 \{w\} = w'' + \frac{1}{\xi} w' - \frac{\bar{\mu}^2}{\xi^2} w, \quad \nabla^2 \nabla^2 \{w\} = w^{IV} + \frac{2}{\xi} w^{III} - \frac{1+2\bar{\mu}^2}{\xi^2} w'' + \frac{1+2\bar{\mu}^2}{\xi^3} w' + \frac{\bar{\mu}^2(9-\bar{\mu}^2)}{\xi^4} w$$

и пространство «коэффициентов жёсткости» ($b_0^{(4)} \sim b_2^{(4)}$) для определения областей видов модуляции и их границ. В этом же пространстве задаётся «траектория нагружения»

$$F_T(b_0^{T(4)}, b_2^{T(4)}) = 0, \quad \text{или} \quad b_0^{T(4)} = b_0^{T(4)} \{\bar{\lambda}\}, \quad b_2^{T(4)} = b_2^{T(4)} (\bar{\lambda}) \quad (2.23)$$

На рисунке 2.1 представлены области видов модуляции для ЛОДУ четвёртого порядка. Аналогичные области указываются и для ЛОДУ высшего (шестого и выше) порядка.

Граничные линии или линии раздела видов модуляции (ЛРВМ) – квадратичная парабола и прямая (ось ординат)

$$b_0^{M(4)} = \left(\frac{b_2^{M(4)}}{2}\right)^2 \quad \text{и} \quad b_0^{M(4)} = 0 \quad \text{при} \quad -\infty < b_2^{M(4)} < +\infty \quad (2.24)$$

это критические линии первого рода, которые определяют множества точек ветвления – точек перехода от одного вида модуляции к другому.

В каждой из областей существуют семейства изопараметрических ($\bar{\Lambda}_1^2 = const = C^2$) взаимнопересекающихся линий (ИПЛ), выражения которых следуют из соотношений связности (2.13), в частности, для ЛОДУ четвёртого порядка: линий уровня частот (ЛУЧ) – семейства парабол, смещённых по оси абсцисс на величину C^4 , и линии уровня длин волн (ЛУВ) – прямые, параллельные оси абсцисс и смещённые на величину $\bar{\Lambda}^2$

$$b_0^{C(4)} = \left(\frac{b_2^{C(4)}}{2}\right)^2 + C^4 \quad \text{и} \quad b_2^{\Lambda(4)} = \bar{\Lambda}^2 \quad (2.25)$$

в области $\Omega_K : b_0^{(4)} > (b_2^{(4)}/2)^2, -\infty < b_2^{(4)} < +\infty$ «кельвиновских» модуляций (KeT). В областях «бимакдональдских» $\Omega_{MM} : 0 < b_0^{(4)} < (b_2^{(4)}/2)^2, b_2^{(4)} \geq 0$ модуляций ($M \cap M$),

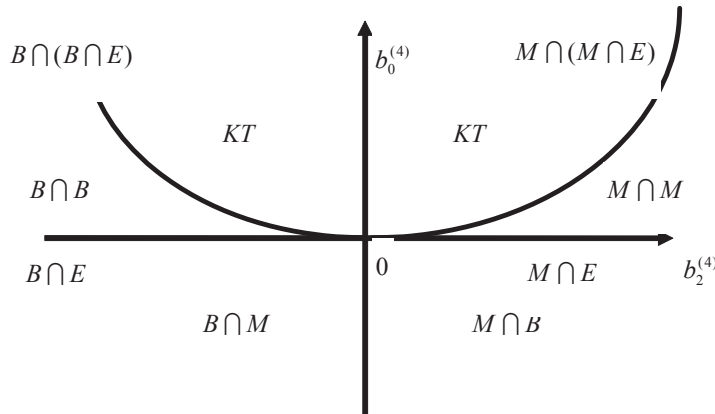


Рисунок 2.1. Области видов модуляции в пространстве «коэффициентов жёсткости» ЛОДУ бесселева типа четвёртого порядка

«бибесселевых» $\Omega_{BB} : 0 < b_0^{(4)} < (b_2^{(4)}/2)^2, b_2^{(4)} \leq 0$ модуляций ($B \cap B$) и в области модуляций «бесслево-макдональдских ($B \cap M + M \cap B$)» $\Omega_{B+M} : 0 > b_0^{(4)}, -\infty < b_2^{(4)} < +\infty$ линии частот ЛУЧ и длин волн ЛУВ - это прямые, смещённые на величину $\bar{\Lambda}_2^2 = C^2$ и касательные линии раздела видов модуляции ЛРВМ.

$$b_0^{K(4)} = C^2 \left(\frac{b_2^{K(4)}}{2} - C^2\right) \quad (2.26)$$

Точки пересечений линий этих семейств образуют множества критических точек второго рода. Следует обратить внимание на сгущенность семейства прямых в окрестности линии раздела видов модуляции (параболы (2.24)): здесь возможны переходы к трём видам модуляции и переходы от одной частоты несущей и модулирующей к другой.

Система краевых условий. Значения параметров сдвига и наклона изопараметрических линий определяются из линейных граничных условий дифференциального типа общего вида записанные в форме:

$$U_m^{(2N-1)}(\bar{d}^{(2N-1)})\{W\}\Big|_{\eta_1}^{\eta_2} = \sum_{n=0}^{N-1} d_{1n,m}^{(2N-1)} E_{1m}^{(n)}\{W\}\Big|_{\eta_1} + \sum_{n=0}^{N-1} d_{2n,m}^{(2N-1)} E_{2m}^{(n)}\{W\}\Big|_{\eta_2} = 0, m = \overline{1, 2N} \quad (2.26)$$

Таблица 2.2

Виды модуляций и монотонностей ОДУ четвёртого порядка

Вид и обозначения модуляции	Параметры структуры	Коэффициент «жёсткости» $b_0^{(4)} = \overline{\Lambda_1^2 \Lambda_2^2}$	Коэффициент «жёсткости» $b_2^{(4)} = \overline{\Lambda_1^2} + \overline{\Lambda_2^2}$	Дифференциальный оператор вида модуляции
Кельвина-Томсона (Ханкеля) КТ	$\overline{\Lambda_{1,2}^2} = \alpha^2 \pm i\beta^2$ $-\infty < \alpha^2 < +\infty$ $\beta^2 \geq 0$	$b_0^{(4)} > (\frac{b_2^{(4)}}{2})^2$	$-\infty < b_2^{(4)} < +\infty$	$[(\nabla^2 + \alpha^2)^2 + \beta^4]\{w\}$ в области $(b_0^{(4)}, b_2^{(4)}) \in \Omega_K$
Макдональда+ (Макдональда* Эйлера) М ∩ (М ∩ Е)	$\overline{\Lambda_1^2} = \overline{\Lambda_2^2} < 0$ $\alpha^2 < 0, \beta^2 = 0$	$b_0^{(4)} = (\frac{b_2^{(4)}}{2})^2$	$0 < b_2^{(4)} < +\infty$	$[(\nabla^2 \nabla^2 - 2 \overline{\Lambda_2^2} \nabla^2 + \overline{\Lambda_1^4})\{w\}]$ на границе раздела областей $(b_0^{(4)}, b_2^{(4)}) \in \Gamma_{M(ME)}$
Макдональда+ Макдональда М ∩ М	$(\overline{\Lambda_1^2} \neq \overline{\Lambda_2^2}) < 0$	$0 < b_0^{(4)} < (\frac{b_2^{(4)}}{2})^2$	$0 < b_2^{(4)} < +\infty$	$[(\nabla^2 - \overline{\Lambda_1^2})(\nabla^2 - \overline{\Lambda_2^2})]\{w\}$ в области $(b_0^{(4)}, b_2^{(4)}) \in \Omega_{MM}$
Макдональда+ Эйлера М ∩ Е	$\overline{\Lambda_1^2} < 0, \overline{\Lambda_2^2} = 0$	$b_0^{(4)} = 0$	$0 < b_2^{(4)} < +\infty$	$[(\nabla^2 - \overline{\Lambda_1^2})\nabla^2]\{w\}$ на границе раздела областей $(b_0^{(4)}, b_2^{(4)}) \in \Gamma_{ME}$
Макдональда+ Бесселя М ∩ В+В ∩ М	$\overline{\Lambda_1^2} > 0, \overline{\Lambda_2^2} < 0$	$b_0^{(4)} < 0$	$-\infty < b_2^{(4)} < +\infty$	$[(\nabla^2 + \overline{\Lambda_1^2})(\nabla^2 - \overline{\Lambda_2^2})]\{w\}$ в области $(b_0^{(4)}, b_2^{(4)}) \in \Omega_{MB} + \Omega_{BM}$
Бесселя+ Эйлера В ∩ Е	$\overline{\Lambda_1^2} > 0, \overline{\Lambda_2^2} = 0$	$b_0^{(4)} = 0$	$-\infty < b_2^{(4)} < 0$	$[(\nabla^2 + \overline{\Lambda_1^2})\nabla^2]\{w\}$ на границе раздела областей $(b_0^{(4)}, b_2^{(4)}) \in \Gamma_{ME}$
Бесселя+ Бесселя В ∩ В	$(\overline{\Lambda_1^2} \neq \overline{\Lambda_2^2}) > 0$	$0 < b_0^{(4)} < (\frac{b_2^{(4)}}{2})^2$	$-\infty < b_2^{(4)} < 0$	$[(\nabla^2 + \overline{\Lambda_1^2})(\nabla^2 + \overline{\Lambda_2^2})]\{w\}$ в области $(b_0^{(4)}, b_2^{(4)}) \in \Omega_{BB}$
Бесселя+ (Бесселя*Эйлера) В ∩ (В ∩ Е)	$\overline{\Lambda_1^2} = \overline{\Lambda_2^2} > 0$ $\alpha^2 > 0, \beta^2 = 0$	$b_0^{(4)} = (\frac{b_2^{(4)}}{2})^2$	$-\infty < b_2^{(4)} < 0$	$[(\nabla^2 \nabla^2 + 2\overline{\Lambda_2^2} \nabla^2 + \overline{\Lambda_1^4})\{w\}]$ на границе раздела областей $(b_0^{(4)}, b_2^{(4)}) \in \Gamma_{BE}$

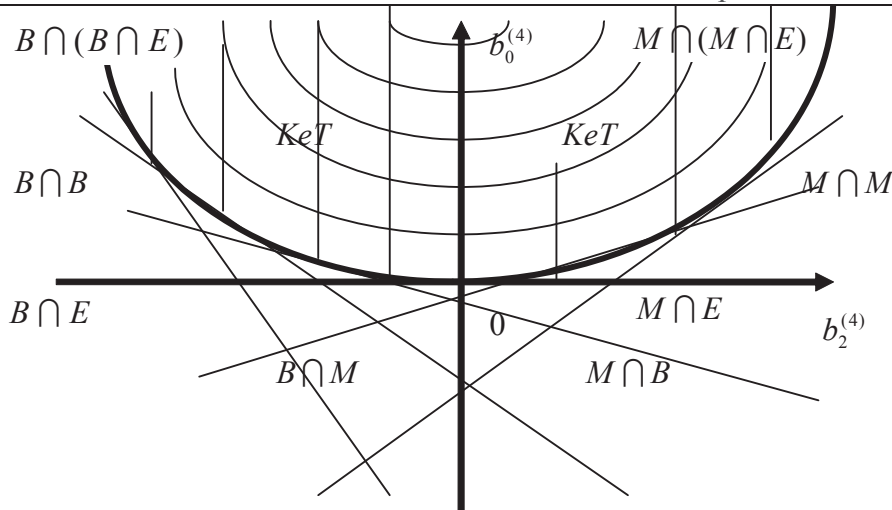


Рисунок 2.2. Семейства изопараметрических (ИПЛ) линий: семейства парабол и наклонных прямых – линии уровня частот (ЛУЧ) и семейство вертикальных прямых – линии уровня длин волн (ЛУВ) в различных областях двухпараметрических видов модуляции ЛОДУ четвертого порядка бесселева типа

Относительно искомой функции $W(\eta)$, которая представляется суммой произведений произвольных постоянных $C_{\pm\bar{\mu}(n)}$ и фундаментальных (ФСР) решений $Z_{\pm\bar{\mu}}(\bar{\Lambda}_n \eta^s / 2s)$

$$W(\eta) = \eta^{2Ns} \sum_{n=1}^N C_{\pm\bar{\mu}(n)} Z_{\pm(n)} \left(\frac{\bar{\Lambda}_n \eta^s}{2s} \right) \quad (2.27)$$

разного типа в каждой из областей видов модуляций. ФСР представляются в форме, пригодной для предельного перехода от одного вида модуляции к другому.

Среди задач анализа собственных форм выделим четыре типа: 1) задача спектрального анализа минимальной несущей и модулирующей частот (или длин волн) и всего спектра частот (или длин волн) осцилляций определённого (заданного) вида модуляции при заданной траектории нагружения; 2) задача анализа собственных форм осцилляций определённого (заданного) вида модуляции при заданной траектории нагружения; 3) задача комбинаторного анализа спектра частот и собственных форм осцилляций различных (не заданных) видов модуляции и произвольных (допустимых) траекториях нагружения и 4) задачи анализа оптимальных траекторий нагружения при заданных (допустимых) видах модуляции, собственных формах и спектре частот (длин волн) осцилляций. К этому следует добавить, что вследствие указанной выше сгущенности изопараметрических линий в окрестности линии раздела видов модуляции возникают вычислительные трудности при определении форм и частот, например, по методу продолжения по параметру, где основным является вопрос о выборе такого параметра и выборе вида модуляции (в окрестности граничной критической линии может быть три вида модуляции и несколько значений частот).

Обобщенная постановка анализа собственных форм. Таким образом, расширенная постановка задач анализа включает: линейное обыкновенное дифференциальное уравнение состояния (1) специального вида (по условиям (2.2)-(2.6)), приводимого с помощью преобразований (2.7)-(2.9) и с учётом значений корней характеристического уравнения (2.12) к каноническому виду (2.14) и к несвязной системе ЛОДУ бесселева типа второго порядка; задание траектории нагружения (2.23); классификации видов модуляций (таблица 2.1); классификации областей видов модуляции и их границ (таблица 2.2); соотношения связности (2.13) «коэффициентов жёсткости» ЛОДУ и структурных параметров – «коэффициентов бesselевых добавок»; классификации критических (2.23)-(2.26) линий - изопараметрических ИПЛ и точек; линейные краевые условия дифференциального типа (2.26); детерминантно – краевые уравнения (ДКУ).

Основная особенность и трудность этих задач состоит в том, что для указанных многопараметрических (по значениям «коэффициентов жёсткости») механических систем высшего (четвёртого и выше) порядка структурных параметров (значений «коэффициентов бесселевых добавок») всегда два и более, а осцилляционных составляющих – фундаментальных решений четыре и более (по паре бесселевых функций на каждый структурный параметр). Трудность, в первую очередь, заключается в «неопределённости», т.е. параметрической зависимости «коэффициентов жёсткости» ЛОДУ (они же коэффициенты характеристических показательных полиномов эйлеровых частей и «коэффициентов бесселевых добавок»). Во вторую очередь, отсутствие аналитических решений для алгебраических полиномов степени выше четвёртой. В третью очередь, отсутствие аналитических решений для трансцендентных детерминантно - краевых уравнений, содержащих бесселевы, тригонометрические и алгебраические функции. И, в четвёртую очередь, форма представления фундаментальной системы (ФСР) решений ЛОДУ бесселева типа должна быть универсальной. В частности, непрерывной по структурным параметрам и обладать свойством непрерывного перехода от одного вида модуляции к другому как в случае простых (некратных параметров), так и в случае кратных.

Детерминантно-краевое уравнение и система краевых условий. Используя представления общего решения краевой задачи (2.16) и (2.26) с учётом представлений (2.18)-(2.21), задача определения собственных чисел сводится к решению детерминантно – краевого (ДКУ) уравнения для однородной (с нулевой правой частью) системы $(2N)$ трансцендентных уравнений с цилиндрическими функциями относительно структурных параметров $\bar{\Lambda}_n$ - коэффициентов КБД

$$D(\bar{\Lambda}_k) = \det \begin{vmatrix} U_1(Z_{\pm\bar{\mu}(1)}(\bar{\Lambda}_1)) & \dots & \dots & U_1(Z_{\pm\bar{\mu}(N-1)}(\bar{\Lambda}_{N-1})) & U_1(Z_{\pm\bar{\mu}(N)}(\bar{\Lambda}_N)) \\ U_2(Z_{\pm\bar{\mu}(1)}(\bar{\Lambda}_1)) & \dots & \dots & U_2(Z_{\pm\bar{\mu}(N-1)}(\bar{\Lambda}_{N-1})) & U_2(Z_{\pm\bar{\mu}(N)}(\bar{\Lambda}_N)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{2N-1}(Z_{\pm\bar{\mu}(1)}(\bar{\Lambda}_1)) & \dots & \dots & U_{2N-1}(Z_{\pm\bar{\mu}(N-1)}(\bar{\Lambda}_{N-1})) & U_{2N-1}(Z_{\pm\bar{\mu}(N)}(\bar{\Lambda}_N)) \\ U_{2N1}(Z_{\pm\bar{\mu}(1)}(\bar{\Lambda}_1)) & \dots & \dots & U_{2N}(Z_{\pm\bar{\mu}(N-1)}(\bar{\Lambda}_{N-1})) & U_{2N}(Z_{\pm\bar{\mu}(N)}(\bar{\Lambda}_N)) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.28)$$

Здесь следует иметь в виду, что в каждой строке (28) длиной $(2N)$ операторы $U_m^{(2N-1)}\{Z_{\pm\bar{\mu}(n)}\}$ относятся к паре цилиндрических функций $Z_{\pm\bar{\mu}(n)}$, а в целом ДКУ (28) содержит N неизвестных искомым структурных параметров $\bar{\Lambda}_n$. К уравнению (28) добавляются $(N-1)$ соотношений связности (2.13), содержащих параметр $\vec{\lambda}$ - внешнюю комбинированную нагрузку, задающую «траекторию нагружения» функцией вида (2.23). Таким образом, разрешающая система (2.13), (2.28) и (2.23) даёт возможность решать задачу определения критических точек на заданной траектории нагружения и соответственно задачу об эволюции собственных форм системы. При решении задач оптимизации по выбору «оптимальной траектории нагружения» приходится прибегать к структурно-комбинаторному анализу собственных форм и собственных чисел для «допустимых» видов модуляции. Ниже в качестве примера рассматривается задача об эволюции собственных форм малых колебаний тонкой линейно упругой (по Гуку) трансверсально-изотропной сплошной круговой пластины при малых колебаниях и малых (по Коши) деформациях.

Задача о собственных осесимметрических формах усечённой круговой тонкой анизотропной усечённой конической оболочки. Геометрические параметры для круговой конической оболочки (коэффициенты Ламэ (A_1, A_2) , главные радиусы (R_1, R_2) кривизн) в системе координат $(\alpha_1 = s, \alpha_2 = \theta)$, связанной с образующей конуса s , исходящей из вершины конуса и наклонённой к оси вращения под углом \mathcal{G} , даются следующими выражениями:

$$A_1 = 1, A_2 = r = s \sin \vartheta, \alpha_1 = s, \frac{\partial}{\partial \alpha_2} = 0, \frac{\partial A_2}{\partial s} = \sin \vartheta, \frac{1}{R_1} = 0, \frac{1}{R_2} = \frac{1}{s} \operatorname{ctg} \vartheta$$

Главные оси анизотропии упругих свойств совпадают с направлениями главных кривизн (по образующей и в окружном направлении).

Уравнения осесимметричных форм свободных колебаний. При свободных установившихся малых колебаниях с постоянной круговой частотой ω система уравнений включает:

- продольных (N_1, N_2) и поперечных (Q_1) отличных от нуля усилий

$$\frac{1}{s} \left[\frac{d(sN_1)}{ds} - N_2 \right] + \frac{Q_1}{R_1} = 0 \quad \frac{1}{s} \left[\frac{d(sQ_1)}{ds} \right] - \frac{N_1}{R_1} - \frac{N_2}{R_2} + q_n = -\rho gh \omega^2 w$$

- изгибающих моментов (M_1, M_2)

$$\frac{1}{s} \left[\frac{d(sM_1)}{ds} - M_2 \right] - Q_1 = 0$$

- соотношения ортотропных линейно упругих (по Гуку) оболочек Кирхгоффа-Лява – изменения кривизн и изгибающих моментов при осесимметричной деформации

$$\chi_1 = -\frac{d^2 w}{ds^2} = -w'', \quad \chi_2 = -\frac{1}{s} \frac{dw}{ds} = -\frac{w'}{s}$$

для радиального и кольцевого моментов

$$M_1 = -D_1 (w'' + \mu_{21} \frac{1}{s} w') \quad M_2 = -D_1 (\mu_{21} w'' + c \frac{1}{s} w')$$

здесь: $D_1 = (E_1 h^3) / (12(1 - \mu_{12} \mu_{21}))$ - цилиндрическая жёсткость оболочки толщиной h , модуля Юнга по образующей E_1 , коэффициента анизотропии $c = E_2 / E_1$ и коэффициентов Пуассона μ_{12}, μ_{21} . Уравнение равновесия изгибающих моментов при отсутствии продольных усилий, записанное в перемещениях, имеет вид, подобный разрешающему уравнению для круговой пластинки (2.28)

$$s^4 w^{IV} + 2s^3 w''' - cs^2 w'' + csw' - \frac{\rho gh \omega^2}{D_1} s^4 w = 0 \quad (2.29)$$

Используя выражения для дифференциальных операторов Эйлера и производных $sw' = D\{w\}$, $s^2 w'' = D(D-1)\{w\}$, $s^3 w''' = D(D-1)(D-2)\{w\}$, $s^4 w^{IV} = D(D-1)(D-2)(D-3)\{w\}$ это уравнение принимает форму

$$[D(D-2)(D-1-\sqrt{c})(D-1+\sqrt{c}) - \lambda^4 s^4]\{w\} = 0, \quad \lambda^4 = (\rho gh \omega^2) / D_1 \quad (2.30)$$

или эквивалентную её, распадающуюся на два независимых уравнения Бесселя второго порядка

$$[D(D-1+\sqrt{c}) + \lambda^2 s^2]\{w_1\} = 0 \quad [D(D-1+\sqrt{c}) - \lambda^2 s^2]\{w_2\} = 0, \quad w = w_1 + w_2 \quad (2.31)$$

Уравнения «краевого эффекта» конической оболочки. К уравнению такого типа также приводятся, следуя [], уравнения «краевого эффекта» при $N_1=0$ и $Q_1 = -N_1 \operatorname{ctg} \vartheta$ - (учитывается связь их с продольными усилиями и первого интеграла системы)

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\eta}{d\xi} - \frac{4}{\xi^2} \eta - \frac{2(1-\mu_{12}\mu_{21})}{\operatorname{tg}^2 \vartheta} \nu = 0 \quad \frac{d^2 \nu}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\nu}{d\xi} - \frac{4c}{\xi^2} \nu + \frac{6}{h^2} \eta = 0 \quad (2.32)$$

здесь использованы подстановки

$$\nu = dw/ds, \quad \eta = sQ, \quad s = \xi^2/2, \quad \xi = \sqrt{2s}, \quad d\xi/ds = 1/\xi \quad \text{и} \quad \frac{d}{ds} = \frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{ds} = \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi}$$

Система после умножения на ξ^2 и использования эйлеровых операторов первого

$D\{\} = \xi \frac{d\{\}}{d\xi}$ и второго $D^2\{\} = \xi \frac{d}{d\xi} (\xi \frac{d\{\}}{d\xi}) = \xi^2 \frac{d^2\{\}}{d\xi^2} + \xi \frac{d\{\}}{d\xi}$ порядков сводится к несвязной системе бесселевых уравнений четвёртого порядка

$$\{[(D-2)^2 - 4](D^2 - 4c) - \frac{12(1 - \mu_{12}\mu_{21})}{h^2} ctg^2 \vartheta s^4\} \{v\} = 0 \quad (2.33)$$

$$\{[(D-2)^2 - 4c](D^2 - 4) - \frac{12(1 - \mu_{12}\mu_{21})}{h^2} ctg^2 \vartheta s^4\} \{v\} = 0 \quad (2.34)$$

или в развёрнутом виде через характеристические показатели

$$[D(D-2)(D-2\sqrt{c})(D+2\sqrt{c}) - \Lambda^4 \xi^4] \{v\} = 0, \quad \Lambda^4 = \frac{12(1 - \mu_{12}\mu_{21})}{h^2} ctg^2 \vartheta \quad (2.35)$$

$$[(D-2-2\sqrt{c})(D-2+2\sqrt{c})(D-2)(D+2) - \Lambda^4 \xi^2] \{\eta\} = 0 \quad (2.40)$$

Характеристические показатели эйлеровых частей бесселевых операторов

$$v_{v1} = -2\sqrt{c}, \quad v_{v2} = 0, \quad v_{v3} = 2\sqrt{c}, \quad v_{v4} = 4, \\ v_{\eta1} = -2, \quad v_{\eta2} = 2 - 2\sqrt{c}, \quad v_{\eta3} = 2, \quad v_{\eta4} = 2 + 2\sqrt{c},$$

разности пар характеристических показателей не удовлетворяют указанному выше условию

$$v_{v3} - v_{v1} = 4\sqrt{c}, \quad v_{v4} - v_{v2} = 4, \quad v_{\eta3} - v_{\eta1} = 4, \quad v_{\eta4} - v_{\eta2} = 4\sqrt{c},$$

поэтому решение этих уравнений уже не может быть выражено через функции Бесселя второго порядка, для его представления используются [27] цилиндрические функции высших порядков.

Уравнения устойчивости усечённой конической оболочки при осевом сжатии и боковом давлении. Полагая в (2.29) изменения кривизн в процессе деформации равными $1/R_1 = \chi_1 = -d^2 w / d\xi^2$ и $1/R_2 = (1/s) ctg \vartheta - (1/s)(dw/ds) - (w/s^2) ctg v$ соответственно и учитывая при этом зависимость мембранных меридианальных усилий $N_1 = (N_0 L) / s$ (где N_0 - концевое меридианальное усилие на границе $s = L$ - большом торце усечённого конуса), имеем

$$s^4 w^{IV} + 2s^3 w''' - cs^2 w'' + csw' + \frac{N_0 L}{D_1} s(s^2 w'' + sw') + \frac{p}{D_1} cgt \vartheta s^3 w = 0 \quad (2.41)$$

Собственные осесимметрические формы малых колебаний круговой пластины.

Уравнения малых колебаний в традиционной форме (Софии Жермен) имеет вид

$$\frac{d^4 W}{d\eta^4} + \frac{2 d^3 W}{\eta d\eta^3} - \frac{c}{\eta^2} \frac{d^2 W}{d\eta^2} + \frac{c}{\eta^3} \frac{dW}{d\eta} - 12(1 - \mu_{12}\mu_{21}) \frac{\rho g R^4 \omega^2}{E_1 h^2} W = 0, \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (2.42)$$

после умножения левой части на η^4 это уравнение принимает каноническую (Эйлерову) форму

$$\eta^4 W^{IV} + 2\eta^3 W''' - c\eta^2 W'' + c\eta W' - \bar{\Lambda}^4 \eta^4 W = 0, \quad \bar{\Lambda}^4 = 12(1 - \mu_{12}\mu_{21}) \rho g \frac{\omega^2 R^4}{E_1 h^2} \quad (2.43)$$

Здесь использованы следующие обозначения : $W = \bar{W} / h$ - относительный прогиб круговой пластинки постоянной толщины h (далее черточка над символом w опускается); $\eta = r/R$ - относительная радиальная координата полярной системы координат, нормированная величиной радиуса R внешнего контура пластинки; E_1 - модуль упругости Юнга материала пластинки в радиальном направлении; $c = E_2 / E_1 = \mu_{21} / \mu_{12}$ - коэффициент ортотропии упругих свойств пластинки как отношение модуля Юнга в кольцевом направлении E_2 к модулю E_1 или соответствующих коэффициентов поперечной деформации Пуассона; ρ - плотность материала пластинки; $g = 980 \text{ cm/cek}^2$ - ускорение силы тяжести; ω - круговая частота

собственных установившихся колебаний.

Используя соотношения $\eta W^l = D_\eta \{W\}$ и $\eta^n W^{(n)} = \prod_{k=1}^n (D_\eta - (k-1))\{W\}$, эйлерова часть уравнения преобразуется в операторную сумму

$$\sum_{n=0}^4 a_n^{(4)} D_\eta^{(n)} \{W\} - \bar{\Lambda}^4 \eta^4 W = 0, \quad a_0^{(4)} = 0; a_1^{(4)} = 2(1-c); a_2^{(4)} = 5-c; a_3^{(4)} = 4; a_4^{(4)} = 1$$

Как видно из структуры ЛОДУ, траекторией нагружения здесь является прямая – ось абсцисс $b_0^{(4)} = \bar{\Lambda}^{(4)}, b_2^{(4)} = 0$, а структурных параметров два: $\bar{\Lambda}_1^2 = \sqrt{|\bar{\Lambda}^{(4)}|}$ и $\bar{\Lambda}_2^2 = -\sqrt{|\bar{\Lambda}^{(4)}|}$, и потому соотношения связности выглядит просто $\bar{\Lambda}_1^2 + \bar{\Lambda}_2^2 = 0$.

Определив для эйлеровой части характеристические показатели как корни векового характеристического уравнения,

$$P^{(4)}(\nu) = \sum_{n=0}^4 a_n^{(4)} \nu^n = 0 \Rightarrow \nu_1 = 0, \nu_2 = 1 + \sqrt{c}, \nu_3 = \nu_1 + (1 - \sqrt{c}), \nu_4 = \nu_2 + (1 - \sqrt{c}) \quad (2.44)$$

запишем эйлерову часть уравнение состояния в форме операторного произведения

$$\prod_{n=1}^4 (D_\eta - \nu_n) \{W\} - \bar{\Lambda}^4 \eta^4 W = 0 \quad (2.45)$$

Учитывая, что разности соответствующих пар $(\nu_3 - \nu_1 = \nu_4 - \nu_2 = 1 - \sqrt{c} = 2s)$ показателей, а также разности $(\nu_2 - \nu_1 = \nu_4 - \nu_3 = 2\mu)$ в каждой паре есть величины постоянные, и суммы этих пар $(\nu_1 + \nu_2 = 2\sigma)$ и $(\nu_3 + \nu_4 = 2\sigma + 4s)$ отличаются на величину, пропорциональную номеру пары $(2 * 2s)$, эйлерову часть как произведение представим в форме:

$$\prod_{k=1}^2 [(D_\eta - \sigma - 2s(k-1))^2 - \mu^2] \{W\} - \bar{\Lambda}^4 \eta^4 W = 0 \quad (2.46)$$

Свойство сдвига каждой пары характеристических показателей даёт возможность представить эйлерову часть в виде «степени» или порядка дифференциального оператора со сдвигом (введенное выше обобщённое преобразование Ломмеля - Ватсона), а именно

$$\eta^4 [[\eta^{-2s} ((D_\eta - \sigma)^2 - \mu^2)] [\eta^{-2s} ((D_\eta - \sigma - 2s)^2 - \mu^2)]] \{W\} = \eta^{4s} [\eta^{-2s} (D_\eta - \sigma)^2 - \mu^2]^2 \{W\}$$

поэтому в этом случае справедлива следующая операторная форма исходного уравнения четвёртого порядка Бесселя типа

$$\eta^{4s} [\eta^{-2s} (D_\eta - \sigma)^2 - \mu^2]^2 \{W\} - \bar{\Lambda}^4 \eta^4 W = 0$$

Представление исходного уравнения в виде операторной «разности квадратов» позволяет перейти к соответствующему операторному произведению суммы и разности операторов

$$\left\{ \eta^{2s} [\eta^{-2s} (D_\eta - \sigma)^2 - \mu^2] - \bar{\Lambda}^2 \eta^2 \right\} \left\{ \eta^{2s} [\eta^{-2s} (D_\eta - \sigma)^2 - \mu^2] + \bar{\Lambda}^2 \eta^2 \right\} \{W\} = 0,$$

а затем и к эквивалентной системе двух несвязных операторных уравнений

$$\left\{ \eta^{2s} [\eta^{-2s} (D_\eta - \sigma)^2 - \mu^2] \pm \bar{\Lambda}^2 \eta^2 \right\} \{W^\pm\} = 0$$

так что общее решение есть сумма двух независимых решений $W = W^+ + W^-$, каждое из которых (после умножения и преобразований) – уравнение Бесселя в общей форме

$$[(D_\eta - \sigma)^2 - \mu^2] \pm \bar{\Lambda}^2 \eta^2 \{W^\pm\} = 0 \quad (2.47)$$

Преобразуя по Ломмелю компоненты $W^\pm(\eta) = \eta^\sigma Z^\pm(\eta)$ (по свойству смещения операторов на величину $\sigma = (1 + \sqrt{c})/2$), имеем в канонической форме относительно функций Бесселя ($Z^+(\eta) = Z_{\pm\mu}^B(\bar{\Lambda}\eta)$) и Макдональда ($Z^-(\eta) = Z_{\pm\mu}^M(i\bar{\Lambda}\eta)$) индекса $\mu = (1 + \sqrt{c})/2$ со-

ответственно при $\bar{\Lambda} = \sqrt[4]{|\Lambda^4|}$

$$[(D_\eta^2 - \mu^2) \pm \bar{\Lambda}^2 \eta^2] \{Z_{\pm\mu}^{B,M}\} = 0 \quad (2.48)$$

Решения (пары соответствующих цилиндрических функций) $Z_{\pm\mu}^B(\eta)$, $Z_{\pm\mu}^M(\eta)$ даются при не целых порядках (индексах) $\mu \neq n \in Z$ обобщёнными степенными рядами

- осциллирующие функции Бесселя - Вебера - Неймана первого рода действительного аргумента индекса $\mu \neq n \in Z$

$$Z_{\pm\mu}^B(\eta) = \eta^{\pm\mu} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\bar{\Lambda}\eta}{2} \right)^{2n} \frac{1}{n! \prod_{k=1}^n (\pm\mu + k)} \right) \quad (2.49)$$

- не осциллирующие функции Макдональда - Бесселя второго рода мнимого аргумента индекса $\mu \neq n \in Z$

$$Z_{\pm\mu}^M(\eta) = \eta^{\pm\mu} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\bar{\Lambda}\eta}{2} \right)^{2n} \frac{1}{n! \prod_{k=1}^n (\pm\mu + k)} \right) \quad (2.50)$$

Общее решение есть сумма произведений частных фундаментальных решений

$$W(\eta) = \eta^\sigma (C_1 Z_\mu^B(\bar{\Lambda}\eta) + C_2 Z_{-\mu}^B(\bar{\Lambda}\eta) + C_3 Z_\mu^M(\bar{\Lambda}\eta) + C_4 Z_{-\mu}^M(\bar{\Lambda}\eta)) \quad (2.51)$$

и произвольных постоянных интегрирования $C_n, n = 1, 2, 3, 4$, определяемых из краевых условий рассмотренных ниже двух видов в центре пластины

- центр закреплён: прогиб в центре равен нулю $W(0) = 0$ и изгибающий радиальный момент $M_1(0) \neq 0$ и перерезывающее усилие ограничены и отличны от нуля $Q_1(0) \neq 0$, и при этом перерезывающее усилие в центре и на внешнем контуре связаны соотношениями $Q_1(0) = 2\pi Q_1(1)$, вытекающими из уравнений равновесия в целом, (угол поворота $W'(0) \equiv 0$ равен нулю тождественно)

$$\begin{aligned} M_1(0) &= -D_1 \left(W''(\eta) + \mu_{21} \frac{1}{\eta} W'(\eta) \right) \Big|_{\eta=0} \neq 0 \\ Q_1(0) &= -D_1 \left(W'''(\eta) + \frac{1}{\eta} W''(\eta) - \frac{c}{\eta^2} W'(\eta) \right) \Big|_{\eta=0} \neq 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

при этом следует, что $C_1 = -C_3$ (при выводе этого соотношения используется представление системы фундаментальных решений в форме обобщённого степенного ряда, где учитываются первые два - три слагаемых, а остальные при $\eta \rightarrow 0$ обращаются в нуль);

- центр свободен: перерезывающее усилие в центре и на внешнем контуре равно нулю $Q_1(0) = Q_1(1) = 0$

$$\begin{aligned} Q_1(0) &= -D_1 \left(W'''(\eta) + \frac{1}{\eta} W''(\eta) - \frac{c}{\eta^2} W'(\eta) \right) \Big|_{\eta=0} = 0 \\ Q_1(1) &= -D_1 (W'''(1) + W''(1) - cW'(1)) = 0 \end{aligned} \quad (2.53)$$

в этом случае первого условия следует, что $C_2 = -C_4$, а из второго - равновесие пластины в целом;

- и одного вида на внешнем контуре - жёсткого заземления внешней границы

$$W(1) = 0, \quad W'(1) = 0 \quad (2.54)$$

Соответствующие трансцендентные детерминантно - краевые уравнения $D(\bar{\Lambda}) = 0$

графически в окрестности оси ординат $\bar{\Lambda}$ представлялись отрезками кривых, корни которых определялись методом половинного деления по заданной погрешности отклонения от нуля, равной $\Delta D \sim 10^{-6}$. По вычисленным значениям частот определены при различных значениях коэффициента анизотропии (на рис. 2.3-2.4 приведены формы для четырёх значений частот при $c = 0.5$)

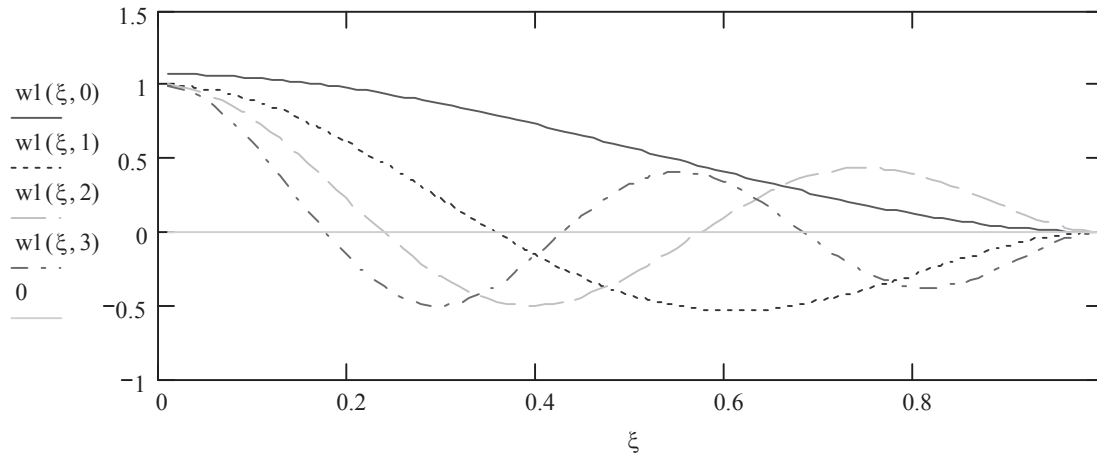


Рисунок 2.3. Собственные формы малых колебаний сплошной круговой анизотропной пластинки с жёстко закреплённым внешним контуром и свободным центром при различных значениях собственных частот и значении $c=0.5$

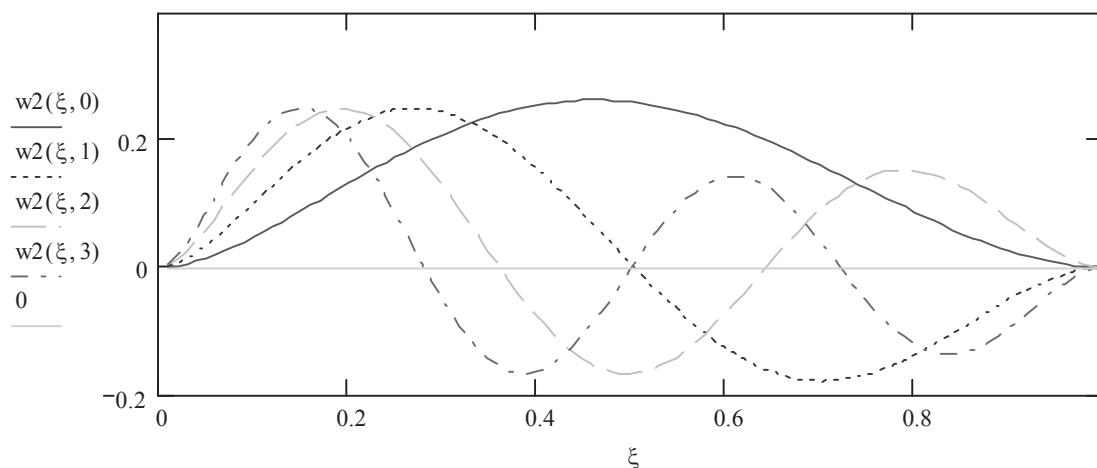


Рисунок 2.4. Собственные формы малых колебаний сплошной круговой анизотропной пластинки с жёстко закреплённым внешним контуром и защемлённым центром при различных значениях собственных частот и значении $c=0.5$

Выводы

Введенное обобщение преобразования Ломмеля-Томсона позволяет выделить (классифицировать тип) коммутативные ЛОДУ высшего порядка бесселева типа, которые сводятся несвязной системе «стандартных» ЛОДУ бесселева типа второго порядка. В новой (обобщённой) постановке, дополненной выражениями «соотношений связности» между «коэффициентами бесселевых добавок» или «коэффициентами жёсткости» и «структурными параметрами» и указанием «траектории нагружения», позволяют учесть все возможные осцилляционные собственные формы круговых анизотропных тонких пластин при малых собственных колебаниях и устойчивости при действии радиальных усилий.

Практика вычислений собственных форм показала, что при определении частот достаточно ограничиться двумя-тремя знаками после запятой. При значении $c=1$ (изотропная пластина) полученное решение совпадает с известным (см., например, [1, 8, 9]).

Литература

1. Вольмир А.С.. Устойчивость упругих систем. -М.: Наука, 1967. -984 с.
2. Кан С.Н. Строительная механика оболочек. –М.: Машиностроение, 1966. -508.
3. Пановко Я.Г. Устойчивость и колебания упругих систем.–М.: Наука, 1967. – 420 с.
4. Кильчевский Н.А., Никулинская С.Н. Об осесимметричной форме потери устойчивости круговой цилиндрической оболочки.// Прикл. механика, 1965, т.1, № 11, с. 1-6.
5. Григолюк Э.И., Кабанов В.В.. Устойчивость оболочек. -М.: Наука, 1978.-352 с.
6. Григолюк Э.И., Лопаницын Е.А. О методе непрерывного продолжения по параметру. // Доклады РАН, 1994. Т. 335. № 5. с. 95- 99.
7. Матвеев Е.А., Фролов А.Б. Конечные прогибы цилиндрических оболочек перед потерей устойчивости под действием равномерного внешнего давления.// Известия МГТУ «МАМИ» № 2 (6), 2008. с. 152-157.
8. Lorenz R.//Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, v.52, Leipzig.: 1908, s. 1706.
9. Тимошенко С.П. К вопросу о деформациях и устойчивости цилиндрической оболочки.// Вестн. о-ва технол., 1914, т.21, с.785-792.
10. Король Е.З. К определению собственных чисел и собственных форм для краевых задач со многими параметрами./ Избранные проблемы прочности современного машиностроения.// Сборник научных статей, посвящённый восьмидесяти пятилетию члена-корреспондента Российской академии наук Эдуарда Ивановича Григолюка (1923-2005).- М.: ФИЗМАТЛИТ. 2008.-204 с. (с.124-149).
11. Король Е.З. К определению собственных частот малых продольных и поперечных колебаний тонких ортотропных круговых пластин. // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 2. С. 163- 174.
12. Король Е.З. Новые методы операторного интегрирования обобщённых эйлеровых и бесселевых уравнений $(N+2M)$ -го порядка. // Проблемы машиностроения и надёжности машин. 2003. № 6. с. 8-21.
13. Король Е.З. Эволюция гиперболо-гармонических модулированных осесимметрических форм цилиндрической оболочки при комбинированной траектории нагружения и критические характеристические линии. // Проблемы машиностроения и автоматизации. -2-10.- № 1. с. 93-101.
14. Король Е.З. Бигармонические модулированные осесимметрические формы цилиндрических оболочек и критические линии и точки траектории нагружения по линейной теории. // Известия МГТУ МАМИ № 1(9), 2010. с. 185-198.
15. Король Е.З. Обобщённая постановка задач определения собственных осесимметрических форм цилиндрической оболочки при нагружении осевой силой и давлением. // Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвящённого 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина (Москва, 20-21 января 2011 года). / Под. ред. проф. И.А. Кийко, проф. Г.Л. Бровко, проф. Р.А. Васина.-М.: Издательство Московского университета, 2011. с. 372-378.
16. Король Е.З. К определению критических траекторий и точек при анализе осесимметрических модулированных форм цилиндрических оболочек по линейной теории.// Известия Тульского государственного университета. Естественные науки Механика. 2010. Вып.2. с. 73-85.
17. Король Е.З. Операторный и операторно - рекуррентный методы интегрирования обобщённых эйлеровых и бесселевых уравнений порядка $(N+2M)$. Избранные проблемы современной механики. Том 2./ Под ред. академика В.А. Садовниченко. –М.: Издательство Московского университета. 2011. с. 243-257.
18. Король Е.З. Обобщённые эйлеровы и бесселевы уравнения. Операторные методы интегрирования./ Избранные проблемы прикладной механики и математики.// Сборник научных статей кафедры «Прикладная и вычислительная математика», посвящённый восьмидесятилетию чл.-корр. РАН Э.И. Григолюка. –М.: МГТУ «МАМИ». 2003. с. 172-207.

19. Коллатц Л. Задачи на собственные значения.—М.: Наука, 1968.- 503 с.
20. Король Е.З. К решению краевых задач продольно-поперечного изгиба орторопных круговых пластин на упругом основании. // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 6. с. 995-1007.
21. Коренев Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука. 1971.-287 с.
22. Король Е.З. Операторные методы интегрирования эйлеровых и бесселевых уравнений $(N+2M)$ -го порядка. // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2001. №
23. Кузнецов Д.С. Специальные функции. М.: Высшая школа. 1965.-272 с.
24. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Основы теории специальных функций.М.: Наука. 1974.-303 с.
25. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. М.: Наука. 1978. – 319 с.
26. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. ч.2. М.: Физматлит. 1963. 327с.
27. Бейтмен Т., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные полиномы. М.: Наука. 1976. – 375 с.
28. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М.: Физматлит. 1961 – 459 с.