Решение задачи бифуркации цилиндрической оболочки с учетом сложного характера деформирования в момент потери устойчивости при сложном докритическом нагружении

д.т.н. проф. Охлопков Н.Л., к.т.н. доц. Соколов С.А., Черемных С.В., к.т.н. Александров М.Ю.
ТвГТУ, ООО "Стандарт проект"
8(4822) 52-63-63, stepan_1986@bk.ru

Аннотация. Рассматривается задача бифуркации тонкостенной круговой цилиндрической оболочки с учетом сложного характера деформирования в момент потери устойчивости при сложном докритическом нагружении осевой сжимающей силой и крутящим моментом в девиаторной плоскости деформаций А.А. Ильюшина $Э_1 - Э_3$.

Ключевые слова: *пластичность, устойчивость, сложное нагружение, бифуркация, оболочка*

Решение задачи строится на основе теории неупругих систем В.Г. Зубчанинова. Используется условие несжимаемости материала и условие однородности напряженного состояния в оболочке до момента потери устойчивости. Задача решается в геометрически линейной постановке.

Для решения задачи бифуркации оболочки при сложном комбинированном докритическом нагружении в каждой точке траектории деформации необходимо знать значения компонент напряженного состояния. Таким образом, задача состоит из двух частей: построение образа процесса нагружения материала и собственно решение задачи бифуркации.

Уравнения связи напряжений и деформаций в момент потери устойчивости оболочки и при построении образа процесса нагружения материала принимаем в соответствии с определяющими соотношениями гипотезы компланарности, которые в скоростях принимают вид [2]

$$\dot{S}_{ij} = N\dot{Э}_{ij} + (\sigma' - N\tau)\dot{S}\frac{S_{ij}}{\sigma}, \ (i, j = 1,2,3), \tag{1}$$

где: $\sigma' = \dfrac{d\sigma}{dS} = P\tau$; $\tau = \cos\vartheta_1$; $Э_{ij} = e_{ij}$; S_{ij} - компоненты тензора-девиатора напряжений;

$Э_{ij}$ - компоненты тензора-девиатора деформаций.

Здесь $\dfrac{d\sigma}{dS}$, N - определяющие функции пластичности, ϑ_1 - угол сближения ($\cos\vartheta_1 = \hat{\sigma}\cdot\hat{p}_1$), S - длина дуги траектории деформации. Символ с точкой наверху означает диффиринцирование по обобщенному параметру времени $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{d}{dS}\cdot\dfrac{dS}{dt}$.

Для определяющих функций пластичности N и $\dfrac{d\sigma}{dS}$ принимаем аппроксимации, предложенные В.Г.Зубчаниновым [1].

$$N = 2G_p + \left[2G - 2G_p\right]\left(\frac{1-\cos\vartheta_1}{2}\right)^q,$$
$$\frac{d\sigma}{dS} = 2G_k - \left[2G + 2G_k\right]\left(\frac{1-\cos\vartheta_1}{2}\right)^p \tag{2}$$

где: G, G_k, G_p - модуль сдвига, касательный и секущий модули сдвига материала соответственно.

Для определения угла сближения ϑ_1 имеем:

$$\dot{\vartheta} = -\frac{\sigma \sin \vartheta_1}{N} - \chi_1, \qquad (3)$$

где: σ - модуль вектора напряжений, χ_1 - кривизна траектории.

Уравнения (1) и (3) имеют вид уравнений задачи Коши, которую решаем методом Рунге-Кутта. Зависимость $\sigma = \Phi(Э) = \Phi(S)$ полагаем универсальной для простого нагружения. За параметр обобщенного времени t на участках сложной траектории деформирования принимаются различные, монотонно возрастающие параметры процесса.

Таким образом, в каждой точке траектории деформаций определяем компоненты напряженного состояния и далее решаем бифуркационную задачу.

Цилиндрическую оболочку считаем «длинной», шарнирно подкрепленной по торцам. Решение задачи бифуркации сводим к решению задачи о собственных числах [1].

В результате окончательно получаем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -\sigma K_* i^2 / g_1 E + i\Omega_1^{**} / 2 g_1 S_* = \lambda_m^2 \left[\theta + 3K_* \left(\Omega_2^{**} - \Omega_1^{**} N_2^* / N_1^*\right) / 4 g_1\right] \\ e = -2i / S_* \lambda_m^2 - \left(\theta_1 \Omega_1^{**} + N_2^* K_*\right) / N_1^* \end{cases}, \qquad (4)$$

где:

$$K_* = \sigma_{11}^* + \sigma_{22}^* r^2 - 2\sigma_{12}^* r,\ \ S_* = S_{11}^* r^2 + S_{22}^* + 2S_{12}^* r,\ \ \sigma_{ij}^* = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma},\ \ S_{ij}^* = \frac{S_{ij}}{\sigma}, r = \frac{n}{\lambda_m},$$

$$g_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{3}{2}\left(N_3^* - \frac{N_2^{*2}}{N_1^*}\right),\ \ \theta = \left(1 + r^2\right)^2 - \frac{K_*^2}{2},\ \ \theta_1 = \frac{2\left(1 + r^2\right)^2}{3S_*^2} - 1, \qquad (5)$$

$$2G \cdot N_m^* = \int_{-1}^{1} N\left(z^*\right)^{m-1} dz^*,\ \ 2G \cdot \Omega_m^{**} = \int_{-1}^{1} \sigma' S^* \left(z^*\right)^{m-1} dz^*,\ \ z^* = \frac{z}{h}.$$

где $i = 3R / h$ - гибкость оболочки.

Решение бифуркационной задачи позволяет для заданной комбинации полуволн m, n изогнутого состояния вычислить критическую гибкость оболочки i в зависимости от значения модуля вектора напряжений σ в момент потери устойчивости.

Эксперименты показывают [1], что в момент потери устойчивости пластин и оболочек происходит излом траекторий деформирования, т.е. процесс потери устойчивости реализуется в условиях сложного нагружения материала. Для определяющих функций пластичности N и $\frac{d\sigma}{dS}$ принимаем аппроксимации В.Г. Зубчанинова (2) [1].

В большинстве выполненных ранее решений сложное нагружение оболочки в момент потери устойчивости учитывалось в упрощенной постановке. Полагалось, что в зоне пластической догрузки $\vartheta_1 = 0^0 (\tau = 1)$, в зоне упругой разгрузки $\vartheta_1 = 180^0\ (\tau = -1)$ и искалась координата z_p^* границы раздела данных зон. В предлагаемом варианте решения задачи функции пластичности N и $\frac{d\sigma}{dS}$ изменяются непрерывно, в зависимости от τ и z. Координату границы раздела зон определять нет необходимости, интегралы Ω_m^{**} и N_m^* в (5) определяются численно по методу Симпсона. При этом оболочка по толщине разбивается на 20 слоев (дальнейшее увеличение числа слоев, как показывают расчеты, не приводит к существенному уточнению решения).

В качестве нулевого приближения на каждом этапе нагружения оболочки используется решение при чистопластической бифуркации, когда излом траектории не учитывается. В этом случае $\tau = 1$, тогда $\dot{S}^* = (e + z^* k_*)$ интегралы Ω_m^{**}, N_m^* (5) принимают значения [1]

$$N_1^* = 2(1-\varpi), N_2^* = 0, N_3^* = 2(1-\varpi)/3,$$
$$\Omega_1^{**} = 2e(1-\lambda), \Omega_2^{**} = 2(1-\lambda)k_*/3, g_1 = 1-\omega, \qquad (6)$$
$$e = -2i/(S_* \lambda_m^* \nu_2), \nu_2 = 1 + \nu_1(1-\lambda)/(1-\varpi)$$

где ϖ - параметр пластичности А.А.Ильюшина, λ - параметр разупрочнения материала.

При известных σ, ϖ, λ с учетом (6) можно вычислить критическую гибкость оболочки в нулевом приближении $i^{(0)}$

$$i^{(0)} = \lambda_m \sqrt{-\left[2g_1\nu + (1-\lambda)k_*^2\right] / \left[4(1-\lambda)/(S_*^2 \lambda_m^2 \nu_2\right] + 2\sigma k_* / E}\,. \qquad (7)$$

Затем в нулевом приближении находим $f_1^{(0)} = -\Omega_1^{**}/k_*$ и определяем параметры деформаций $e^{(0)}$, $\varepsilon_1^{(0)}$, $\varepsilon_2^{(0)}$, $\varepsilon_3^{(0)}$ из уравнений [1]

$$N_1\varepsilon_1 = k_* f_1\left[S_{11}^* + \left(1-2r^2\right)/(3S_*)\right] + N_2^*\left(S_{11}^* k_* - 1\right) + S_{11}^* N_1^* e$$
$$N_1\varepsilon_2 = k_* f_1\left[S_{22}^* + \left(1-2r^2\right)/(3S_*)\right] + N_2^*\left(S_{22}^* k_* - r^2\right) + S_{22}^* N_1^* e\,. \qquad (8)$$
$$N_1\varepsilon_3 = k_* f_1\left[S_{12}^* + \left(1-r/S_*\right)\right] + N_2^*\left(S_{12}^* k_* - r\right) + S_{12}^* N_1^* e$$

Далее в первом приближении вычисляем для каждого сечения оболочки параметр излома траектории $\tau^{(1)}$, скорость деформаций $\dot{S}^{*(1)}$

$$\left(\dot{S}^*\right)^2 = 2\left[P_{ee}^0 - zhP_{ek}^0 + z^{*2}h^2P_{kk}^0/4\right]\tau = \left(e + z^* k_*\right)\left(\dot{S}^*\right)^{-1}, \qquad (9)$$

где:

$$P_{ee}^0 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2,$$
$$P_{ek}^0 = \left[-\left(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right) - r^2\left(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1\right) + 2\varepsilon_3 r\right]/h, \qquad (10)$$
$$P_{kk}^0 = 4\left(1 + r^2\right)^2/h^2,$$
$$e = \sigma_{11}^*\varepsilon_1 + \sigma_{22}^*\varepsilon_2 + 2\sigma_{12}^*\varepsilon_3. \qquad (11)$$

Далее численно определяем значения интегралов Ω_m^{**} и N_m^*, вычисляем $i^{(1)}$, $e^{(1)}$ и рассчитываем невязку по параметру e: $\Delta e^{(i)} = e^{(i)} - e^{(i-1)}$. В случае, если на данном шаге Δe больше некоторого малого наперед заданного ξ, методом половинного деления вводим корректуру в e. Итерационный процесс продолжаем до тех пор, пока невязка Δe будет меньше ξ.

Расчеты выполнены также на основе теории устойчивости А.А.Ильюшина, в которой используются определяющие соотношения теории квазипростых процессов [1]

Расчеты сопоставлены с экспериментальными результатами, полученными на автоматизированном комплексе СН-ЭВМ в лаборатории кафедры «Сопротивление материалов, теории упругости и пластичности» Тверского государственного технического университета [3]. Эксперименты реализованы на тонкостенных круговых цилиндрических оболочках, изготовленных из стали 45.

В качестве примера рассмотрены трехзвенные траектории, представляющие собой: растяжение до заданного уровня R на первом звене; 1,25 витка траектории постоянной кривизны радиуса R на втором звене; сжатие до потери устойчивости при поддержании постоянного уровня деформации кручения Э3 на третьем звене (рисунок 1).

Расчеты выполнены для нескольких процессов при R = 0.5, 1 и 1.5 %. При данных параметрах процесса потеря устойчивости оболочки на криволинейной части траектории не происходит. Показатели степеней p и q, входящие в состав аппроксимаций [2], определяющих функций пластичности при теоретическом построении образа процесса нагружения материала, принимались p=0.6 и q=1.35.

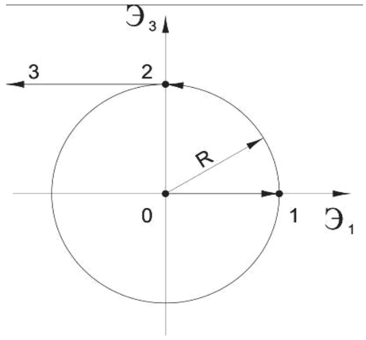

Рисунок 1. Траектории деформирования образцов из стали 45: R – радиус дуги окружности

На рисунках 2-7 приведены графики критических параметров напряжений и деформаций, построенные как огибающие кривых устойчивости, вычисленных при различных комбинациях параметров волнообразования m, n.

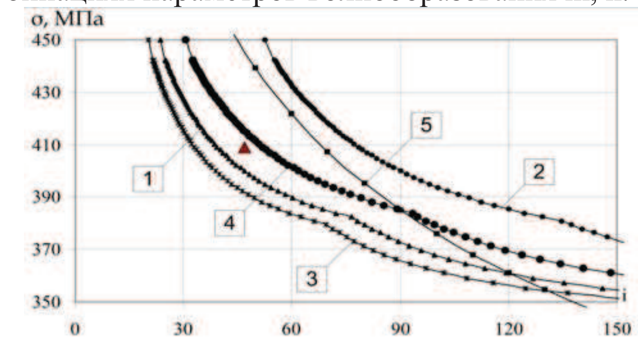

Рисунок 2. Критические параметры напряжений (R=0,5%)

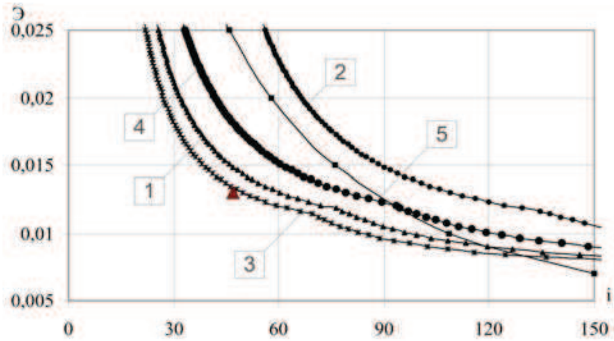

Рисунок 3. Критические параметры деформаций (R=0,5%)

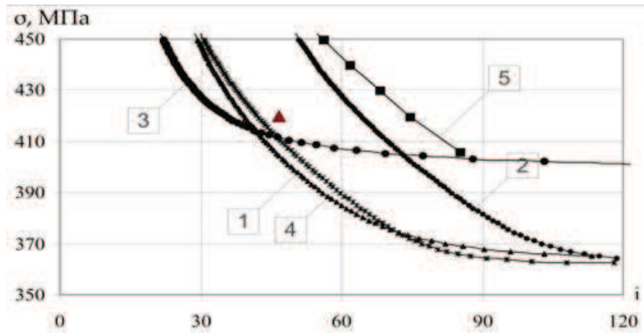

Рисунок 4. Критические параметры напряжений (R=1%)

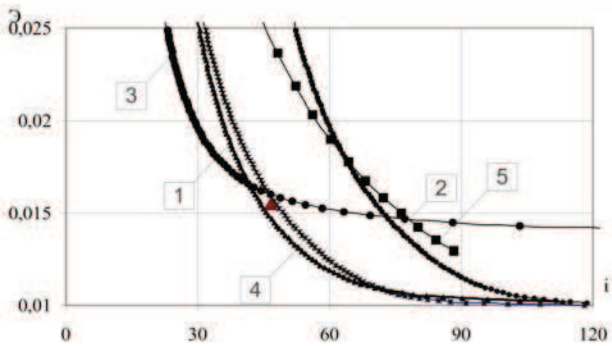

Рисунок 5. Критические параметры деформаций (R=1%)

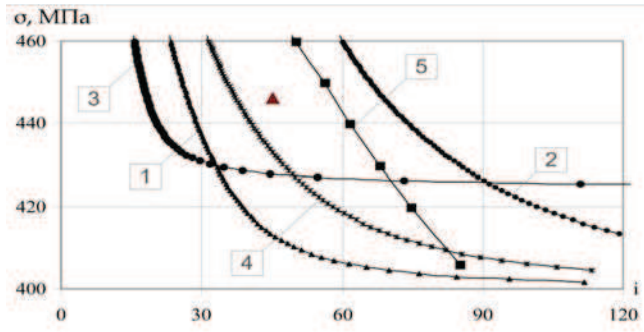

Рисунок 6. Критические параметры напряжений (R=1,5%)

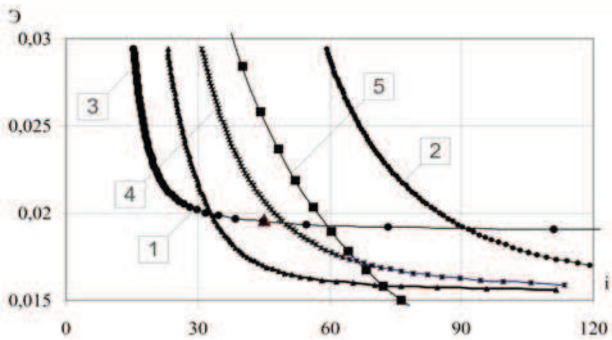

Рисунок 7. Критические параметры деформаций (R=1,5%)

Цифрами на рисунках обозначено: 1 – расчет, выполненный с учетом сложного характера нагружения в момент потери устойчивости при показателях степеней p=0.6 и q=1.35 (соответствуют значениям, принятым при решении задачи построения образа процесса нагружения); 2 – расчет при показателях степеней p=1 и q=1; 3 – расчет при показателях степеней p=0.55 и q=1,35; 4 – расчет при p=0.7 и q=1.35; 5 - расчет по теории устойчивости А.А. Ильюшина с учетом разгрузки материала в момент потери устойчивости. Треугольниками отмечены экспериментальные результаты.

На рисунке 8 в девиаторной плоскости деформаций показаны зоны устойчивых состояний оболочки. Цифры и условные обозначения соответствуют предыдущим рисункам.

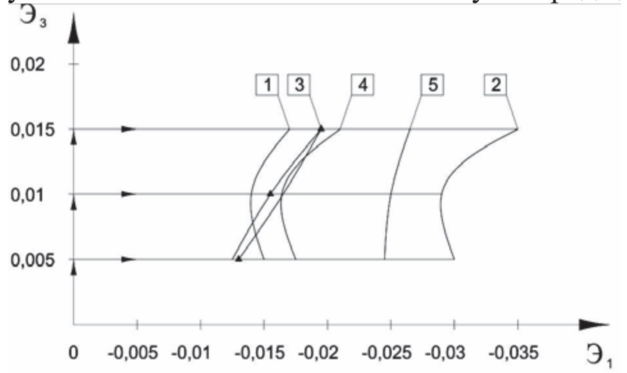

Рисунок 8. Зоны устойчивых состояний в плоскости $Э_1 - Э_3$ для оболочек из стали 45

Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод, что определяющие соотношения гипотезы компланарности и аппроксимации определяющих функций пластичности В.Г.Зубчанинова, учитывающие изменение угла сближения в процессе деформирования (2), позволяют получить достоверное решение задачи бифуркации круговой цилиндрической оболочки при сложном докритическом нагружении.

На рассмотренных процессах реальный учет сложного характера нагружения оболочки в момент потери устойчивости позволяет существенно уточнить решение в сопоставлении с расчетами, например, по теории устойчивости А.А. Ильюшина, которые дают завышенные значения критических напряжений и деформаций.

Показатели степеней p и q в аппроксимациях определяющих функций пластичности (2) при сложных докритических процессах не могут приниматься равными p=q=1, как например в [4], и зависят от реализуемой траектории. При этом влияние параметра p на расчетные значения критических напряжений и деформаций проявляется в большей степени, чем изменение параметра q.

На рассматриваемых траекториях для параметров p и q аппроксимаций (2) в решении задачи устойчивости можно принимать значения, полученные при решении задачи построения образа процесса нагружения материала.

Расчеты выполнены также для ряда иных траекторий сложного докритического нагружения [3].

Литература

1. Зубчанинов В.Г. Устойчивость и пластичность. Т. 1. Устойчивость. / В.Г. Зубчанинов. – М.: Физматлит, 2007. – 448 с.
2. Зубчанинов В.Г. Математическая теория пластичности: Монография. / В.Г. Зубчанинов. – Тверь: ТГТУ, 2002. – 300 с.
3. Зубчанинов В.Г. Экспериментальная пластичность: Монография. Книга 1. Процессы сложного деформирования. / В.Г. Зубчанинов, Н.Л. Охлопков, В.В. Гараников. – Тверь: ТГТУ, 2003. – 172 с.
4. Зубчанинов В.Г. Об устойчивости тонкостенных оболочек при сложном докритическом нагружении. / В.Г. Зубчанинов, Н.Л. Охлопков // Известия вузов. Строительство. - 1997. - № 6. - с.27-34.