О моделировании процесса колебаний пластины в сверхзвуковом потоке газа

к.ф.-м.н. доц. Показеев В.В., Кийко С.И., к.ф.-м.н. доц. Кудрявцев Б.Ю.
Университет машиностроения
8 (495) 223-05-23, vm@mami.ru

Аннотация. Исследуется взаимосвязь параметров натурного и модельного процессов, возникающих в рамках известных математических моделей панельного флаттера упругих и вязкоупругих пластин.

Ключевые слова: *флаттер, сверхзвуковой поток газа, упругая пластина*

Насколько можно судить по известной литературе, вопрос, вынесенный в заголовок статьи, до сих пор не обсуждался, хотя представляет несомненный интерес, поскольку является основой при разработке теории эксперимента. В предлагаемой работе в рамках известных математических моделей флаттера упругих и вязкоупругих пластин устанавливаются параметры подобия и предлагаются некоторые возможные параметры моделирования.

1. Постановка задачи

Представим себе тонкую пластину, которая в плоскости xOy занимает некоторую область S, ограниченную кусочно-гладким контуром ∂S. С одной («верхней») стороны пластина обтекается плоско-параллельным сверхзвуковым потоком газа с невозмущенными параметрами p_0, ρ_0, a_0, $\bar{\upsilon} = \upsilon \bar{n}_0$, $\bar{n}_0 = (\cos\theta, \sin\theta)$ – давлением, плотностью, скоростью звука, вектором скорости $\bar{\upsilon}$; θ – угол между вектором $\bar{\upsilon}$ и осью Ox. Материал пластины – линейный вязкоупругий, связь между напряжением и деформацией имеет вид:

$$\sigma = E_0\left(\varepsilon(t) - \varepsilon_0\int_0^t \Gamma(t-\tau)\varepsilon(\tau)\,d\tau\right) \equiv E_0(1-\varepsilon_0\Gamma^*(t))\varepsilon(t) \qquad (1.1)$$

Здесь E_0 – мгновенный модуль, ε_0 – параметр вязкости. В дальнейшем изложении будем принимать ядро релаксации $\Gamma(t)$ в простейшем виде: $\Gamma(t) = \exp(-\beta t)$, где β – величина, обратная времени релаксации.

Уравнение колебаний пластины имеет вид [1]:

$$D_0(1-\varepsilon_0\Gamma^*(t))\Delta^2 w + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \Delta p \qquad (1.2)$$

Здесь $D_0 = E_0 h^3/(12(1-\nu^2))$, ρ, ν – плотность и постоянный коэффициент Пуассона материала пластины, h – ее толщина, w – прогиб, Δp – давление аэродинамического взаимодействия между колеблющейся пластиной и потоком (избыточное давление). Варианты выражений для Δp будут приведены ниже. Уравнение (1.2) дополняется однородными граничными условиями на контуре ∂S.

2. Упругая пластина

Уравнение движения в этом случае следует из (1.2) при $\varepsilon_0 = 0$

$$D_0\Delta^2 w + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \Delta p\,. \qquad (2.1)$$

Для избыточного давления Δp примем обобщенную формулу поршневой теории [2]

$$\Delta p = -\frac{\gamma p_0}{a_0}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + \upsilon\bar{n}_0\,\mathrm{grad}\,w\right). \qquad (2.2)$$

Здесь γ – показатель политропы газа. После подстановки (2.2) в (2.1) получим

$$D_0\Delta^2 w+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\gamma p_0}{a_0}\left(\frac{\partial w}{\partial t}+\upsilon\overline{n}_0\,\mathrm{grad}w\right)=0\cdot \tag{2.3}$$

Приведем это уравнение к безразмерному виду, используя характерные значения параметра процесса. Таковыми являются: ℓ_0 – характерный размер области S; h – толщина пластины; E_0, ν, ρ или E_0, ν, $c_0^2=E/\rho$ – свойства материла пластины; $t_0=\ell_0/a_0$ – характерное время процесса; параметры невозмущенного потока. Введем безразмерные координаты $x_1=x/\ell_0$, $y_1=y/\ell_0$ и время $t_1=t/t_0$ (в дальнейшем индексы опустим); в этих обозначениях уравнение (2.3) примет вид

$$\Delta^2 w+a_2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+a_1\frac{\partial w}{\partial t}+a_1 M\,\overline{n}_0\,\mathrm{grad}w=0\cdot \tag{2.4}$$

Здесь $M=\upsilon/a_0$ – число Маха, $a_2=\dfrac{12(1-\nu^2)\ell_0^2 a_0}{c_0 h^2}$, $a_1=\dfrac{12(1-\nu^2)\gamma p_0\ell_0^3}{E_0 h^3}$.

Представим теперь два процесса – натуральный и модельный, будем считать, что в обоих процессах участвуют геометрически подобные пластины с одинаковыми граничными условиями. Если окажется, что для натурного и модельного процессов все безразмерные коэффициенты в уравнении (2.4) и однородных граничных условиях совпадут, то это будет означать, что с математической точки зрения процессы колебаний пластины станут тождественными, а с физической, – что в соответствующие моменты времени в соответствующих точках модели и натуры все безразмерные характеристики совпадут. Такие процессы называют подобными; сформулированные выше условия подобия являются необходимыми.

Установим достаточные условия моделирования. Модельный процесс (другими словами, лабораторный или промышленный эксперимент, в котором возможны измерения) удобно проводить, используя материал натурного процесса. Принимая это условие и полагая, что параметры невозмущенного потока в натуре и модели совпадают, нетрудно установить, что достаточным условием полного моделирования будет равенство $(\ell_0/h)_m=(\ell_0/h)_n$ – здесь и в дальнейшем натурные и модельные параметры снабжены индексами «n» и «m» соответственно. Легко показать, что граничные условия не выявят новых требований и будет выполнено равенство $M_m=M_n$, которое сохранится и для критических значений M . Пересчет физического времени (или частоты колебаний $\omega=1/t$) с модели на натуру проводится по правилу: $t_m=k\,t_n$, $\omega_n=k\omega_m$, $k=\ell_{0,n}/\ell_{0,m}$ – масштаб моделирования.

Рассмотрим теперь случай, когда избыточное давление Δp определяется линеаризованной теорией потенциального сверхзвукового обтекания. Потенциал возмущения φ удовлетворяет уравнению [3]

$$\Delta\varphi=\frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{2}{a_0}\left(M_x\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}+M_y\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial t}\right)+M_x^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+M_y^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+2M_xM_y\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \tag{2.5}$$

которое дополняется граничным условием

$$x,y\in S:\ \left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0}=\frac{\partial w}{\partial t}+\upsilon\overline{n}_0\,\mathrm{grad}w \tag{2.6}$$

и условием затухания при $z\to\infty$.

Избыточное давление Δp определяется соотношением

$$\Delta p=-\rho_0\left.\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\upsilon\overline{n}_0\,\mathrm{grad}\varphi\right)\right|_{z=0} \tag{2.7}$$

Положим $w = hW(x,y)\exp(\omega t)$, $\varphi = ha_0 f(x,y)\exp(\omega t)$ и введем, как и ранее, безразмерные координаты, из (2.5)–(2.7) получим

$$\Delta f = \Omega^2 f + 2\Omega\left(M_x \frac{\partial f}{\partial x} + M_y \frac{\partial f}{\partial y}\right) + M_x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + M_y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2M_x M_y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad ,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 = \Omega W + M\bar{n}_0 \mathrm{gradW}, \quad \Delta p = -\frac{\gamma h p_0}{\ell_0}\left(\Omega f + M\bar{n}_0 \mathrm{grad} f\right).$$

Уравнение (2.1) колебаний пластины примет после этого вид

$$\Delta^2 W + a_2 \Omega^2 W + a_1\left(\Omega f + M\bar{n}_0 \mathrm{grad} f\right) = 0$$

Здесь параметры a_1, a_2 – те же, что и в предыдущем случае. Из вида последних уравнений следует, что условия моделирования, сформулированные ранее, остаются достаточными для полного моделирования в рассмотренном случае.

3. Вязкоупругая пластина

Запишем уравнение колебаний (1.2) вязкоупругой пластины при условии, что Δp задается выражением (2.2)

$$D_0(1-\varepsilon_0\Gamma^*)\Delta^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\gamma p_0}{a_0}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + \upsilon \bar{n}_0 \mathrm{grad} w\right) = 0 \qquad (3.1)$$

Приведем (3.1) к безразмерному виду, принимая для безразмерных координат прежние выражения, а для безразмерного времени – замену $t_1 = \beta t$. В этих обозначениях из (3.1) получим

$$(1-\lambda_1\Gamma^*)\Delta^2 w + \frac{12(1-\nu^2)\ell_0^2\lambda_2^2}{h^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} + \frac{12(1-\nu^2)\gamma p_0 \ell_0 c_0 \lambda_2}{a_0 E_0}\frac{\partial w}{\partial t_1} +$$
$$+\frac{12(1-\nu^2)\gamma p_0 \ell_0^3}{E_0 h^3} M\bar{n}_0 \mathrm{grad}\, w = 0 \qquad (3.2)$$

здесь обозначено $\lambda_1 = \varepsilon_0 / \beta$, $\lambda_2 = \beta\ell_0 / c_0$.

Дальнейший анализ проведем при условии, что параметры потока p_0 и $a_0 = (\gamma p_0 / \rho)^{1/2}$ одинаковы в модельном и натурном процессах, а скорости потока υ – различны. Задачу моделирования сформулируем следующим образом: подобрать такой материал модели, чтобы уравнения (3.2), записанные для натуры и модели были тождественными. Введем масштаб моделирования по линейному размеру ℓ_0: $k = \ell_{0,n} / \ell_{0,m}$, тогда нетрудно показать, что достаточные условия моделирования будут следующими:

1) $\left(\dfrac{\varepsilon_0}{\beta}\right)_m = \left(\dfrac{\varepsilon_0}{\beta}\right)_n$,

2) $\left(\dfrac{\beta_m}{\beta_n}\right) = \left(\dfrac{c_{0,m}}{c_{0,n}}\right)^{3/2} \cdot \left(\dfrac{E_{0,n}}{E_{0,m}}\right)^{1/2} \cdot k$,

3) $m = \dfrac{h_n}{h_m} = \left(\dfrac{c_{0,n} E_{0,m}}{c_{0,m} E_{0,n}}\right)^{1/2} \cdot k$,

характеристики модельного материала $E_{0,m}$, $c_{0,m} = (E_{0,m} / \rho_m)^{1/2}$ могут быть произвольными. При этих условиях скорость потока M_m в модели и, соответственно, критическая скорость флаттера определяется соотношением $M_m = \dfrac{E_{0,m}}{E_{0,n}} \cdot \dfrac{k^3}{m^3} \cdot M_n$.

4. Упругая пластина, составляющая часть поверхности тонкого клина

Пусть имеется тонкий клиновидный профиль, обтекаемый без угла атаки газом с большой сверхзвуковой скоростью. Вектор скорости потока направлен по оси клина (перпендикулярно кромке). Согласно [4, 5] уравнение колебаний пластины, находящейся на поверхности клина, будет иметь вид

$$\Delta^2 w + A_2 M^2 x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_1 M^2 \frac{\partial w}{\partial x} + A_0 M \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

где: $A_0 = \dfrac{8k\sqrt{3(1-\nu^2)}\,pl_0{}^2}{(\gamma+1)a_0 h^2 \sqrt{E\rho}} tg\beta(1+2\varepsilon - \varepsilon a^*(tg\beta))$, $a^* = 1 + 2/((\gamma-1)M^2 tg^2\beta)$, $\varepsilon = \dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}$,

$$A_1 = \frac{48\gamma(1-\nu^2)\,pl_0{}^3}{Eh^3(\lambda+1)} tg\beta(1+2\varepsilon - \varepsilon a^*(tg\beta)),\ A_2 = \frac{12\gamma(1-\nu^2)\,pl_0{}^3}{Eh^3} tg(\beta)(1-\varepsilon\frac{12a^*(tg\beta)}{\gamma(1+\gamma)}),$$

α - угол полураствора клина, наклон ударной волны β определяется из уравнения $tg\beta = tg\alpha + \varepsilon a^*(tg\beta)tg\beta.$

Очевидно, достаточным условием полного моделирования будет опять же равенство $(\ell_0 / h)_m = (\ell_0 / h)_n$. Более слабыми условиями будут

$$\left(\frac{\sqrt[3]{E}}{\rho}\right)_m = \left(\frac{\sqrt[3]{E}}{\rho}\right)_n,\ m = k \cdot \sqrt[3]{\frac{E_m}{E_n}}.$$

Остальные параметры, в том числе числа Маха, предполагаются одинаковыми.

Выводы

Установлены критерии подобия процессов и предложены некоторые возможные параметры моделирования. Результаты работы могут оказаться полезными при организации экспериментальных исследований по панельному флаттеру упругих и вязкоупругих пластин.

Литература

1. Кийко И.А., Показеев В.В. Колебания и устойчивость вязкоупругой полосы в потоке газа // Докл. РАН. 2005. Т. 401. № 3. с. 342-344.
2. Ильюшин А.А., Кийко И.А. Новая постановка задачи о флаттере пологой оболочки // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 3. с. 167-171.
3. Основы газовой динамики. Сб. статей под ред. Г.Эммонса. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 702 с.
4. Кудрявцев Б.Ю. Флаттер прямоугольной пластины, составляющей часть плоскости тонкого клина, обтекаемого потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью. Деп. в ВИНИТИ, 2002, № 1085-В2002.
5. Кудрявцев Б.Ю. Исследование задачи о флаттере прямоугольной пластины в уточненной постановке. Труды московской конференции молодых ученых «Научно-технические проблемы развития Московского мегаполиса», Москва, 2002, с. 60.