Еще о наилучших приближениях аналогами «своих» и «не своих» гиперболических крестов

к.ф-м.н. доц. Пустовойтов Н.Н.
Университет машиностроения

Аннотация. В статье изучаются наилучшие приближения классов периодических функций многих действительных переменных с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности аналогами «своих» и «не своих» гиперболических крестов. Мажоранта содержит степенные множители в разных степенях и логарифмические множители в разных степенях.

Ключевые слова: *периодические функции многих переменных, наилучшие приближения, смешанный модуль непрерывности, аналоги «своих» и «не своих» гиперболических крестов.*

§1. Определения. Ранее полученные результаты.

Будем рассматривать функции от d вещественных переменных $f(x)=f(x_1,\dots,x_d)$, имеющие период 2π по каждой переменной.

Смешанный модуль непрерывности порядка l от функции $f(x)$ определим следующим образом:

$$\Omega^{(l)}(f,t)_q=\sup_{\substack{|h_j|\le t_j\\ j=1,\dots,d}}\left\|\Delta_h^l f(x)\right\|_q,$$

где $t=(t_1,\dots,t_d),\quad h=(h_1,\dots,h_d)$, разность $\Delta_h^l f(x)$ означает взятие разности порядка l с шагом h_j по переменной x_j, $j=1,\dots,d$, норма равна:

$$\|f(x)\|_q=\left(\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\pi_d}|f(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}},\quad \pi_d=[-\pi;\pi]^d,\quad 1<q<\infty.$$

Введем функцию $\Omega(t)=\Omega(t_1,\dots,t_d)$ для $t_j\ge 0,\ j=1,\dots,d$ следующей формулой:

$$\Omega(t)=\begin{cases}\prod_{j=1}^d t_j^{r_j}(\log\frac{1}{t_j})_+^{-b_j} & \text{при}\quad t_j>0,\ j=1,\dots,d,\\ 0,\quad \prod_{j=1}^d t_j=0.\end{cases}\tag{1}$$

Здесь $0<r_j<l,\quad b_j$ - произвольные действительные числа, логарифмы берутся (как и всюду ниже) по основанию 2, а также при $\tau>0$ полагаем $(\log\tau)_+=\max\{\log\tau;1\}$.

Рассмотрим классы функций

$$H_q^\Omega=\left\{f(x_1,\dots,x_d): f(x)\in L_q^0(\pi_d),\Omega^{(l)}(f;t)_q\le\Omega(t)\right\},$$

где запись $f(x)\in L_q^0(\pi_d)$ означает, что норма $\|f(x)\|_q$ конечна и

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx_j=0,\quad j=1,\dots,d,\quad \Omega(t)\ \text{задается равенством (1).}$$

Мы будем рассматривать случай $1<q<\infty$.

Через $|A|$ будем обозначать количество элементов множества А. Мы будем рассматривать порядковые неравенства и порядковые равенства. Запись $A(N) << B(N)$ означает, что $A(N) \le C \cdot B(N)$, где C не зависит от N. Запись $A(N)\ B(N)$ означает, что $A(N) << B(N)$ и $B(N) << A(N)$.

Рассмотрим множества, порожденные поверхностями уровня функции $\Omega(t)$ из (1). Обозначим

$$ж(N)=\left\{ s=(s_1,\ldots,s_d): s_j \in \mathbb{N},\ j=1,\ldots,d,\quad \Omega(2^{-s}) \ge \frac{1}{N} \right\},$$

где: $2^{-s} = (2^{-s_1},\ldots,2^{-s_d})$.

То есть: $ж(N)=\left\{ s=(s_1,\ldots,s_d): s_j \in \mathbb{N},\ j=1,\ldots,d,\quad \prod_{j=1}^{d} 2^{r_j s_j} s_j^{b_j} \le N \right\}.$

$$Cж(N) = N^d \setminus ж(N).$$

Положим $Q(N) = \bigcup_{s\in ж(N)} \rho(s)$,

где $\rho(s) = \left\{ k=(k_1,\ldots,k_d): \left|k_j\right| \in N,\quad 2^{s_j-1} \le \left|k_j\right| < 2^{s_j},\quad j=1,\ldots,d \right\}.$

Также рассмотрим множества

$$\Gamma(N) = \left\{ k=(k_1,\ldots,k_d): \left|k_j\right| \in \mathbb{N},\ j=1,\ldots,d,\ \Omega\left(\frac{1}{\left|k_1\right|},\ldots,\frac{1}{\left|k_d\right|}\right) \ge \frac{1}{N} \right\},$$

то есть: $\Gamma(N) = \left\{ k=(k_1,\ldots,k_d): \left|k_j\right| \in \mathbb{N},\ j=1,\ldots,d,\ \prod_{j=1}^{d} \left|k_j\right|^{r_j} (\log\left|k_j\right|)_+^{b_j} \le N \right\}.$

Можно легко показать, что $\Gamma(N) \subset Q(2^{ed} N) \subset \Gamma(2^{ed} N)$.

Откуда следует, что $\left|\Gamma(N)\right| \asymp \left|Q(N)\right|$.

Также нам понадобятся множества

$$\theta(N) = \left\{ s=(s_1,\ldots,s_d): s_j \in \mathbb{N},\ j=1,\ldots,d,\quad \frac{1}{2^l N} \le \Omega(2^{-s}) < \frac{1}{N} \right\}.$$

В работе [1] доказано, что $\left|\theta(N)\right| \asymp (\log N)^{d-1}$.

Отметим, что функция $\Omega(t)$ из (1) удовлетворяет условиям (S) и (S_l) (см. [1]). Поэтому для рассматриваемых здесь классов H_q^{Ω} верна теорема о представлении (см. [2]).

Теорема А. Для того, чтобы $f(x)$ из $L_q^0(\pi_d)$ принадлежала классу H_q^{Ω} необходимо и достаточно при $1 < q < \infty$, чтобы $\left\| \delta_s(f,x) \right\|_q << \Omega(2^{-s})$ для всех векторов $s=(s_1,\ldots,s_d)$ с натуральными компонентами, и при $1 \le q \le \infty$ $\left\| A_s(f,x) \right\|_q << \Omega(2^{-s})$,

где: $\delta_s(f,x) = \sum_{k\in\rho(s)} \hat{f}(k)\, e^{i(k,x)}$,

$\hat{f}(k)$ - коэффициенты Фурье функции $f(x)$,

$A_s(f,x)$ обозначает свертку $f(x)$ с ядром $A_s(x) = 2^d \prod_{j=1}^{} (V_{2^{s_j-1}}(x_j) - V_{2^{s_j-2}}(x_j))$, порожденным ядрами Валле –Пуссена $V_m(\tau)$ порядка $2m-1$, кроме того, считаем

$V_{2^{-1}}(\tau) \equiv 1$.

Мы будем рассматривать наилучшие приближения $E_{Q(N)}(f)_q$ функций $f(x)$ в норме L_q тригонометрическими полиномами со спектром из $Q(N)$.

Также обозначим
$$E_{Q(N)}(H_q^{\Omega})_q = \sup_{f \in H_q^{\Omega}} E_{Q(N)}(f)_q .$$

Из теоремы 1 работы [1] вытекает

Теорема Б. При $1 < q < \infty$ $E_{Q(N)}(H_q^{\Omega})_q \asymp \frac{1}{N}(\log N)^{\frac{d-1}{q_0}}$,

где $q_0 = \min\{q; 2\}$.

При изучении приближений функций из классов С.М. Никольского H_q^r, которые совпадают с H_q^{Ω} при $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, выяснилось (см. [3, 4]), что вместо тригонометрических полиномов со спектром из множеств $Q_n^r (r = r_1 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \le \ldots \le r_d)$, порожденных поверхностями уровня функции $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, лучше брать множества $Q_n^{r'}$. Дело в том, что множества $Q_n^{r'}$ шире, чем Q_n^r, но $\left|Q_n^{r'}\right| \asymp \left|Q_n^r\right|$, а наилучшие приближения $E_{Q_n^{r'}}(H_q^r)_q$ по порядку лучше, чем $E_{Q_n^r}(H_q^r)_q$. Этот эффект позволяет улучшить оценки поперечников. Множества Q_n^r и $Q_n^{r'}$ называются «своими» и «не своими» гиперболическими крестами соответственно.

Эффект «не своих» гиперболических крестов для $\Omega(t)$ из (1) при условии $r_1 = r_2 = \ldots = r_d$ рассмотрен автором ранее (см. [5]). В данной работе мы изучим этот эффект в случае различных r_j.

Автором доказана (см. [5])

Теорема В. Пусть $\Omega(t)$ задано равенством (1), причем $r_1 = r_2 = \ldots = r_d = r$, $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_d$. Тогда количество элементов множества $\Gamma(N)$ по порядку равно $N^{\frac{1}{r}} \cdot \phi_1(N, r, b_1, \ldots, b_d)$, где: $\phi_1^{(d)}(N, r, b_1, \ldots, b_d)$ равно $(\log N)^{-1} (\log\log N)^{\nu-1}$ при $b_1 = \ldots = b_\nu = r < b_{\nu+1} \le \ldots \le b_d$; $(\log N)^{-\frac{b_1}{r} - \ldots - \frac{b_\nu}{r} + (\nu-1)} (\log\log N)^{\mu}$, при $b_1 \le \ldots \le b_\nu < r = b_{\nu+1} = \ldots = b_{\nu+\mu} < b_{\nu+\mu+1} \le \ldots \le b_d$; $(\log N)^{-\frac{b_1}{r}}$ при $r \le b_1 \le \ldots \le b_d$, $b_2 > r$.

Если в случае $r_1 = \ldots = r_d = r$ некоторые b_j больше r, то возникает эффект «не своих» гиперболических крестов.

В случае $r = r_1 = \ldots = r_d$ роль «не своих» гиперболических крестов играют множества

$$Q'(N) = \bigcup_{s \in} \rho(s), \quad \text{где:} \quad ж`(N) = \left\{ s = (s_1, \ldots, s_d) : s_j \in \mathbb{N}, j = 1, \ldots, d, \prod_{j=1}^{d} 2^{r s_j} s_j^{b_j'} \le N \right\},$$

причем $b_j = b_j'$, $j = 1, \ldots, \nu$, $r < b_j' < b_j$, $j = \nu + 1, \ldots, d$.

В случае $r<b_1=\ldots=b_\nu<b_{\nu+1}\le\ldots\le b_d$ берем $b_j'=b_1,\ j=1,\ldots,\nu;\ b_1<b_j'<b_j,\ j=\nu+1,\ldots,d.$

Автором доказана (см. [5])

Теорема Г. Пусть $1<q<\infty,\ q_0=\min\{q;2\}$. Тогда

$$E_{Q'(N)}(H_q^\Omega)_q \asymp \frac{1}{N}\phi_2(N,d,q_0,b,b'),$$ где $\phi_2(N,d,q_0,b,b')$ по порядку равно:

1) $(\log N)^{\frac{d-1}{q_0}-(b_{\nu+1}-b_{\nu+1}')-\ldots-(b_d-b_d')}$, если $b_{\nu+1}-b_{\nu+1}'\le\ldots\le b_d-b_d'<\dfrac{1}{q_0}$;

2) $(\log N)^{\frac{\nu+\mu-1}{q_0}-(b_{\nu+1}-b_{\nu+1}')-\ldots-(b_{\nu+\mu}-b_{\nu+\mu}')}(\log\log N)^{\frac{d-\mu-\nu}{q_0}}$, если $b_{\nu+1}-b_{\nu+1}'\le\ldots\le b_{\nu+\mu}-b_{\nu+\mu}'<b_{\nu+\mu+1}-b_{\nu+\mu+1}'=\ldots=b_d-b_d'=\dfrac{1}{q_0}$;

3) $(\log N)^{\frac{\nu+\mu-1}{q_0}-(b_{\nu+1}-b_{\nu+1}')-\ldots-(b_{\nu+\mu}-b_{\nu+\mu}')}(\log\log N)^{\frac{\xi}{q_0}}$, если

$$b_{\nu+1}-b_{\nu+1}'\le\ldots\le b_{\nu+\mu}-b_{\nu+\mu}'<b_{\nu+\mu+1}-b_{\nu+\mu+1}'=\ldots=b_{\nu+\mu+\xi}-b_{\nu+\mu+\xi}'==\frac{1}{q_0}<b_{\nu+\mu+\xi+1}-b_{\nu+\mu+\xi+1}'\le\ldots\le b_d-b_d';$$

4) $(\log N)^{\frac{\nu-1}{q_0}}(\log\log N)^{\frac{\mu}{q_0}}$, если $b_{\nu+1}-b_{\nu+1}'=\ldots=b_{\nu+\mu}-b_{\nu+\mu}'=\dfrac{1}{q_0}<b_{\nu+\mu+1}-b_{\nu+\mu+1}'\le\ldots\le b_d-b_d'$;

5) $(\log N)^{\frac{\nu-1}{q_0}}$, если $\dfrac{1}{q_0}<b_{\nu+1}-b_{\nu+1}'\le\ldots\le b_d-b_d'$;

6) $(\log N)^{\frac{\nu+\mu-1}{q_0}-(b_{\nu+1}-b_{\nu+1}')-\ldots-(b_{\nu+\mu}-b_{\nu+\mu}')}$, если $b_{\nu+1}-b_{\nu+1}'\le\ldots\le b_{\nu+\mu}-b_{\nu+\mu}'<\dfrac{1}{q_0}<b_{\nu+\mu+1}-b_{\nu+\mu+1}'\le\ldots\le b_d-b_d'$.

Замечание. Как отмечено в [5], при $q=1,\infty$ верна оценка сверху $E_{Q'(N)}(H_q^\Omega)_q<<\dfrac{1}{N}\phi_2(N,d,1,b,b')$.

Как видно из теоремы Г, определенные различия в показателях логарифмических множителей порождают эффект «не своих» гиперболических крестов.

Сформулируем лемму, доказанную в [5]. Эта лемма использовалась при доказательстве теоремы Г, и она нам также понадобится при доказательстве новых теорем.

Лемма А. Для суммы $\sigma=\sum\limits_{s\in\theta(N)}\prod\limits_{j=1}^{d}s_j^{-\gamma_j}$ верны следующие порядковые равенства (считаем $\gamma_1\le\ldots\le\gamma_d$):

если $\gamma_1\le\ldots\le\gamma_d<1$, то $\sigma\asymp(\log N)^{d-1-\gamma_1-\ldots-\gamma_d}$;

если $\gamma_1\le\ldots\le\gamma_\nu<\gamma_{\nu+1}=\ldots=\gamma_d=1$, то $\sigma\asymp(\log N)^{\nu-1-\gamma_1-\ldots-\gamma_\nu}(\log\log N)^{d-\nu}$;

если $\gamma_1\le\ldots\le\gamma_\nu<\gamma_{\nu+1}=\ldots=\gamma_{\nu+\mu}=1<\gamma_{\nu+\mu+1}\le\ldots\le\gamma_d,\ \nu+\mu\le d$, то $\sigma\asymp(\log N)^{\nu-1-\gamma_1-\ldots-\gamma_\nu}(\log\log N)^{\mu}$;

если $\gamma_1=\ldots=\gamma_\nu=1<\gamma_{\nu+1}\le\ldots\le\gamma_d$, то $\sigma\asymp\dfrac{(\log\log N)^{\nu-1}}{\log N}$;

если $1<\gamma_1\le\ldots\le\gamma_d$, то $\sigma\asymp(\log N)^{-\gamma_1}$;

если $\gamma_1\le\ldots\le\gamma_\nu<1<\gamma_{\nu+1}\le\ldots\le\gamma_d$, то $\sigma\asymp(\log N)^{\nu-1-\gamma_1-\ldots-\gamma_\nu}$.

§2. Новые результаты

Рассмотрим теперь мажоранту смешанных модулей непрерывности порядка l из (1) с различными r_j. Будем считать, что $r=r_1=\ldots=r_\eta<r_{\eta+1}\le\ldots\le r_d$, $1\le\eta\le d$, $0<r\le r_d<l$, $b_1\le\ldots\le b_\nu\le r<b_{\nu+1}\le\ldots\le b_\eta$, $1\le\nu\le\eta$, b_j - произвольные действительные числа при $j=\eta+1,\ldots,d$.

В этом случае теорема Б дает следующую оценку:

$$E_{Q(N)}(H_q^\Omega)_q \asymp \frac{1}{N}(\log N)^{\frac{d-1}{q_0}}$$

$Q(N)$, определенные выше, - аналоги «своих» гиперболических крестов. Аналогами «не своих» гиперболических крестов будут множества

$$Q''(N)=\bigcup_{s\in ж``(N)}\rho(s),$$

где: $ж``(N)=\left\{ s=(s_1,\ldots,s_d): s_j\in\mathbb{N},\ j=1,\ldots,d,\quad \prod_{j=1}^{d}2^{r_j'' s_j}s_j^{b_j''}\le N\right\}$,

причем $r_j''=r,\quad j=1,\ldots,\eta\quad r<r_j''<r_j,\quad j=\eta+1,\ldots,d$,

$$b_j''=b_j,\quad j=1,\ldots,\nu,\quad r<b_j''<b_j,\quad j=\nu+1,\ldots,\eta;$$

в случае $r<b_1=\ldots=b_\nu<b_{\nu+1}\le\ldots\le b_\eta$ берем $b_j''=b_1$, $j=1,\ldots,\nu$, $b_1<b_j''<b_j$, $j=\nu+1,\ldots,\eta$, b_j'' любые при $j=\eta+1,\ldots,d$.

<u>Теорема 1.</u> Пусть $\Omega(t)$ задается (1), причем $r=r_1=\ldots=r_\eta<r_{\eta+1}\le\ldots\le r_d$, $b_1\le\ldots\le b_\eta$. Тогда количество элементов множества $Q(N)$ по порядку равно: $N^{\frac{1}{r}}\bullet\phi_1(N,r,b_1,\ldots,b_\eta)$, где функция $\phi_1(N,r,b_1,\ldots,b_\eta)$ см. в формулировке теоремы В с заменой *d* на η.

Доказательство:

Будем оценивать $\left|\Gamma_+(N)\right|$,

где $\Gamma_+(N)=\left\{k=(k_1,\ldots,k_d): k_j\in\mathbb{N},\ j=1,\ldots,d,\quad \prod_{j=1}^{d}k_j^{r_j}(\log k_j)_+^{b_j}\le N\right\}$.

Понятно, что это даст доказываемое порядковое равенство. Введем следующие множества:

$$\Gamma_+^{(\eta)}(N)=\left\{k=(k_1,\ldots,k_\eta): k_j\in\mathbb{N},\ j=1,\ldots,\eta,\quad \prod_{j=1}^{\eta}k_j^{r_j}(\log k_j)_+^{b_j}\le N\right\}.$$

Получим оценку сверху:

$$\left|\Gamma_+(N)\right| \asymp \sum_{\substack{(k_{\eta+1},\ldots,k_d):\\ k=(k_1,\ldots,k_d)\in\Gamma_+(N)}}\left|\Gamma_+^{(\eta)}\left(\frac{N}{\prod_{j=\eta+1}^{d}k_j^{r_j}(\log k_j)_+^{b_j}}\right)\right| \asymp \text{(по теореме В с заменой } d \text{ на } \eta)$$

$$\sum_{\substack{(k_{\eta+1},\dots,k_d):\\ k\in\Gamma_+(N)}} \left(\frac{N}{\prod\limits_{j=\eta+1}^{d} k_j^{r_j}(\log k_j)_+^{b_j}}\right)^{\frac{1}{r}} \cdot \phi_1\left(\frac{N}{\prod\limits_{j=\eta+1}^{d} k_j^{r_j}(\log k_j)_+^{b_j}}, r, b_1,\dots,b_\eta\right) <<$$

$$<< \left|\Gamma_+^{(\eta)}(N)\right| \cdot \sum_{\substack{(k_{\nu+1},\dots,k_d):\\ k\in\Gamma_+(N)}} \frac{\phi_1\left(\dfrac{N}{\prod\limits_{j=\eta+1}^{d} k_j^{r_j}(\log k_j)^{b_j}}, r, b_1,\dots,b_\eta\right)}{\prod\limits_{j=\eta+1}^{d} k_j^{\frac{r_j}{r}}(\log k_j)_+^{\frac{b_j}{r}} \cdot \phi_1(N, r, b_1,\dots,b_\eta)} << \left|\Gamma_+^{(\eta)}(N)\right|,$$

т.к. $\dfrac{r_j}{r} > 1$ при $j = \eta+1,\dots,d$.

Получаем оценку снизу.

Рассмотрим множество

$\overline{\Gamma}_+(N) = \left\{ k = (k_1,\dots,k_\eta, 1,\dots,1) : k_j \in \mathbb{N},\ j = 1,\dots,\eta, \quad (k_1,\dots,k_\eta) \in \Gamma_+^{(\eta)}(N) \right\}$.

Очевидно, $\overline{\Gamma}_+(N) \subset \Gamma_+(N)$. Поэтому $\left|\Gamma_+(N)\right| \ge \left|\overline{\Gamma}_+(N)\right| = \left|\Gamma_+^{(\eta)}(N)\right|$.

Итак, $\left|\Gamma_+(N)\right| \ \frown \ \left|\Gamma_+^{(\eta)}(N)\right|$.

Учитывая теорему В, получаем теорему 1.

Далее оценим $E_{Q''(N)}(H_q^\Omega)_q$.

<u>Теорема 2.</u> Если функция $\Omega(t)$ задается равенством (1), то верно следующее порядковое равенство: $E_{Q''(N)}(H_q^\Omega)_q \quad \dfrac{1}{N} \cdot \phi_2(N, \eta, q_0, b, b'')$, функцию $\phi_2(N, \eta, q_0, b, b'')$ см. в теореме Г с заменой *d* на η и b' на b''.

Доказательство

Сначала получим оценки сверху. Через $S_{Q''(N)}(f)$ обозначим сумму Фурье функции $f(x)$, соответствующую множеству $Q''(N)$.

Из многомерной теоремы Литтлвуда-Пэли (см.[4], Теорема А) следует, что для $f(x)$ из H_q^Ω будет $E_{Q''(N)}(f)_q \overset{ж``(N)}{<<} \left(\sum\limits_{s\in C} \left\|\delta_s(f,x)\right\|_q^{q_0}\right)^{\frac{1}{q_0}}$.

Используя теорему А и лемму Б из [5], получаем: $E_{Q''(N)}(f)_q << \left(\sum\limits_{s\in\theta''(N)} \left(\Omega\left(2^{-s}\right)\right)^{q_0}\right)^{\frac{1}{q_0}}$.

Здесь $\theta''(N) =$ ж``$(2^l N) \setminus$ ж``(N).

Имеем: $\Omega(2^{-s}) = \prod\limits_{j=1}^{d} \dfrac{2^{-r_j s_j}}{s_j^{b_j}} = \Omega_1(2^{-s}) \cdot \prod\limits_{j=\eta+1}^{d} \dfrac{2^{-s_j(r_j - r_j'')}}{s_j^{b_j - b_j''}}$, где $\Omega_1(2^{-s})=\prod_{j=1}^{d}\frac{2^{-r_j'' s_j}}{s_j^{b_j''}}$.

Для $s=(s_1,\ldots,s_d)\in\theta''(N)$ будет $\Omega_1(2^{-s}) \frown \frac{1}{N}$.

Следовательно,

$$E_{Q''(N)}(f)_q << \frac{1}{N}\left(\sum_{s\in\theta''(N)}\prod_{j=1}^{\eta}s_j^{-(b_j-b_j'')q_0}\cdot\left(\prod_{j=\eta+1}^{d}2^{-(r_j-r_j'')s_j}\cdot s_j^{-(b_j-b_j'')}\right)^{q_0}\right)^{\frac{1}{q_0}}=\sigma_1.$$

Для фиксированных $s_{\eta+1},\ldots,s_d$ обозначим $\dfrac{N}{\prod_{j=\eta+1}^{d}2^{r_j'' s_j\cdot s_j^{b_j''}}}$ через N_1, а также положим

$$\theta_\eta''(N_1)=\left\{(s_1,\ldots,s_\eta): s_j\in\mathbb{N},\quad j=1,\ldots,\eta,\quad N_1<\prod_{j=1}^{\eta}2^{r_j'' s_j}\cdot s_j^{b_j''}\le 2^l N_1\right\}.$$

Тогда, применив лемму А, получим:

$$\sigma_1=\frac{1}{N}\left(\sum_{\substack{(s_{\eta+1},\ldots,s_d):\\(s_1,\ldots,s_d)\in\theta''(N)}}\left(\prod_{j=\eta+1}^{d}2^{-(r_j-r_j'')s_j}\cdot s_j^{-(b_j-b_j'')}\right)^{q_0}\cdot\sum_{(s_1,\ldots,s_\eta)\in\theta_\eta''(N_1)}\prod_{j=1}^{\eta}s_j^{-(b_j-b_j'')q_0}\right)^{\frac{1}{q_0}}\asymp$$

$$\asymp\frac{1}{N}\left(\sum_{\substack{(s_{\eta+1},\ldots,s_d):\\(s_1,\ldots,s_d)\in\theta''(N)}}\left(\prod_{j=\eta+1}^{d}2^{-(r_j-r_j'')s_j}\cdot s_j^{-(b_j-b_j'')}\right)^{q_0}\cdot\left(\phi_2(N_1,\eta,q_0,b,b'')\right)^{q_0}\right)^{\frac{1}{q_0}}<<$$

$$<<\frac{1}{N}\phi_2(N_1,\eta,q_0,b,b'')\cdot\left(\sum_{\substack{(s_{\eta+1},\ldots,s_d):\\(s_1,\ldots,s_d)\in\theta''(N)}}\left(\prod_{j=\eta+1}^{d}2^{-(r_j-r_j'')s_j}\cdot s_j^{-(b_j-b_j'')}\right)^{q_0}\right)^{\frac{1}{q_0}}<<$$

$$<<\frac{1}{N}\phi_2(N_1,\eta,q_0,b,b''). \qquad (2)$$

Здесь мы использовали тот факт, что в наших условиях $\phi_2(N_1,\eta,q_0,b,b'')$ возрастает с ростом N и то, что $r_j-r_j''>0$. Оценки сверху доказаны.

Получим оценку снизу.

Пусть сначала $1<q<2$.

Рассмотрим функцию $f_q(x)=B\cdot\sum_{s\in A}\Omega(2^{-s})\cdot 2^{\|s\|_1(\frac{1}{q}-1)}\delta_s^{(\eta)}(x)\prod_{j=\eta+1}^{d}\sin x_j$.

Здесь $A=\left\{s=(s_1,\ldots,s_\eta,1,\ldots,1): s_j\in\mathbb{N}, j=1,\ldots,\eta\right\}$, $\|s\|_1=s_1+\ldots+s_d$, $s^{(\eta)}=(s_1,\ldots,s_\eta)$,

$$\delta_s^{(\eta)}(x)=\prod_{j=1}^{\eta}\sum_{k_j=2^{s_j-1}}^{2^{s_j-1}} e^{i(k,x)},\quad (k,x)=k_1x_1+\ldots+k_\eta x_\eta\,.$$

Как известно, $\left\|\delta_s^{(\eta)}(x)\right\|_q \asymp 2^{\left\|s^{(\eta)}\right\|_1\left(1-\frac{1}{q}\right)}$.

Поэтому в силу теоремы А $f_q(x)\in H_q^{\Omega}$ при некотором $B>0$.

Как следует из [1], $E_{Q''(N)}(f_q)_q >> \left(\sum\limits_{s\in\theta''(N)}(\Omega(2^{-s}))^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

И далее, аналогично соотношению (2) получаем:

$$E_{Q''(N)}(f_q)_q >> \frac{1}{N}\left(\sum_{\substack{s=(s_1,\ldots,s_\eta,1,\ldots,1):\\ s\in\theta''(N)}}\prod_{j=1}^{\eta}s_j^{-(b_j-b_j'')q_0}\right)^{\frac{1}{q_0}} \asymp \frac{1}{N}\phi_2(N_1,\eta,q_0,b,b'')\,.$$

Получили оценку снизу при $1<q<2$.

Теперь получим оценки снизу при $2\le q<\infty$. Рассмотрим функцию $f(x)=\sum\limits_s\Omega(2^{-s})\cdot e^{i(k^s,x)}$,

где $k^s\in\rho(s)$, $(k^s,x)=k_1^{s_1}x_1+\ldots+k_d^{s_1}x_d$, а сумма берется по всем векторам $s=(s_1,\ldots,s_d)$ с натуральными компонентами. Тогда по теореме Литтлвуда-Пэли имеем:

$$E_{Q''(N)}(f)_q >> \left(\sum_{s\in\theta''(N)}(\Omega(2^{-s}))^2\right)^{\frac{1}{2}} \ge \left(\sum_{\substack{s=(s_1,\ldots,s_\eta,1,\ldots,1):\\ s\in\theta''(N)}}(\Omega(2^{-s}))^2\right)^{\frac{1}{2}} >>$$

$$>> \frac{1}{N}\left(\sum_{\substack{s=(s_1,\ldots,s_\eta,1,\ldots,1):\\ s\in\theta''(N)}}\prod_{j=1}^{\eta}s_j^{-(b_j-b_j'')2}\right)^{\frac{1}{2}} \asymp \frac{1}{N}\phi_2(N_1,\eta,2,b,b'')\,.$$

Теорема 2 доказана.

Итак, мы видим, что $E_{Q''(N)}(H_q^{\Omega})_q$ при $1<q<\infty$ по порядку меньше, чем $E_{Q(N)}(H_q^{\Omega})_q$ при $\Omega(t)$ из (1), хотя $\left|Q''(N)\right| \asymp \left|Q(N)\right|$.

Замечание. При $q=1;\infty$ верны оценки сверху: $E_{Q''(N)}(H_q^{\Omega})_q << \dfrac{1}{N}\phi_2(N,\eta,1,b,b'')$.

Литература

1. Пустовойтов Н.Н. Приближение многомерных функций с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности // Матем. заметки. Т. 65. Вып. 1. 1999. с. 107-117.
2. Пустовойтов Н.Н. Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Analysis Mathematica, v.20(1994), с.35-48.
3. Теляковский С.А. Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами // Матем. сборник. 1964. Т.63(105). с.426-444.
4. Темляков В.Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Труды МИАН СССР. 1986. Т. 178. с. 1-112.

5. Пустовойтов Н.Н. О наилучших приближениях аналогами «своих» и «не своих» гиперболических крестов // Матем. заметки. 2013. Т.93. Вып. 3. с.460-470.
6. Пустовойтов Н.Н. Ортопоперечники классов многомерных периодических функций, мажоранта смешанных модулей непрерывности которых содержит как степенные, так и логарифмические множители // Analysis Mathematica, v.34(2008), c.187-224.
7. Бугров Я.С. Приближение класса функций с доминирующей смешанной производной // Матем. сборник. 1964. Т. 64(106). с.410-418.
8. Бугров Я.С. Конструктивная характеристика классов функций с доминирующей смешанной производной// Труды МИАН СССР. 1974. Т.131. с.25-32.
9. Никольская Н.С. Приближение периодических функций класса $SH^{r}_{p^*}$ суммами Фурье // Сиб. матем. журн. 1975. Т. 16. №4. с.761-780.
10. Пустовойтов Н.Н. Ортопоперечники некоторых классов периодических функций двух переменных с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности // Изв. РАН. Серия матем. Т.64(2000). с.123-144.
11. Пустовойтов Н.Н. О приближении и характеризации периодических функций многих переменных, имеющих мажоранту смешанных модулей непрерывности специального вида // Analysis Mathematica, v.29(2003), c.201-218.