Опыт применения теории колебаний к практическим вопросам применения инерционных динамических гасителей колебаний

к.т.н. доц. Серов М.В., доц. Аверьянова Г.М., к.т.н. проф. Александрова С.Г.
Университет машиностроения
8(495)223-05-23,tm@mami.ru

Аннотация. В статье рассмотрена возможность применения инерционных динамических гасителей колебаний. Описан метод динамического гашения колебаний тела, находящегося под действием двух возмущающих сил изменяющимися по гармоническому закону. Исследованы дифференциальные уравнения возмущённого движения для системы с тремя степенями свободы, составленные на основе точного решения уравнений Лагранжа второго рода.

Ключевые слова: *инерционные динамические гасители колебаний, точное решение, уравнения Лагранжа II-го рода*

Введение

Среди многообразия задач прикладной теории колебаний одной из важнейших является виброизоляция машин. Поэтому вопрос о применении инерционных динамических гасителей колебаний при действии на объект виброзащиты (тело) нескольких возмущающих сил с различными частотами является актуальным и представляет практический интерес. Наиболее опасными для технических объектов оказываются вибрационные воздействия. В большинстве случаев разрушение объекта при вибрационных воздействиях связано с возникновением резонансных явлений. Целью виброзащиты является повышение вибропрочности технических объектов и виброустойчивости. Вибрация также оказывает вредное влияние и на людей, находящихся вблизи источника вибрации, поэтому создание эффективных методов и средств виброзащиты человека также является одной из важнейших технико-экономических и социальных задач современной техники.

Вибрационные воздействия являются колебательными процессами и делятся на стационарные, нестационарные и случайные. Простейшим видом стационарного вибрационного воздействия является гармоническое. В действительности, когда тот или иной процесс относят к типу гармонических, имеют в виду только приближённое представление процесса, который на самом деле является полигармоническим. Если ширина диапазона полигармонического воздействия мала по сравнению со средней частотой процесса, воздействие называется узкополосным.

Метод динамического гашения колебаний состоит в присоединении к объекту дополнительных устройств с целью изменения его вибрационного состояния. Работа динамических гасителей основана на формировании силовых воздействий, передаваемых на объект [1].

Изменение вибрационного состояния объекта при присоединении динамического гасителя может осуществляться как путём перераспределения колебательной энергии от объекта к гасителю, так и в направлении увеличения рассеяния энергии колебаний.

Первое реализуется изменением настройки системы объект-гаситель по отношению к частотам действующих вибрационных возмущений путём коррекции упругоинерционных свойств системы. В этом случае присоединяемые к объекту устройства называют инерционными динамическими гасителями. Инерционные гасители применяют для подавления моногармонических или узкополосных колебаний.

В частности от широкополостности воздействия зависит выбор динамической модели (расчётной схемы) защищаемого объекта. Модель объекта должна отражать основные черты реальной системы, влияющие на оценку её динамической реакции, и вместе с тем быть удобной для анализа и получения результатов. Если модель объекта обладает линейными свойствами, то задача сводится к соответствующему изменению его собственных частот, т.е. состоит в устранении резонансных явлений.

При действии вибрационных нагрузок более широкого частотного диапазона предпочтительней оказывается второй способ, основанный на повышении диссипативных свойств системы путём присоединения к объекту дополнительных специальных демпфируемых элементов. Динамические гасители диссипативного типа получили название поглотителей колебаний и в данной работе не рассматриваются.

В работе [2] рассматривается возмущённое движение тела (машины), установленного на упругом фундаменте. Если частота возмущающей силы, создаваемой движущимися внутри машины неуравновешенными массами, близка к собственной частоте тела, то система будет работать в режиме резонанса, и на фундамент будет передаваться чрезмерно большая нагрузка.

Решение этой проблемы достигается путём подвески к телу на пружине дополнительного груза в качестве инерционного динамического гасителя колебаний, который нужно настроить на резонанс с частотой возмущающей силы. При этом исследуются дифференциальные уравнения возмущённого движения для системы с двумя степенями свободы.

Принципиально отметим, что все методы, изложенные для системы с двумя степенями свободы на основе применений уравнений Лагранжа, почти без всяких изменений переносятся на системы с любым числом степеней свободы. Однако в общем случае при решении подобных задач приходится преодолевать ряд трудностей чисто вычислительного характера. Наибольшие трудности возникают при решении уравнения частот. Как отмечается в работе [2], уже раскрытии определителя при числе степеней свободы больше двух представляет трудоёмкий процесс. В литературе были описаны различные точные и приближённые методы, позволяющие упростить численное решение уравнения частот и связанных с этим задач.

Для того чтобы оценить сложность решения этой проблемы и приблизить теорию к запросам практики, в работе рассматривается опыт применения теории колебаний к практическим вопросам использования инерционных динамических гасителей колебаний при действии на тело (машину), установленное на упругом фундаменте, двух возмущающих сил с различными частотами.

Целью работы являются исследования неоднородных дифференциальных уравнений возмущённого движения для системы с тремя степенями свободы, составленных на основе точного решения уравнений Лагранжа второго рода и позволяющих описать метод динамического гашения колебаний тела, находящегося под действием двух возмущающих сил изменяющимися по гармоническому закону.

Постановка задачи

Рассмотрим механическую систему, состоящую из тела массы m_1, (например, машины с двумя электромоторами), установленного с помощью упругого крепления на фундаменте, когда между основанием фундамента и станиной машины вводятся пружины (виброизоляторы), суммарная жесткость которых равна c_1.

Пусть на тело действуют две возмущающие силы $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$, создаваемые движущимися внутри машины (моторов) неуравновешенными массами. Если частоты возмущающих сил окажутся близки к собственным частотам машины, то система будет работать в режиме резонанса, и на фундамент будет передаваться большая нагрузка.

В качестве динамической модели защищаемого объекта предлагается эквивалентная система, расчётная схема которой изображена на рисунке 1. Эквивалентная система состоит из тела массы m_1, подвешенного к невесомой пружине жесткостью c_1, на которую действуют две возмущающие силы $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$. При этом к телу массы m_1 подвешиваются на несомых пружинах жесткостью c_2 и c_3 дополнительные тела (грузы) с массами m_2 и m_3, выполняющие работу инерционных динамических гасителей вынужденных колебаний тела массы m_1, пренебрегая демпфированием.

Проекции сил $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ на ось x:

$$\left.\begin{aligned} P_{1x} &= P_{10}\sin(pt+\alpha), \\ P_{2x} &= P_{20}\cos(\omega t+\beta, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $P_{10}, P_{20}, p, \omega, \alpha, \beta$ - соответствующие амплитуды, циклические частоты $(p \neq \omega)$ и сдвиги фаз возмущающих сил.

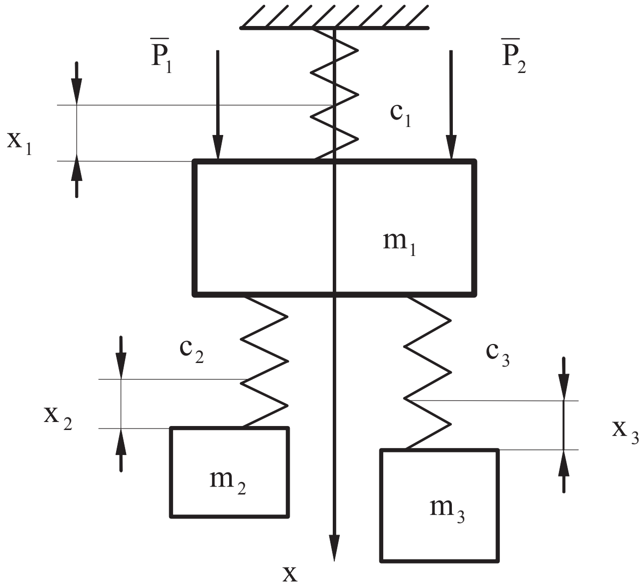

Рисунок1. Расчётная схема

Система имеет три степени свободы, если рассматривать только движение тел по вертикали. Примем за обобщённые координаты системы смещения x_1, x_2 и x_3, отсчитываемые от положений статического равновесия центров масс тел вниз. Это позволяет исключить силы тяжести тел, так как они в положении статического равновесия уравновешиваются силами упругости пружин.

Результаты исследований

Выбрав для каждого тела начало координат в положении его статического равновесия, составим дифференциальные уравнения колебаний механической системы с тремя степенями свободы на основе применений уравнений Лагранжа второго рода:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} &= Q_1^{П} + Q_1^{В}; \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} &= Q_2^{П}; \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_3} &= Q_3^{П}, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где T - кинетическая энергия системы; $П$ - потенциальная энергия системы; $Q_1^{П}, Q_2^{П}, Q_3^{П}$ - обобщённые силы потенциальных сил; $Q_1^{В} = P_{1x} + P_{2x}$ - обобщённая сила от действия возмущающих сил.

Вычисляем кинетическую энергию системы:

$$T = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_1 \dot{x}_2^2}{2} + \frac{m_1 \dot{x}_3^2}{2}. \qquad (3)$$

Затем вычисляем величины, входящие в левые части уравнений Лагранжа:

$$\frac{\partial T}{\partial x_1}=0;\ \frac{\partial T}{\partial x_2}=0;\ \frac{\partial T}{\partial x_3}=0;\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right)=m_1\ddot{x}_1;\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right)=m_2\ddot{x}_2;\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3}\right)=m_3\ddot{x}_3. \quad (4)$$

Для определения потенциальной энергии системы следует вычислять работу, которую совершают разности сил упругости пружин и сил тяжести тел при перемещении системы из рассматриваемого положения в положение равновесия. Эти разности сил изменяются в зависимости от смещения тел из статических положений равновесия по линейному закону аналогично тому, как изменяется сила упругости пружины при деформации из недеформированного состояния.

При определении потенциальной энергии можно вычислять работу разности сил последовательно. Сначала вычисляем её при перемещении тела массой m_1 в состоянии его статического равновесия на величину x_1. Соответствующая работа равна $\frac{c_1x_1^2}{2}$. Затем переместим тело массой m_2 в положение его статического равновесия. Для этого потребуется переместить его на величину x_2-x_1, так как на величину x_1 он переместился вместе с телом массой m_1. Этому перемещению соответствует работа $\frac{c_2(x_2-x_1)^2}{2}$. Аналогично переместим тело массой m_3 на величину x_3-x_1, и соответствующая работа будет равна $\frac{c_3(x_3-x_1)^2}{2}$.

Таким образом, для потенциальной энергии системы имеем:

$$\Pi=\frac{c_1x_1^2}{2}+\frac{c_2(x_2-x_1)^2}{2}+\frac{c_3(x_3-x_1)^2}{2}. \quad (5)$$

Затем вычисляем величины, входящие в правые части уравнений Лагранжа

$$\begin{aligned} &Q_1^{\Pi}=-\frac{\partial\Pi}{\partial x_1}=-(c_1+c_2+c_3)x_1+c_2x_2+c_3x_3;\\ &Q_2^{\Pi}=-\frac{\partial\Pi}{\partial x_2}c_2x_1-c_2x_2;\\ &Q_3^{\Pi}=-\frac{\partial\Pi}{\partial x_3}=c_3x_1-c_3x_3;\quad Q_1^{B}=P_{10}\sin(pt+\alpha)+P_{20}\cos(\omega t+\beta). \end{aligned} \quad (6)$$

После подстановки величин (1), (4) и (6), входящих в исходные уравнения Лагранжа (2), и преобразований дифференциальные уравнения колебаний механической системы с тремя степенями свободы принимают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1+(c_1+c_2+c_3)x_1-c_2x_2-c_3x_3=P_{10}\sin(pt+\alpha)+P_{20}\cos(\omega t+\beta);\\ m_2\ddot{x}_2-c_2x_1+c_2x_2=0;\\ m_3\ddot{x}_3-c_3x_1+c_3x_3=0. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Каждое из уравнений системы (7) можно интегрировать независимо от другого уравнения. Общее решение неоднородных дифференциальных уравнений, согласно теории дифференциальных уравнений, является суммой общих решений уравнений без правых частей (собственные колебания) и частных решений с правыми частями (вынужденные колебания).

Для определения собственных частот составим дифференциальные уравнения свободных колебаний механической системы с тремя степенями свободы

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1+(c_1+c_2+c_3)x_1-c_2x_2-c_3x_3=0;\\ m_2\ddot{x}_2-c_2x_1+c_2x_2=0;\\ m_3\ddot{x}_3-c_3x_1+c_3x_3=0. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Принимая частное решение системы однородных уравнений (8) в виде

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin(kt+\gamma);\\ x_2 &= A_2 \sin(kt+\gamma);\\ x_3 &= A_3 \sin(kt+\gamma), \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где постоянные: A_1, A_2, A_3 - амплитуды, k - круговая частота колебаний, γ - начальная фаза.

Вычислим производные (9):

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -A_1 k^2 \sin(kt+\gamma);\\ \ddot{x}_2 &= -A_2 k^2 \sin(kt+\gamma);\\ \ddot{x}_3 &= -A_3 k^2 \sin(kt+\gamma). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Подставим частные решения (9) и их производные (10) в систему уравнений (8), получим:

$$\left.\begin{aligned} A_1((c_1+c_2+c_3)-m_1k^2)-A_2c_2-A_3c_3=0;\\ A_1c_2-A_2(c_2-m_2k^2)=0;\\ A_1c_3-A_3(c_3-m_3k^2)=0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Однородная линейная система уравнений (11) имеет решения, отличные от нуля, если определитель равен нулю.

Раскрывая определитель, получаем уравнение частот:

$$\begin{aligned} &((c_1+c_2+c_3)-m_1k^2))(c_2-m_2k^2)(c_3-m_3k^2)-c_2^2(c_3-m_3k^2)-\\ &-c_3^2(c_2-m_2k^2)=0. \end{aligned} \tag{12}$$

Из уравнения частот (12) определяются частоты собственных колебаний k_1, k_2 и k_3 механической системы. Учитываем, что вследствие трения собственные колебания вскоре затухают.

Практический интерес представляют вынужденные колебания, уравнения которых (частное решение системы (7)) ищем в виде:

$$\left.\begin{aligned} x_{1в} &= A\sin(pt+\alpha)+B\cos(\omega t+\beta);\\ x_{2в} &= D\sin(pt+\alpha)+E\cos(\omega t+\beta);\\ x_{3в} &= F\sin(pt+\alpha)+G\cos(\omega t+\beta), \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где A, B, D, E, F, G - постоянные величины.

Вычислим производные (13):

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_{1в} &= -Ap^2\sin(pt+\alpha)-Bp^2\cos(\omega t+\beta);\\ \ddot{x}_{2в} &= -Dp^2\sin(pt+\alpha)-E\omega^2\cos(\omega t+\beta);\\ \ddot{x}_{3в} &= -Fp^2\sin(pt+\alpha)-G\omega^2\cos(\omega t+\beta); \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Подставив (13) и (14) в систему уравнений (7), получим три тождества, справедливые для любого момента времени:

$$\begin{aligned} &-m_1Ap^2\sin(pt+\alpha)-m_1Bp^2\cos(\omega t+\beta)+\left(c_1+c_2+c_3\right)A\sin(pt+\alpha)+\\ &+\left(c_1+c_2+c_3\right)B\cos(\omega t+\beta)-c_2D\sin(pt+\alpha)-c_2E\cos(\omega t+\beta)-\\ &=c_2D\sin(pt+\alpha)-c_2E\cos(\omega t+\beta)=P_{10}\sin(pt+\alpha)+P_{20}\cos(\omega t+\beta); \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} &-m_2Dp^2\sin(pt+\alpha)-m_2E\omega^2\cos(\omega t+\beta)-c_2A\sin(pt+\alpha)-c_2B\cos(\omega t+\beta)+\\ &+c_2D\sin(pt+\alpha)+c_2E\cos(\omega t+\beta)=0; \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} &-m_3Fp^2\sin(pt+\alpha)-m_3G\omega^2\cos(\omega t+\beta)-c_3A\sin(pt+\alpha)-c_3B\cos(\omega t+\beta)+\\ &+c_3F\sin(pt+\alpha)+c_3G\cos(\omega t+\beta)=0; \end{aligned} \tag{17}$$

Если в полученных тождествах (15), (16) и (17) собрать отдельно члены с синусами и косинусами, то коэффициенты при них должны быть равны нулю. Это даёт систему шести уравнений для определения неизвестных A, B, D, E, F, G.

$$\left.\begin{aligned} -m_1 A\,p^2 + (c_1+c_2+c_3)A - c_2 D - c_3 G = 0;\\ -m_1 B\,\omega^2 + (c_1+c_2+c_3)B - c_2 E - c_3 F = 0;\\ -m_3 D\,p^2 - c_2 A - c_2 D = 0;\\ -m_2 E\,\omega^2 - c_2 B - c_2 E = 0;\\ -m_3 F\,p^2 - c_3 A - c_3 F = 0;\\ -m_3 G\,\omega^2 - c_3 B - c_3 G = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Из уравнений (18) найдём:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{P_{10}}{(c_1+c_2+c_3) - m_1 p^2 - \dfrac{c_2^2}{(c_2 - m_2 p^2)} - \dfrac{c_3^2}{(c_3 - m_3 p^2)}};\\ B &= \frac{P_{20}}{(c_1+c_2+c_3) - m_1 \omega^2 - \dfrac{c_2^2}{(c_2 - m_2 \omega^2)} - \dfrac{c_3^2}{(c_3 - m_3 \omega^2)}};\\ D &= \frac{Ac_2}{(c_2 - m_2 p^2)};\quad E = \frac{Bc_2}{(c_2 - m_2\omega^2)};\\ F &= \frac{Ac_3}{(c_3 - m_3 p^2)};\quad G = \frac{Bc_3}{(c_3 - m_3\omega^2)}.\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Для того чтобы тело массы m_1 находилось в покое $(x_{1в} = 0)$, необходимо выполнение условия $A = B = 0$.

Тогда, согласно (19), получим:

$$\left.\begin{aligned} c_2 - m_2 p^2 = 0;\\ c_3 - m_2 \omega^2 = 0;\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} p = \sqrt{c_2/m_2} = n_2;\\ \omega = \sqrt{c_3/m_3} = n_3,\end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

т.е. парциальные частоты n_2 и n_3 тел с массами m_2 и m_3 должны быть соответственно равны частотам p и ω возмущающих сил.

В этом случае, согласно соотношениям (19), постоянные величины $E = F = 0$ и уравнения вынужденных колебаний тел системы примут следующий вид:

$$x_{1в} = 0; \qquad x_{2в} = -P_{10}\sin(pt+\alpha)/c_2; \qquad x_{3в} = -P_{20}\cos(\omega t + \beta)/c_3. \qquad (21)$$

Следовательно, подвешенные на пружинах тела с массами m_2 и m_3 будут являться инерционными динамическими гасителями колебаний тела массы m_1, если их настроить на резонанс с частотами возмущающих сил.

Зависимости (13) - (21) справедливы при условии, что ни одна из собственных частот k_1, k_2 и k_3 механической системы не совпадает с частотами p и ω возмущающих сил.

Заключение

Проведены исследования неоднородных дифференциальных уравнений возмущённого движения для системы с тремя степенями свободы, составленных на основе точного решения уравнений Лагранжа второго рода, позволяющие описать метод динамического гашения колебаний тела, находящегося под действием двух возмущающих сил изменяющимися по гармоническому закону.

В результате исследований установлено, что метод динамического гашения колебаний тела, состоящий в присоединении к телу дополнительных устройств (инерционных динамических гасителей колебаний), является эффективным для возмущающих сил, изменяющихся по гармоническому закону, что согласуется с тем, что инерционные гасители колебаний применяют в основном для подавления моногармонических или узкополосных колебаний.

Обоснован выбор наиболее приемлемой в этих условиях линейной модели (расчётной схемы) защищаемого объекта, достаточно передающей свойства широкого класса конструкций при малых колебаниях.

Литература

1. Комкин А.И. Вибрация. Воздействие, нормирование Защита //Безопасность Жизнедеятельности. М: Изд. Новые Технологии. 2004. .№ 5, приложение стр.47.
2. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики: Учебное пособие для студ. высш. учебн. заведен. - Т. 2. Динамика - М: Наука, 1971 г., с.464..