

Итеративная процедура синтеза оптимального робастного ПИД регулятора

к.т.н. доц. Полянский В.П.
Университет машиностроения
nauka@msuie.ru

Аннотация. В статье рассмотрен метод расчёта робастного регулятора в АСР с внутренней моделью, что позволяет существенно упростить расчёт настроек регулятора.

Ключевые слова: робастность, автоматическое регулирование, расчёт настроек регулятора

К робастным системам регулирования относятся такие системы, которые сохраняют устойчивость и показатели качества при конечных отклонениях параметров объекта от номинальных значений. Номинальные параметры объекта являются параметрами, полученными в результате экспериментов или рассчитанными аналитически на основе литературных или справочных материалов. Кроме этого, номинальные параметры могут изменяться во времени в период эксплуатации объекта, например при изменении нагрузки в определенном ограниченном диапазоне или образовании накипи в теплообменниках, что приводит к изменению постоянных времени объекта и т.д.

В таких условиях АСР должна сохранять устойчивость и качество функционирования. В теории робастных систем существует понятие робастной устойчивости и робастного качества. Кроме этого имеются понятия номинального качества и робастной устойчивости, определенные в пространстве комплексных функций H_2 и H_∞ [1]:

$$H_2 = \|w\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |W(jw)|^2 dw \right)^{1/2}. \quad (1)$$

В пространстве H_∞ норма комплексной функции определяется следующим образом:

$$H_\infty = \|w\|_\infty = S_{up} |W(jw)|. \quad (2)$$

В теории робастных систем управления вместо функции чувствительности используется понятие модели неопределенности. Точно так же как в функциях чувствительности есть параметрические функции чувствительности и структурные функции чувствительности, в теории робастных систем вводятся понятия параметрической модели неопределенностей и частотные модели неопределенностей.

Пусть задана передаточная функция объекта в виде:

$$W_o(P) = \frac{K_o e^{-P\tau}}{Tp + 1}, \quad (3)$$

где K_o – коэффициент передачи; τ – время запаздывания; T – постоянная времени, т.е. объект зависит от 3-х параметров.

Введем обозначения $\{V_1 = T; V_2 = K_o; V_3 = \tau\} = V$, где V – вектор параметров.

Параметрическую модель неопределенности зададим двумя способами:

$$1) \underline{V}_i \leq V_i \leq \bar{V}_i \quad i = 1, 2, 3; \quad 2) |V_i - V_i^o| \leq \gamma \alpha_i,$$

где: V_i^o – номинальные параметры объекта, полученные экспериментально или вычисленные теоретически; $\gamma > 0$ – размах неопределенности; α_i – масштаб изменения параметров V_i .

В этой записи $\underline{V}_i = V_i^o - \gamma \alpha_i$, $\bar{V}_i = V_i^o + \gamma \alpha_i$, $i = 1, 2, 3$, что похоже на определение интервальной оценки точности параметров закона распределения вероятностей в математической ста-

тистике, где γ – квантиль закона распределения, α_i – среднеквадратическое отклонение параметра от среднего значения.

Частотная модель неопределенности

В тех случаях, когда исходным является описание объекта с помощью частотных характеристик, естественно описывать модель неопределенности в тех же терминах.

Существует аддитивная и мультипликативная модель неопределенности. Аддитивная модель неопределенности выражается так:

$$\Pi = \left\{ W : |W(j\omega) - \bar{W}(j\omega)| \leq l_a(\omega) \right\},$$

где Π – означает обозначение семейства (т.е. множества) передаточных функций системы (объектов); $W(j\omega)$ – реальная ПФ; $\bar{W}(j\omega)$ – частотная характеристика номинальной модели объекта или системы; $l_a(\omega)$ – частотная характеристика (задания) определяет допустимый диапазон отклонений текущей частотной характеристики от номинальной.

Мультипликативная модель неопределенности представлена следующим образом:

$$l_m(j\omega) = \frac{l_a(j\omega)}{\bar{W}(j\omega)} \quad \text{или} \quad l_m(\omega) = \frac{l_a(\omega)}{|\bar{W}(j\omega)|}.$$

Тогда семейство Π может быть представлено:

$$\Pi = \left\{ W : \frac{|W(j\omega) - \bar{W}(j\omega)|}{|\bar{W}(j\omega)|} \leq l_m(\omega) \right\}, \quad (3a)$$

где $l_m(\omega)$ устанавливает ограничение на максимальное допустимое рассогласование между номинальной моделью $\bar{W}(j\omega)$ и любой из моделей семейства Π .

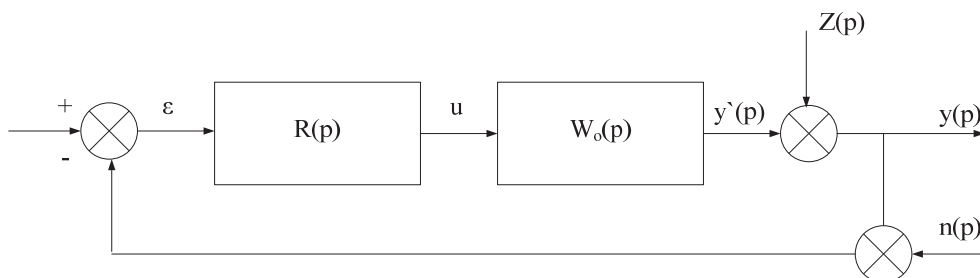


Рисунок 1. Схема АСР: u_z – задание; $\varepsilon = y' - y_3$ - ошибка регулирования; $Z(p)$ – возмущение; $y(p)$ – регулируемая величина; $u(p)$ – управляющее воздействие; $R(p)$ – ПФ регулятора; $W_v(p) =$ ПФ объекта; $n(p)$ – шум измерения $y(p)$

Имеется несколько причин рассогласования $|W(j\omega) - \bar{W}(j\omega)|$:

- 1) ошибка аппроксимации временной характеристики, например, кривой разгона; в этом случае $l_m(\omega)$ возрастает с увеличением частоты и в конечном счете станет превышать единицу. Причина этого заключается в том, что используемая модель описывает объект достаточно точно только в области низких частот, но становится неточной для высокочастотной области. Это связано с тем, что наихудшая аппроксимация кривой разгона осуществляется при малых значениях времени; 2) математическая модель $\bar{W}(j\omega)$ определяется на стадии проектирования объекта по справочным данным или таблицам, но и здесь сохраняется тенденция увеличения ошибки в области малых значений времени (т.е. при увеличении частоты); 3) рассогласование связано с нестационарностью частотных характеристик, т.е. рассо-

гласования объясняются изменением параметров объекта во времени, причем для робастных АСР это изменение ограничено, а при неограниченном изменении необходимо применять адаптивные системы управления.

Далее приведем структурные функции чувствительности.

Структурная функция чувствительности определяется как производная от ПФ замкнутой АСР по каналу возмущения – по бесконечно малой вариации ПФ объекта.

$$S_{w_0}(p) = \frac{dW_{з.с.}(p)/W_{з.с.}^y(p)}{dW_0(p)/W_0(p)}. \quad (3)$$

Если исходя из структуры на рисунке 1 определим ПФ АСР по каналу управления, то получим:

$$W_{з.с.}^y(p) = \frac{y(p)}{y_3(p)} = \frac{R(p)W_0(p)}{1 + R(p)W_0(p)}. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3) найдем функцию чувствительности:

$$S_{w_0}(p) = \frac{1}{1 + R(p)W_0(p)}. \quad (5)$$

Дополнительная функция чувствительности определяется следующим образом:

$$\eta(p) = \frac{R(p)W_0(p)}{1 + R(p)W_0(p)}. \quad (6)$$

С учетом (5) и (6) имеем очевидное равенство:

$$S_{w_0}(p) = \eta(p) = 1. \quad (7)$$

Функция чувствительности $S_{w_0}(p)$ выражает эффект влияния возмущения $Z(p)$ на выход $y(p)$. Чувствительность $S_{w_0}(p)$ особо важна в оценке качества АСР.

Желательно сделать $S_{w_0}(p)$ как можно меньше. Если $R(p)w_0(p)$ является строго правильной, т.е. удовлетворяет условию:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} R(p)w_0(p) = 0,$$

что ведет к тому, что:

$$\lim_{w \rightarrow \infty} |S_{w_0}(p)| = \lim_{w \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{1 + R(jw)W_0(jw)} \right| = 1.$$

Таким образом, $|S_{w_0}|$ может быть сделан малым на ограниченной области частот.

Типичная кривая $|S_{w_0}|$ показана на рисунке 2.

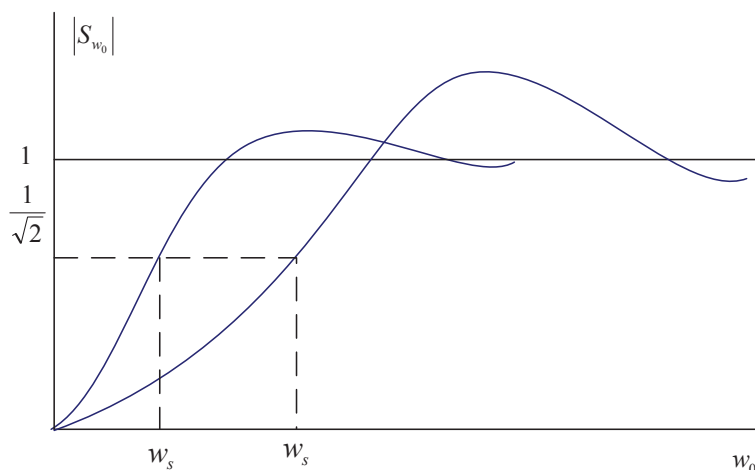


Рисунок 2

Частоту w_s на рисунке 2 при которой $|S_{w_0}|$ ожидается равной $\frac{1}{\sqrt{2}}$ будем называть полосой пропускания АСР:

$$|S_{w_0}(jw)| < \frac{1}{\sqrt{2}}, w < w_s.$$

Граница w_s может служить простой мерой качества замкнутой АСР. Поведение дополнительной функции чувствительности при условии $w \rightarrow 0$ и $w \rightarrow \infty$ определяется следующими выражениями:

$$\lim_{w \rightarrow 0} |\eta(jw)| = \lim_{w \rightarrow 0} \left| \frac{R(j)W_o(j)}{1 + R(j)W_o(j)} \right| = 1 \text{ и}$$

$$\lim_{w \rightarrow \infty} |\eta(jw)| = \lim_{w \rightarrow \infty} \left| \frac{R(jw)W_o(jw)}{1 + R(jw)W_o(jw)} \right| = 0$$

$|\eta(jw)|$ равна 1 только в ограниченной области частот.

Дополнительная функция чувствительности также выражает эффект влияния шума измерения $n(t)$ выхода $y(p)$ (см. рисунок 2). С этой точки зрения $\eta(jw)$ должна быть сделана маленькой.

Асимметрические свойства АСР (типовые системы)

Возмущения, встречающиеся в химической индустрии, часто медленно варьируются и могут быть аппроксимированы скачком или $Z(t) = at$.

Для $S_{w_0}(p)$ необходимое и достаточное условие:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \left| P \left(S_{w_0}(p) \frac{1}{p} \right) \right| = 0.$$

Это дает возможность определить типовые системы, чтобы классифицировать аналитическое поведение:

$$\lim_{p \rightarrow 0} p^m R(p)W_o(p) \neq 0$$

система типа m имеет m полюсов в начале координат. Для того, чтобы выполнялось условие $S_{w_0}(p) = 0$ при $p \rightarrow \infty$ при возмущении типа скачка разомкнутая система должна иметь 1 по-

люс в начале координат (тип 1). Если возмущение $Z(t)=at$, то $R(p)W_o(p)$ должна иметь 2 полюса в начале координат (тип 2).

Описание входа

Символ x будем использовать для определения входов, которые могут быть заданием или возмущением $x(t) = \{y_s(t), Z(t)\}$.

Будем предполагать, что любой вход x на входе замкнутой системы генерируется прохождением нормализованного входа x' через ПФ весовую функцию $W_{вес}(p)$, который отнесем к взвешенному входу.

Множество ограниченных входов (все входы с 2-нормой ограниченной 1):

$$x' = \left\{ x' : \|x'\|_2^2 = \int_0^\infty x'^2(t) dt \leq 1 \right\} \tag{8}$$

Схема формирующего фильтра:

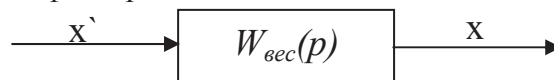


Рисунок 3

Если x ожидается как скачок, например, для возмущения, тогда конструктор определяет $W_{вес}(p)$ как генератор $(1/p)$.

$$x = W_{вес}(p)x' = W_{ПФ}(p),$$

где $x'(p) = \int_0^\infty \delta(t) * e^{-pt} dt = 1$. Импульс на входе $x'(t) = \delta(t)$.

Однако иногда качество замкнутой системы может быть достаточно чувствительно к выбору входа. Если вход, предполагаемый конструктором, не равен входу реальному, качество может быть значительно нарушено. Тогда более существенно рассмотреть множество входов, содержащих вход, который часто встречается вместе с другими «похожими» входами. Согласно (8) мы будем рассматривать множество ограниченных входов.

$$X = \left\{ x : \|x\|_2^2 = \left\| \frac{x}{W_{вес}} \right\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left| \frac{x(jw)}{W_{вес}(jw)} \right|^2 dw \leq 1 \right\}. \tag{9}$$

Интеграл здесь равен интегралу во временной области в соответствии с теоремой Parseval.

Выражение (9) может быть интерпретировано следующим образом: Если спектр входа x узкий и концентрируется около w^A (т.е. вход похож на $\sin w^A t$), тогда амплитуда входа ограничивается $|W_{вес}(jw)|$.

Типичный взвешенный вход показанный на рисунке 4 указывает, что высокочастотный вход должен иметь маленькую амплитуду.

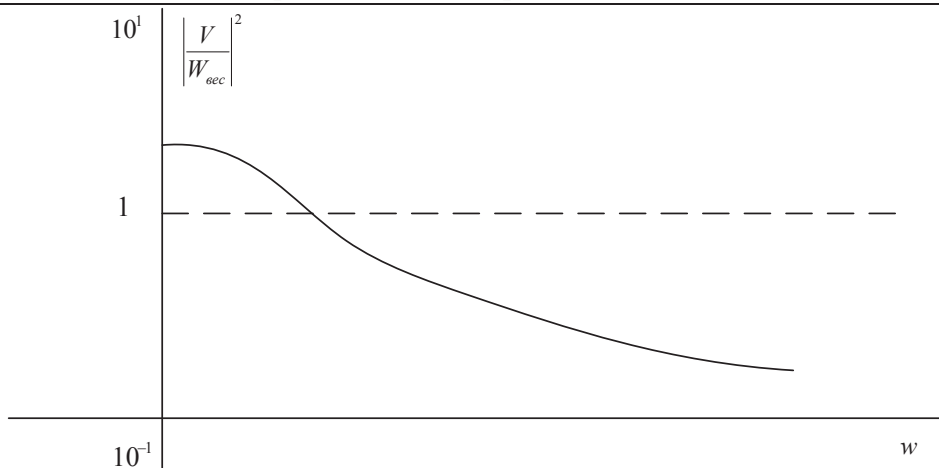


Рисунок 4

Предположим, что мы ожидаем единичный скачок x . Тогда мы можем определить $W_{\text{вес}}$ так, что скачок принадлежит множеству (9). Например, вес

$$W_{\text{вес}}(p) = \frac{p + \beta}{P\sqrt{2\beta}}, \quad \beta > 0. \quad (10)$$

Имеет желаемые характеристики: вход

$$x'(p) = \frac{\sqrt{2\beta}}{p + \beta},$$

удовлетворяемый

$$\|x'\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\beta}{w^2 + \beta^2} dw = 1, \quad (11)$$

и дает скачок x , когда проходит через вес (10).

Однако характеристика (9) с весом (10) содержит также много других сигналов x , которые «похожи» на скачок. Например, рассмотрим вход

$$x' = \frac{\sqrt{2\alpha}}{p + \alpha}, \quad \alpha > 0, \quad 2 \neq \beta,$$

который также удовлетворяет (11).

После прохождения через вес сигнал становится:

$$x = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \frac{p + \beta}{(p + \beta)p}, \quad (11a)$$

который является модифицированным скачком с отставанием ($\alpha < \beta$) и опережением (by lead (для $2 > \beta$)) (см. рисунок 5)

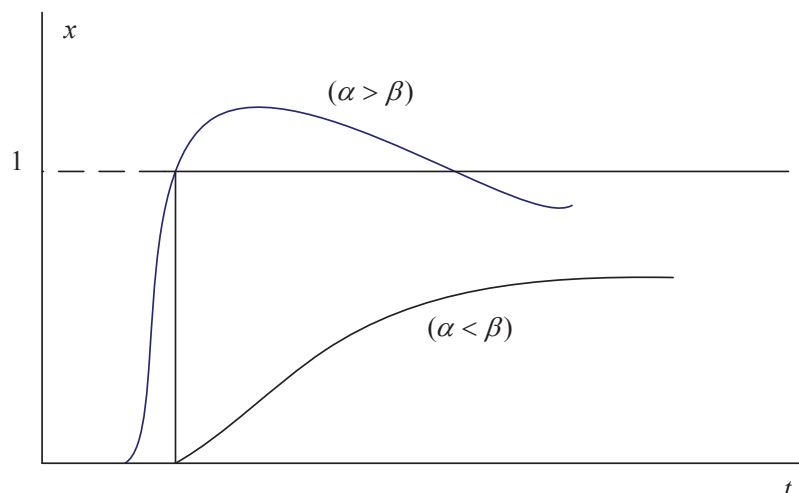


Рисунок 5

Таким образом, если регулятор конструируется для множества (9) с весом (10), то он будет хорошо работать не только для скачков, но также для «модифицированных скачков», например в форме (11).

Оптимальное управление в пространстве H_2

Регулятор $R(p)$ определяется так, чтобы интегрально квадратическая ошибка:

$$J = \|\varepsilon\|_2^2 = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt \quad (12)$$

принимала минимальное значение для частного вход x . Заметим, что измерение малости есть 2-норма ошибки $\|\varepsilon\|_2^2$ и множества входов.

$$J = \|\varepsilon\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon(j\omega)|^2 d\omega \Rightarrow \min. \quad (13)$$

или $J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_{w_0}(j\omega)|^2 |x(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_{w_0}(j\omega)|^2 |W_{вес}(j\omega)|^2 |x'(j\omega)|^2 d\omega$ для $|x'(j\omega)|^2 = 1$.

Окончательно получим

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_{w_0}(j\omega)|^2 |W_{вес}(j\omega)|^2 d\omega \Rightarrow \min. \quad (13a)$$

Формула (13) представляет собой интегральную функцию чувствительности взвешенной $W_{фор}$, где $W_{фор}$ зависит от входа x минимизирующего 2-норму функции чувствительности S_{w_0} взвешенной $W_{фор}$.

Если $W_{фор}$ выбрано таким образом, чтобы представить частный вход, тогда, регулятор, решающий задачу (13), редко удовлетворяет практическим требованиям конструктора. Поэтому для конструктора практически $W_{вес}$ есть «настраиваемый параметр». Вес $W_{фор}$ варьируется до тех пор, пока характеристика переходного процесса замкнутой системы не станет удовлетворительной.

H_{∞} – оптимальное управление

Здесь предполагается что входы x принадлежат множеству X нормировано-ограниченных функций, зависящих от веса $W_{фор}$.

$$X = \left\{ x : \|x\|_2^2 = \left\| \frac{x}{W_{вес}} \right\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{x(j\omega)}{W_{вес}(j\omega)} \right|^2 d\omega \leq 1 \right\}. \quad (14)$$

Класс входов, определенных этим неравенством, содержит большую варьируемость спектров, включающих, возможно, скачок, пульсации и узкоограниченные сигналы различных частот.

В проблеме H_2 – оптимизации мы предлагали фиксированный вход. Каждый $x \in X$ приводит к ошибке ε . H_∞ -оптимальный регулятор конструируется так, чтобы минимизировать наихудшую ошибку, которая может быть для любого $x \in X$:

$$\min_{\varepsilon} \sup_{x' \in X'} \|S_{wo} W_{вес} x'\|_2^2.$$

Наихудшая ошибка ограничивается следующим образом:

$$\sup_{x' \in X'} \|S_{wo} W_{вес} x'\|_2^2 = \sup_{x' \in X'} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_{wo} W_{вес} x'|^2 d\omega \leq \sup_w |S_{wo} W_{вес}|^2 \cdot \sup_{x' \in X'} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |x'|^2 d\omega. \quad (15)$$

С учетом неравенства (8) $\sup_{x' \in X'} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |x'|^2 d\omega = 1$. Отсюда найдем:

$$\sup_{x' \in X'} \|S_{wo} W_{вес} x'\|_2^2 \leq \sup_w \|S_{wo} W_{вес}\|_2^2. \quad (16)$$

Определим w -норму взвешенной функции чувствительности:

$$\|S_{wo} W_{вес} x\|_\infty^\Delta = \sup_w |S_{wo} W_{вес}| \quad \text{и} \quad (17)$$

получаем проблему H_∞ - оптимального управления.

$$\min \|S_{wo} W_{вес}\|_\infty = \min_w \sup_w |S_{wo} W_{вес}| \quad (18)$$

Таким образом, H_∞ – оптимальное управление минимизирует максимальное значение или ∞ – норму функции чувствительности, взвешенной $W_{вес}$. Согласно интерпретации в частичной области H_2 – оптимальное управление минимизирующей среднюю величину и H_∞ – оптимальное управление минимизирует пиковую величину значения взвешенной функции чувствительности. Как и в H_2 – оптимальном управлении, так и в H_∞ – оптимальном управлении более практично думать о $W_{фор}$ как о настраиваемом параметре. Пусть предположим, что для частного $W_{фор}$ оптимальная величина целевой функции (17) есть k . Тогда (18) определяет, что $|S_{wo}| \leq k |W_{вес}|^{-1}$. Это означает, что конструктор может задать ограничение на функцию чувствительности

$$|S_{wo}| < |W_{вес}|^{-1}, \quad w, \quad (19)$$

которая в H_∞ – оптимальном контролере должна удовлетворяться. Если контролер находится так, что

$$\|S_{wo} W_{вес}\|_\infty < 1, \quad w \quad (20)$$

тогда ограничение (19) выполняется.

Поэтому требование H_∞ - качества обычно записывается в форме (20). Типовое задание

ограничения ($W_{век}^{-1}$) на функцию чувствительности представлена на рисунке 6.

Естественные типы входов будут управляться выбором веса $W_{век}$. Это указывает, что ожидаемые выводы являются медленно варьированные и что высокочастотные сигналы имеют малые амплитуды.

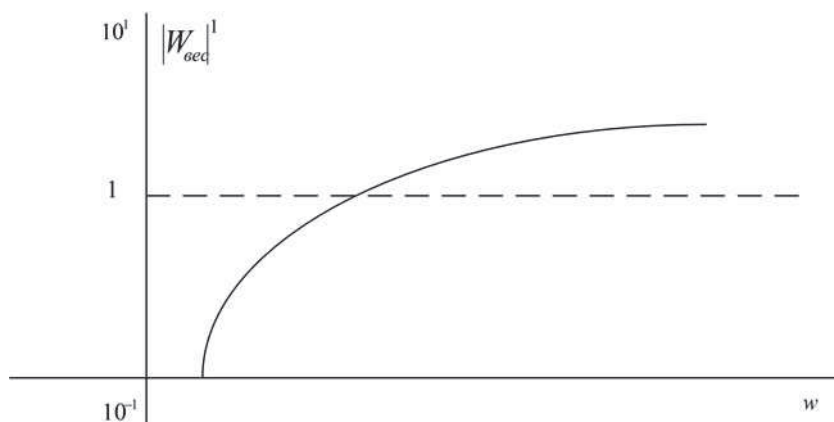


Рисунок 6

Ограничения $W_{век}^{-1}$ приводят к тому, что функция чувствительности будет малой в высокочастотной области, где ожидается большая амплитуда входов. Часто конструктор желает выделить минимальную полосу и ограничить максимальный пик функции чувствительности, чтобы избежать усиления возмущений.

Напомним, что для высоких частот $|R(jw) - W_0(jw)|$ является малой величиной и поэтому

$$|S_{wo}| = \left| \frac{1}{1 + |R(jw) - W_0(jw)|} \right| \approx 1, \text{ при больших } w. \quad (21)$$

Таким образом, показатель качества будет незначительным в низкочастотной области, где $|R(jw) - W_0(jw)|$ велико и $|S_{wo}| \approx |R(jw) - W_0(jw)|^{-1}$. Тогда показатель качества (20) сводится к:

$$|R(jw) - W_0(jw)| > W_{век}(jw), \text{ } w \text{ мало}. \quad (22)$$

Робастная устойчивость

Мы хотим вывести условия для робастной устойчивости семейства Π объектов, определенных выше. Для этой цели будем использовать критерий устойчивости Найквиста.

На рисунке 7 представлен годограф Найквиста для номинальной разомкнутой системы $W_p(jw) = R(jw) - \tilde{W}_0(jw)$. Размер частотной модели неопределенности представим в виде окружности с радиусом $|R(jw) - W_0(jw)|lm(w)$.

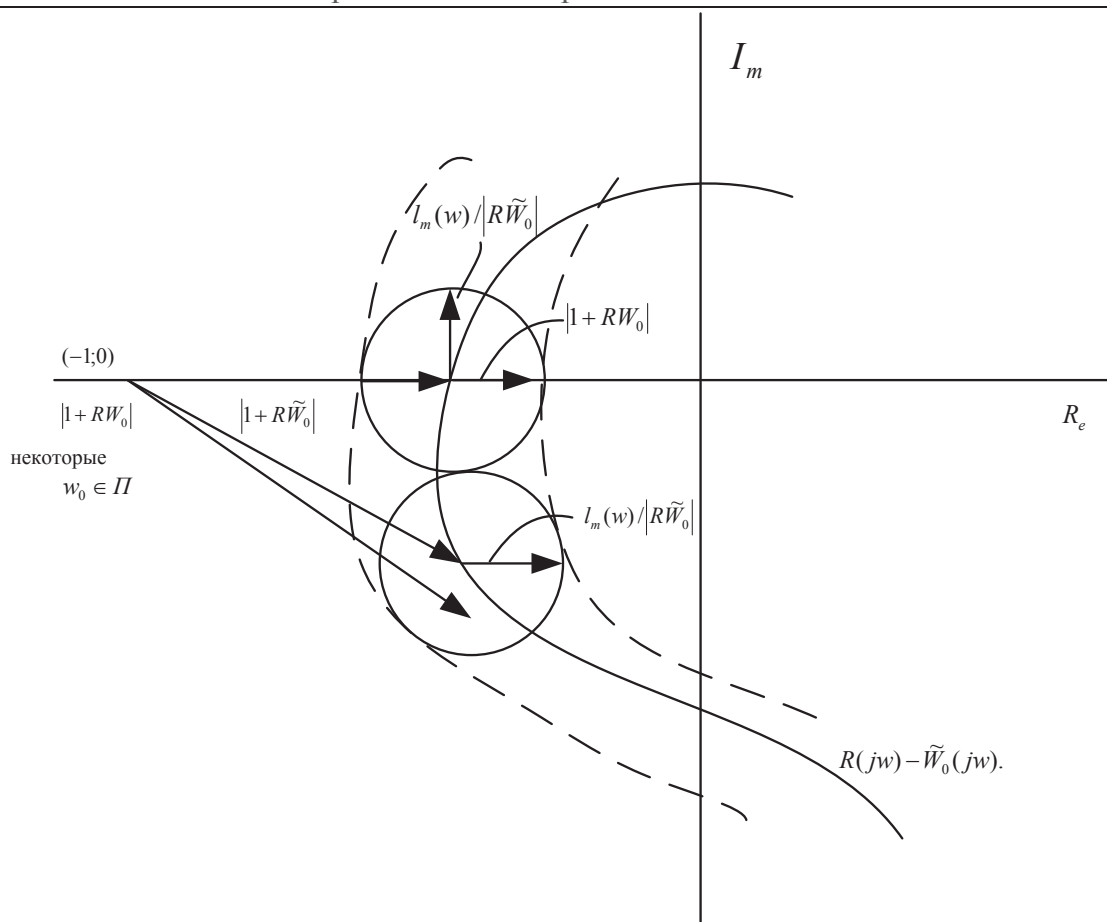


Рисунок 7

Окружность моделирующая область неопределенности замкнутой АСР с радиусом, увеличивающимся с увеличением частоты т.к. $l_m(w)$ с частотой растет, образует полосу Найквиста, которая включает все $w_0 \in \Pi$. Условие устойчивости: если полоса Найквиста не охватывает точки с $(-1, j0)$, то замкнутая АСР будет робастно устойчива. Это будет, если расстояние $R\tilde{W}_0$ от точки $(-1, j0)$ т.е. $|1 + R\tilde{W}_0|$, превосходит диск радиусом $|R\tilde{W}_0|l_m(w)$:

$$|1 + R\tilde{W}_0| > |R\tilde{W}_0|l_m(w), \quad \forall w \quad (23)$$

или по-другому

$$\left| \frac{R\tilde{W}_0}{1 + R\tilde{W}_0} \right| l_m(w) < 1, \quad \forall w \quad (23a)$$

или

$$|\tilde{\eta}(jw)|l_m(w) < 1. \quad (24a)$$

Предположим, что все объекты w_0 в семействе Π

$$\Pi = \left\{ N_0 : \left| \frac{W_0(jw) - \tilde{W}_0(jw)}{\tilde{W}_0(jw)} \right| \leq l_m(jw) \right\} \quad (24)$$

имеют также число правых полюсов и что частный контролер R стабилизирует номинальный объект \tilde{W}_0 . Тогда система является робастно устойчивой с контроллером R , если и

только если дополнительная функция чувствительности $\tilde{\eta}(p)$ для номинального объекта \tilde{W}_0 удовлетворяет следующему ограничению:

$$\|\tilde{\eta}l_m(w)\|_{\infty}^{\Delta} = S_{xp} \left| \tilde{\eta}l_m(w) \right| < 1, \quad (25)$$

где $\tilde{\eta}(p) = R w_0 / (1 + R w_0)$.

Это необходимое и достаточное условие. Если условие (25) нарушается, то в семействе Π существует W_0 – неустойчивый объект. Однако если истинная неопределенность аппроксимируется диском, то условие (25) является только достаточным.

Робастная устойчивость требует ограничения в w -норме дополнительной функции чувствительности $\tilde{\eta}$ взвешенной $l_m(w)$. С другой стороны для H_2 – оптимального управления показатель качества выражается в терминах 2-нормы функции чувствительности \tilde{S}_{w_0} взвешенной $W_{\text{фор}}$. Различие норм указывает, что качество и робастная устойчивость не могут быть предметом компромисса, когда интегрально квадратический критерий употребляется как целевая функция.

Одной из причин введения H_{∞} - оптимизации управления является то, что условие робастной устойчивости и показатель номинального качества выражаются в терминах одинаковой нормы. Так же заметим, что для высоких частот $|R * \tilde{W}_0|$ мало и поэтому:

$$|\tilde{\eta}| = \left| \frac{R \tilde{W}_0}{1 + R \tilde{W}_0} \right| \approx |R \tilde{W}_0| \text{ } w \text{ большие.}$$

Тогда для больших w (25) сводится к выражению

$$|R \tilde{W}_0| \leq \frac{1}{|l_m(jw)|} \text{ } w \text{ большие.}$$

Все это означает, что коэффициент передачи контроллера на высоких частотах ограничен неопределенностью.

Коэффициент обратной связи $|R \tilde{W}_0|$ должен быть меньше $|l_m(jw)|^{-1}$. Наконец, заметим, что в рамках H_{∞} - оптимального управления мы хотим минимизировать номинальное качество $|S w_0 W|_{\infty}$ робастную устойчивость $\|\tilde{\eta}l_m(jw)\|_{\infty}$. Компромисс между качеством и робастной устойчивостью может быть достигнут из-за того, что \tilde{S}_{w_0} и $\tilde{\eta}$ не являются независимыми и делая один показатель меньше увеличиваем другой.

Робастное качество

Робастная устойчивость – минимальное требование для практического использования системы управления, когда модель не определена – является важным исходным положением.

Однако робастная устойчивость недостаточна. Если ограничение (25) удовлетворяется для семейства Π , тогда существует особый объект $W_0 \in \Pi$, для которого замкнутая система находится на границе неустойчивости и для которой качество является произвольно плохим. Мы выводим условие робастного качества, когда качество измеряется в терминах 2-нормы и ∞ - нормы.

H_2 – целевая функция качества

В теории автоматического регулирования при синтезе регулятора имеют дело с единственным объектом W_0 . Здесь мы рассмотрим семейство объектов Π , определяемых через частотную модель неопределенности мультипликативной формы (3а). Сформируем нашу цель:

сконструировать такой контроллер, что, с результирующая ошибка от определенного вида «X» минимизировалась для наихудшего объекта в семействе П. Наихудший объект является одним из объектов, который дает наибольшую ошибку:

$$\min_{S_{wo}} \max_{W \in \Pi} \int_0^{\infty} S_{wo} dt = \min_{S_{wo}} \max_{W \in \Pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1 + RW_0} \right|^2 |x|^2 dw. \quad (26)$$

Интеграл максимизируется, максимизируя подинтегральное выражение на каждой частоте. Из геометрических соображений (рис.7) мы находим:

$$|1 + RW_0| \geq |1 + R\tilde{W}_0| - |R\tilde{W}_0| \bar{l}_m, \quad \forall w \in \Pi, \quad (27)$$

или

$$|1 + RW_0| \geq |1 + R\tilde{W}_0| \left(1 - \frac{|R\tilde{W}_0|}{|1 + R\tilde{W}_0|} * \bar{l}_m \right) \quad \forall w \in \Pi, \quad (28)$$

или

$$|S_{wo}| = \left| \frac{1}{1 + RW_0} \right| \leq \frac{|\tilde{S}_{wo}|}{2 - |\tilde{\eta}| \bar{l}_m} \quad \forall w \in \Pi, \quad (28)$$

где $\tilde{S}_{wo} = (1 + RW_0)^{-1}$.

Заметим, что, когда робастная устойчивость выполняется, (23а) знаменатель в (28) положительный. Таким образом (26) может быть записано как

$$\min_{S_{wo}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1 - |\tilde{\eta}| \bar{l}_m} \right|^e |\tilde{S}_{wo} x|^2 dw. \quad (29)$$

Из-за того, что контроллер R является в очень сложной манере в (29) имеется мало надежды найти простое решение этой проблемы.

Первый фактор в интеграле содержит ошибку модели. Из-за условия робастной устойчивости (25) интеграл всегда ограничен. Как ожидалось, наблюдаемая ошибка увеличивается по отношению к номинальной ошибке, когда достигается граница устойчивости.

H_{∞} - целевая функция качества.

Если показатель качества устанавливается в рамках H_{∞} , тогда мы будем требовать, чтобы (20) выполнялось для «наихудшего» объекта:

$$\max_{W \in \Pi} \|S_{wo} W_{век}\|_{\infty} = \max_{W \in \Pi} S_{up} |S_{wo} W_{век}| < 1 \quad (30)$$

или

$$\|S_{wo} W_{век}\|_{\infty} = S_{up} |S_{wo} W_{век}| < 1, \quad \forall w \in \Pi. \quad (31)$$

Используя (28а), соотношение (31) можно переписать как

$$\frac{|S_{wo} W_{век}|}{1 - |\tilde{\eta}| \bar{l}_m} < 1, \quad \forall w \quad (32)$$

или

$$|\tilde{\eta}| \bar{l}_m + |S_{wo} W_{век}| < 1, \quad \forall w. \quad (33)$$

Соотношение (33) представляет собой определение робастного качества. Как следует из (33), робастное качество включает робастную устойчивость (24а) и номинальное качество (20). Улучшая номинальное качество (уменьшая $|S_{wo} W_{век}|$), ухудшаем робастную устойчи-

вость (увеличение $|\tilde{\eta}l_m|$) и толкаем систему к границе устойчивости для некоторых $w \in \Pi$.

Контроллер, который оптимизирует робастное качество, имеет следующий критерий качества:

$$S_{up} \left(|\tilde{\eta}l_m| + |S_{w0}W_{sec}| \right) \Rightarrow \min. \quad (34)$$

Мы видим из (33), что можно связать робастное качество, просто удовлетворяя робастную устойчивость (24а) и номинальное качество (20). Если $|\tilde{\eta}l_m| < \alpha(w)$ и $|S_{w0}W_{sec}| < 1 - \alpha(w)$, где $\alpha \leq 1, \forall w$, тогда робастное качество автоматически гарантируется.

Синтез оптимальной робастной системы управления

В предыдущих разделах было дано определение робастности систем управления, которая характеризуется двумя понятиями: робастной устойчивостью и робастным качеством. Робастная устойчивость определяется в пространстве H_∞ (25). Робастное качество зависит от пространства функций H_2 или H_∞ . Робастное качество определяется в пространстве H_2 по соотношению (29), а робастное качество в пространстве H_∞ выражением (34).

Сформулируем задачу параметрического оптимального робастного регулятора. Здесь необходимо минимизировать критерий робастного качества в H_∞ (31) при условии соблюдения робастной устойчивости (25). Решение этой задачи довольно трудно. В связи с этим в работе [3] предлагается двухэтапная процедура. На первом этапе минимизируют критерий оптимальности номинального качества:

$$\|S_{w0}W_{sec}\|_2 \Rightarrow \min, \quad (35)$$

без учета робастности и ограничений на втором этапе вводится фильтр последовательно с регулятором с ПФ:

$$f(p) = \frac{k}{(Tp + 1)^n}, \quad (36)$$

т.е. в виде соотношения

$$q = \tilde{q} * f, \quad (37)$$

где q – регулятор в системе управления с внутренней моделью.

Рассмотрим задачу оптимального параметрического синтеза оптимального робастного ПИД-регулятора. В качестве критерия оптимальности возьмем номинальный критерий в пространстве H_2 :

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_{w0}(jw)|^2 |x(jw)|^2 dw \Rightarrow \min, \quad (38)$$

где $x(jw) = W_{sec}(jw)x'(jw)$

Если мы предполагаем на входе единичную ступенчатую функцию, тогда

$$x'(jw) = \{L\delta(jw) = 1\} \text{ и } W_{sec}(p) = \frac{1}{p} \quad (39)$$

Это идеальный случай. В реальности будем иметь:

$$x(p) = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \frac{p + \beta}{(p + \alpha)p}; \quad (40)$$

Модифицированный ступенчатый вход.

Будем использовать номинальный критерий (38) с входом в виде идеальной единичной ступенчатой функции:

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_{w_0}(j\omega)|^2 \left| \frac{1}{j\omega} \right|^2 d\omega \Rightarrow \min .$$

В качестве ограничений берем запас по модулю и фазе с ограничением по настройке ПИД-регулятора:

$$S_i^{\min} \leq S_i \leq S_i^{\max} ,$$

где $S_1 = k_n$, $S_0 = \frac{k_n}{T_n} \rightarrow S_2 = k_n T_D$, k_n – коэффициент пропорциональности; T_n – постоянная времени интегрирования, T_D – постоянная времени дифференцирования.

Определим запас по модулю и фазе.

Запас по модулю:

$$\arg[R(j\omega_\pi)w_0(j\omega_\pi)] = -\pi \tag{41}$$

$$A_m = \frac{1}{|R(j\omega_\pi)w_0(j\omega_\pi)|} . \tag{42}$$

Запас по фазе:

$$|R(j\omega_g)W_0(j\omega_g)| = 1 \tag{43}$$

$$\Phi_m = \arg[R(j\omega_g)W_0(j\omega_g)] + \pi . \tag{44}$$

Графически запас по модулю и фазе выглядит таким образом (рисунок 8)

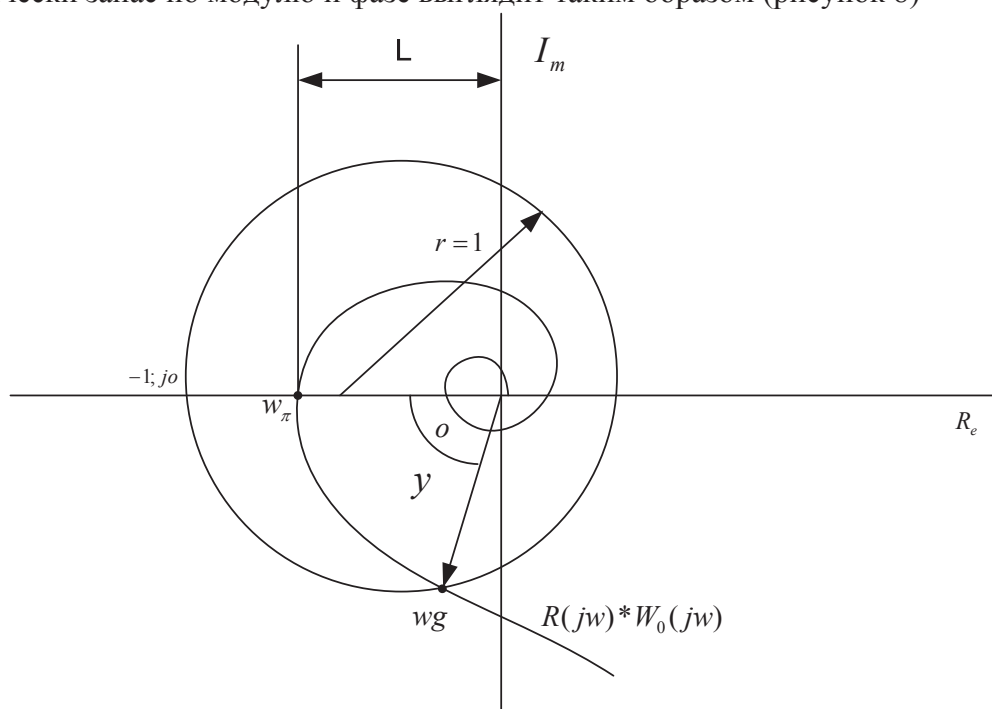


Рисунок 8

Здесь $L = |R(j\omega_\pi)W_0(j\omega_\pi)|$ расстояние до точки w_π пересечения годографа Найквиста с действительной осью Re .

Точка w_g пересечения единичной окружности с годографом. Итак, запас по модулю и

фазе соответствует системе четырех уравнений (41), (42), (43), (44). Запас по модулю A_m указывает, на сколько надо умножить вектор $L(w_\pi)$, чтобы он попал в точку $(-1, j0)$:

$$A_m L = 1 \quad A_m = 1/L \quad (45)$$

Из работы [2] известно, что значению запаса устойчивости по модулю и фазе соответствует допустимые отклонения постоянных времени T_j от допустимых значений, задаваемых неравенствами

$$\frac{1}{w\pi} \ll T_j \ll \frac{1}{w_g}, \quad (46)$$

которые соответствуют параметрической модели неопределенности для работоспособности системы. Если рассматривать частотную модель неопределенности то, можно представить частотно-зависимую функцию $l_m(w, 1/w_\pi, 1/w_g)$ как функцию граничных значений параметров $\frac{1}{w_\pi}, \frac{1}{w_g}$. Другими словами, запас устойчивости по модулю и фазе тесно связан с допустимыми отклонениями параметров.

Таким образом, задавая запас устойчивости мы характеризуем робастную устойчивость, определяемую неравенством (25).

Сформируем задачу оптимизации регулятора $R^{omn}(p)$ в замкнутой системе управления.

Необходимо минимизировать критерий оптимальности:

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon(jw)|^2 dw \Rightarrow \min \quad (47)$$

при ограничениях

$$A_m = \frac{1}{|R(jw) * W_0(jw)|} \geq A_{m\text{зад}} \quad (48)$$

$$\Phi_m = \arg[R(jw) * W_0(jw)] \geq \varphi_{m\text{зад}} \quad (49)$$

$$\underline{V}_i \leq V_i \leq \bar{V}_i \quad i = 1, 2, 3..n \quad (50)$$

Ограничение (50) характеризует параметрическую модель неопределенности, которая тесно связана с робастной устойчивостью и качеством. Рассмотрим пример задачи оптимизации при условии, что объектом управления является звено первого порядка с запаздыванием (3), а в качестве регулятора используется ПИД-регулятор.

$$R_{\text{ПИД}}(p) = k_n \frac{T_o T_n p^2 + T_n p + 1}{T_n(p)}. \quad (51)$$

Запишем критерий оптимальности (47) в развернутом виде с учетом схемы на рисунке 1:

$$\varepsilon(jw) = \frac{1}{1 + R_{\text{ПИД}}(jw)w_0(jw)} x(jw),$$

$$x(jw) = \{y_s(jw), Z(jw)\} \text{ вход в АСР}$$

Представим интеграл в следующем виде:

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1 + R_{II} K_o \frac{(T_D T_n j\omega + T_n j\omega + 1)e^{j\omega\tau}}{T_n j\omega(T_j\omega + 1)}} \right|^2 |x(j\omega)|^2 d\omega. \quad (52)$$

Используя понятие факторизованного вида, запишем (52) в другой форме:

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + R_{IIIД}(j\omega)W_o(j\omega)} \cdot \frac{1}{1 + R_{IIIД}(-j\omega)W_o(-j\omega)} \cdot x(j\omega)x(-j\omega)d\omega. \quad (53)$$

Возьмем интеграл (53) специальным таблицам для чего под интегралом используем только ПФ от $j\omega$:

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + R_{IIIД}(j\omega) * W_o(j\omega)} x(j\omega)d\omega, \quad (54)$$

что эквивалентно выражению:

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + R_{IIIД}(p) * W_o(p)} x(p)dp. \quad (55)$$

Примем, что вход $x(p)$ изменяется в форме единичной ступенчатой функции

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + R_{IIIД}(p) * W_o(p)} * W_{вес}(p) L\{x'(t)\},$$

где $W_{вес}(p) = \frac{1}{p} : L\{x'(t)\} = 1$

Для того чтобы привести подынтегральное выражение в (55) к табличному виду аппроксимируем $e^{-\tau p} = \frac{1 - 0,5p\tau}{1 + 0,5p\tau}$.

Учитывая эту аппроксимацию, представим подынтегральное выражение в виде:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + K_{II} K_o \frac{(T_D T_n p^2 + T_n p + 1)(1 - 0,5p\tau)}{T_n p(Tp + 1)(1 + 0,5p\tau)}} \frac{1}{p} dp = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T_n p(Tp + 1)(1 + 0,5p\tau)}{T_n p(Tp + 1)(1 + 0,5p\tau) + K_{II} K_o (T_D T_n p^2 + T_n p)(1 - 0,5p\tau)} \frac{1}{p} dp \\ d_3 &= 0,5(T_u T \tau - T_D T_n \tau * K_{II} K_o) \quad C_o = T_n \\ d_2 &= T T \tau + 0,5 T_n \tau + K_{II} K_o (T_D T_n - 0,5 T_u T \tau) \quad C_1 = T_u T + 0,5 T_u \tau \\ d_1 &= T_n \tau + K_{II} K_o (T_n - 0,5 \tau) \quad C_2 = 0,5 T_u T C \\ d_0 &= K_{II} K_o \end{aligned}$$

$$J_3 = \frac{C_2^2 d_0 d_1 + (C_1^2 - 2C_0 C_2) d_0 d_3 - C_0^2 d_2 d_3}{2d_0 d_3 (-d_0 d_3 + d_1 d_2)} - \text{значение табличного интеграла.}$$

Запас устойчивости по модулю и фазе

Определим значения модуля АФХ на частоте w_π :

$$L = |R_{\text{пид}}(jw\pi) * W_o(jw\pi)| = \left| \frac{T_D T_n jw^2 + T_n jw + 1}{T_n jw} \cdot \frac{k_o e^{-jw\tau}}{Tjw + 1} \right| = \left| k_n \cdot \frac{T_D T_n jw^2 + T_n jw + 1}{T_n jw} \right| \left| \frac{k_o e^{-jw\tau}}{Tjw + 1} \right| \quad (56)$$

Учитывая эту аппроксимацию, представим подынтегральное выражение в виде:

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + K_{\text{п}} K_o \frac{(T_D T_n p^2 + T_n p + 1)(1 - 0,5 p \tau)}{T_n p (Tp + 1)(1 + 0,5 p \tau)}} \frac{1}{p} dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T_n p (Tp + 1)(1 + 0,5 p \tau)}{T_n p (Tp + 1)(1 + 0,5 p \tau) + K_{\text{п}} K_o (T_D T_n p^2 + T_n p + 1)(1 - 0,5 p \tau)} \frac{1}{p} dp$$

$$d_3 = 0,5(T_u T \tau - T_D T_n \tau K_{\text{п}} K_o) \quad C_o = T_n$$

$$d_2 = T T \tau + 0,5 T_n \tau + K_{\text{п}} K_o (T_D T_n - 0,5 T_u T \tau) \quad C_1 = T_u T + 0,5 T_u \tau$$

$$d_1 = T_n \tau + K_{\text{п}} K_o (T_n - 0,5 \tau) \quad C_2 = 0,5 T_u T * \tau$$

$$d_0 = K_{\text{п}} K_o$$

$$J_3 = \frac{C_2^2 d_0 d_1 + (C_1^2 - 2C_0 C_2) d_0 d_3 - C_0^2 d_2 d_3}{2d_0 d_3 (-d_0 d_3 + d_1 d_2)} - \text{значение табличного интеграла.}$$

Запас устойчивости по модулю и фазе

Определим значение модуля АФХ на частоте w_π и найдем в (56) минимум действительной части:

$$K_{\text{п}} \left| \frac{T_D T_n jw^2 + T_n jw + 1}{T_n jw\pi} \right| = K_{\text{п}} \frac{|T_D T_n (jw)^2 + T_n jw + 1|}{|T_n jw\pi|} = K_{\text{п}} \frac{1 - T_D T_n w_\pi^2 + jw_\pi T_n}{T_n w_\pi} =$$

$$= K_{\text{п}} \frac{\sqrt{(1 - T_D T_n w_\pi^2)^2 + (T_n w_\pi)^2}}{T_n w_\pi} = K_{\text{п}} \frac{T_n w_\pi \sqrt{\left(\frac{1 - T_D T_n w_\pi^2}{T_n w_\pi}\right)^2 + 1}}{T_n w_\pi} = K_{\text{п}} \sqrt{\frac{1 - T_D T_n w_\pi^2}{T_n w_\pi} + 1}$$

$$K_u \left| \frac{e^{-jw\pi}}{Tjw\pi + 1} \right| = K_u \frac{1}{\sqrt{T^2 w_\pi^2 + 1}}$$

откуда получим:

$$A_m = \frac{\sqrt{T^2 w_\pi^2 + 1}}{K_{II} K_o \sqrt{\left(\frac{1 - T_D T_n w_\pi^2}{T_n w_\pi}\right)^2 + 1}}. \quad (57)$$

Представим уравнение фазовой характеристики для определенной частоты w_π :

$$\frac{\pi}{2} + \arctg \frac{T_n w_\pi}{1 - T_D T_n w_\pi^2} - \arctg T w_\pi - w_\pi \tau = 0 \quad (58)$$

Далее возьмем аппроксимацию функции $\arctg x$, в виде:

$$\arctg x \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4x}, \quad |x| > 1. \quad (59)$$

Такая аппроксимация приводит уравнение (58) к другому виду:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi(1 - T_D T_n w_\pi^2)}{4w_\pi T_n} + \frac{\pi}{4w_\pi T} - w_\pi \tau = 0. \quad (60)$$

Решим уравнение (60) относительно частоты w_π . В результате получим:

$$w_{\pi 1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \frac{(T_u - T)}{\pi T_\pi T}}}{T_0 - \frac{4}{\pi} \tau} \quad (61)$$

при условии

$$\frac{(T_u - T)(\pi T_\pi - 4T)}{\pi T_\pi T} \leq 0; \quad w_{\pi 1,2} \geq 0. \quad (62)$$

Перейдем к определению частоты w_c для фазочастотной характеристики:

$$|R_{III}(jw)W_u(jw)| = 1. \quad (63)$$

Подставляя в (63) значения $R_{III}(jw)$ и $W_u(jw)$, получим

$$K_{II} K_o \sqrt{\left(\frac{1 - T_D T_n w_g^2}{T_n w_g}\right)^2 + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{T^2 w_g^2 + 1}} = 1 \quad (64)$$

Примем условие $x \gg 1$, в (64) отсюда получим:

$$\begin{aligned} (K_{II} K_o) \frac{1 - T_D T_n w_g^2}{T_n w_g} \cdot \frac{1}{T w_g} &= 1 \\ (K_{II} K_o) (1 - T_D T_n w_g^2) &= T_n T w_g^2 \\ (K_{II} K_o) - K_{II} K_o T_n T_D w_g^2 &= T_n T w_g^2 \\ K_{II} K_o &= (K_{II} K_o T_n T_D + T_n T) w_g^2 \\ w_g &= \sqrt{\frac{K_{II} K_o}{K_{II} K_o T_n T_D + T_n T}} \end{aligned} \quad (65)$$

С учетом аппроксимации (59) запишем фазочастотную характеристику в другом виде:

$$\Phi_m = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi(1 - T_n T_D w_g^2)}{4w_g T_n} + \frac{\pi}{4w_g T} - w_g \tau. \quad (66)$$

Сформулируем задачу оптимизации:

$$J(S, \underline{V}) \Rightarrow \min \quad (67)$$

при условии:

$$w_\pi = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \frac{(T_u - T)(\pi T_D - 4\tau)}{\pi T_\pi T}}}{T_0 - \frac{4}{\pi} \tau} \geq 0 \quad (68)$$

$$\frac{(T_u - T)(\pi T_D - 4\tau)}{\pi T_\pi T} \leq 1 \quad (69)$$

$$A_m = \frac{\sqrt{T^2 w_\pi^2 + 1}}{K_\Pi K_o \sqrt{\left(\frac{1 - T_D T_n w_\pi^2}{T_n w_\pi}\right)^2 + 1}} \approx \frac{T w_\pi}{K_\Pi K_o \left(\frac{1 - T_D T_n w_\pi^2}{T_n w_\pi}\right)} \geq A_{m3} \quad (70)$$

$$w_g = \sqrt{\frac{K_\Pi K_o}{K_\Pi K_o T_n T_D + T_n T}} \quad (71)$$

$$\Phi_m = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi(1 - T_n T_D w_g)}{4wgT_n} + \frac{\pi}{4wgT} - w_g \tau \geq \Phi_{m3} \quad (72)$$

$$T_u^{\min} \leq T_u \leq T_u^{\max}; K_\Pi^{\min} \leq K_\Pi \leq K_\Pi^{\max}; T_g^{\min} \leq T_g \leq T_g^{\max}$$

$$\boxed{S_1 = K_\Pi; S_2 = T_g; S_0 = T_u}$$

$$\psi_{si} = (S_i - S_i^{\min})(S_i - S_i^{\max}) \quad i = 0, 2, 22$$

$$\psi_s(S) = \sum_{i=1}^3 (\psi_{si} + |\psi_{si}|) \quad (73)$$

при условии, что $\underline{V}j = (T, k_o, \tau) \quad j = 1, 2, 3$

Далее, используя понятие штрафных функций сформулируем критерий, который надо минимизировать относительно параметров настроек ПИД – регулятора (T_u, T_D, K_Π) при номинальных значениях параметров объекта (K_0^H, T^H, τ^H) с учетом ограничений на запас устойчивости по модулю и фазе:

$$\begin{aligned} \tilde{J} = & J(S, V) + 100(1 - \text{sign}(A_m - A_{m3})) + 100(1 - \text{sign}(\Phi_m - \Phi_{m3})) + \\ & + 100 \left(1 + \text{sign} \left(\frac{(T_n - T)(T_D - 4\pi)}{\pi T_u T} \geq 0 \right) \right) + 100 \left(1 - \text{sign} \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \frac{(T_u - T)(\pi T_D - 4\tau)}{\pi T_n T}}}{T_D - \frac{4}{\pi} \tau} \right) + \\ & + 100 \sum_{i=1}^3 (\psi_{si} + |\psi_{si}|) \Rightarrow \min \quad (74) \end{aligned}$$

$$\psi_{si} = (S_i - S_i^{\min})(S_i - S_i^{\max}) \text{ при } V(K_0^H, T^H, \tau^H) = \text{const.}$$

$$w_\pi = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{(T_u - T)(\pi T_D - 4\tau)}{\pi T_n \tau}}}{T_D - 4\tau/\pi}, \quad (75)$$

$$w_g = \sqrt{\frac{K_{\Pi} K_o}{K_{\Pi} K_o T_n T_D + T_n T}}, \quad (76)$$

$$A_m = \frac{T w_{\pi}}{K_{\Pi} K_o \left(\frac{1 - T_D T_n w_{\pi}^2}{T_n w_{\pi}} \right)} \geq A_{m3}, \quad (77)$$

$$\Phi_m = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi(1 - T_n T_D w_g)}{4 w_g T_n} + \frac{\pi}{4 w_g T} - w_g \tau \geq \Phi_{m3}. \quad (78)$$

В результате получим оптимальные значения настроек ПИД – регулятора T_u^K, T_D^K, K_{Π}^K при $k=1, 2, 3, 4, \dots$ при значении параметров объекта K_0^K, T^K, τ^K ; $k=1 K_0 = K_0^H, T = T^H, \tau = \tau^H$;

Варьируемый объект, как противник, всегда стремится увеличить критерий оптимальности J , уменьшить запас устойчивости по модулю и фазе. При фиксированном S задача ухудшения параметров объекта имеет вид:

$J(\underline{S}, V) \Rightarrow \max$; $A_m \rightarrow \min$; $\Phi_m \rightarrow \min$, при условии параметрической модели неопределенности $\underline{V}_i \leq V_i \leq \bar{V}_i$, которые образуют штрафные функции:

$$\psi_v(V) = \sum_{j=1}^3 (\psi_{v_j} + |\psi_{v_j}|), \quad (79)$$

где $\psi_{v_i} = (v_i - v_i^{\min})(v_i - v_i^{\max})$.

Сформулируем задачу ухудшения объекта:

$$J_o(v) = [-J(\underline{S}, V)] + A_m(\underline{S}, V) + \Phi_m(\underline{S}, V) + 100 * \psi_v(v) \Rightarrow \min \quad (80)$$

$$\max J(\underline{S}, V) = \min(-J(\underline{S}, V)).$$

В результате минимизации (80) определяются наихудшие параметры объекта V^{k+1} , которые дают минимум критерия $J_o(\underline{v}^k)$.

После чего можно найти разность $\delta = J_o(\underline{v}^{k+1}) - J_o(\underline{v}^k)$, если $\delta < \varepsilon$, то можно принять за решение задачи S^{k+1} и v^{k+1} за наихудшие параметры объекта $k=1, 2, 3, 4, \dots$

Полученные \underline{S}^k – параметры настройки ПИД – регулятора на k -м шаге итерации.

Таким образом, будут найдены оптимальные робастные настройки ПИД – регулятора рассчитанные на наихудший объект.

Литература

1. Morari M., Zafiriou E. Robust Process Control, 1989.
2. Поляк Б.Г., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. -М.:«Наука», 2002
3. Александров А.Г. Синтез регуляторов многомерных систем. -М.: Машиностроение, 1986.
4. Теория автоматического управления. Учебник для вузов. Под ред. В.Б. Яковлева
5. Мань Н.В. Оптимизация настройки робастных регуляторов с помощью оврагоперешагового алгоритма нелинейной минимизации. Теплоэнергетика, 1995.
6. Ho, W.K., Hang, C.C., Cao, L.S.: Tuning of PID controllers based on gain and phase margin specifications. Automatica 31, 497–502 (1995)