

---

**Исследование течения вязкой жидкости применительно к расчёту  
гранулятора роторного типа**

к.т.н. проф. Александрова С.Г., к.т.н. доц. Серов М.В., доц. Аверьянова Г.М.  
Университет машиностроения  
8(495)223-05-23, tm@mami.ru

*Аннотация.* В статье рассмотрено течение вязкой жидкости в криволинейном клине с пористой граничной поверхностью гранулятора роторного типа. По полученным теоретическим зависимостям построены графики распределения давления по длине рабочего клина гранулятора. Полученные данные позволяют рекомендовать расчетные зависимости для оценки производительности грануляторов рассмотренного вида.

*Ключевые слова:* вязкая жидкость, криволинейный клин с пористой граничной поверхностью, уравнение Навье-Стокса, гранулятор роторного типа

**Введение**

Автоматизация и механизация технологических процессов в промышленности предъявляет к твёрдому сырью определённые требования, такие как хорошая сыпучесть, отсутствие пыления, снижение загрязнения и комкования, транспортабельность, способность дозироваться на различных автоматических весовых устройствах и т.д. Всем этим требованиям отвечают продукты, выпускаемые в гранулированном виде. Гранулирование приобретает всё большее значение в производстве удобрений, лекарственных препаратов, химикатов. Оно создаёт более благоприятные условия для сушки, обжига, каталитических и адсорбционных процессов.

Широкое распространение гранулированных материалов в промышленности требует создания качественных гранулирующих аппаратов.

Существует большое количество методов и способов получения гранулированных продуктов, вырабатываемых на грануляторах различных типов. Тип гранулятора может различаться в зависимости от принципа образования гранул, от свойств перерабатываемого продукта, от конструктивных особенностей машин и т.д.

Одним из наиболее распространенных типов грануляторов являются аппараты, работающие по принципу механического образования гранул. Их можно разделить на две основные группы: грануляторы без силового воздействия на продукт со стороны рабочих органов и грануляторы с силовым воздействием на продукт со стороны рабочих органов.

В дальнейшем будем рассматривать только грануляторы с силовым воздействием на продукт, работающие по принципу механического образования гранул. Силовое воздействие может передаваться валками, лопастями различной формы, башмаками, системой пуансон-матрица и т.д.

Несмотря на то, что такие грануляторы широко используются в промышленности, вопросы, связанные с проектированием и разработкой их конструктивных особенностей, как правило, основываются на эмпирических зависимостях, что часто затрудняет количественную оценку влияния тех или иных параметров на режим грануляции.

Поэтому актуальной задачей является проведение теоретических исследований на основании изучения течения вязко-пластичных материалов в рабочих органах грануляторов различного типа.

В работе [1] рассматривается решение указанной задачи для одного из наиболее распространенных типов грануляторов с механическим воздействием на продукт, каким является гранулятор валкового типа. Рабочими органами такого гранулятора являются перфорированные валки, вращающиеся с одинаковой угловой скоростью в противоположные стороны. Перерабатываемая масса подаётся в зазор между валками, где срезается ножами и удаляется. Рабочей зоной, определяющей производительность гранулятора, является широкий криволи-

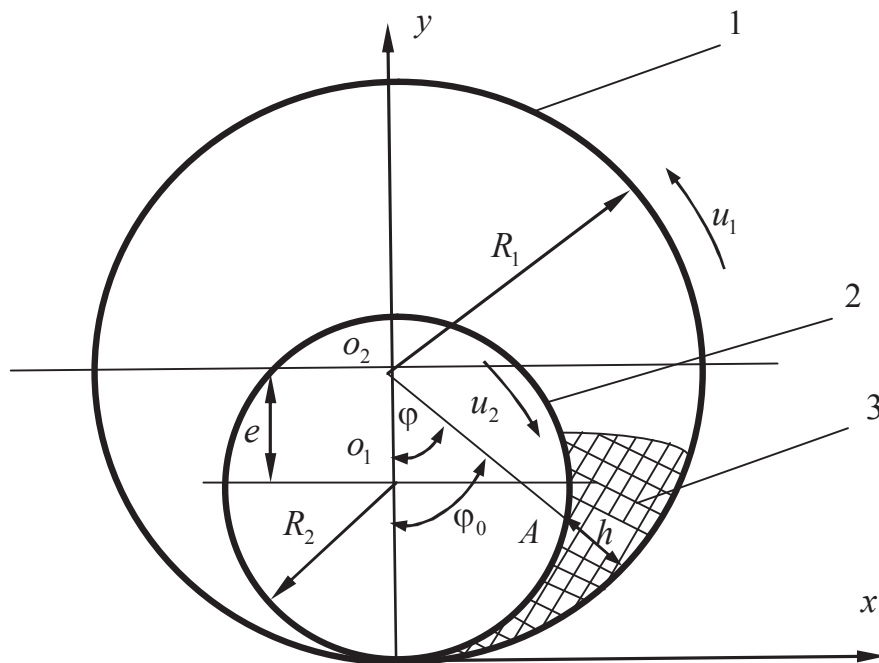
нейный клин с пористыми граничными поверхностями. Для определения производительности гранулятора необходимо выявить картину распределения давления в указанной зоне.

В работе [1] рассматривается двумерное течение вязкой жидкости ньютоновского типа в зазоре между валками.

Целью данной работы является выявление аналитических зависимостей распределения величин давления, описывающих основной процесс, происходящий в рабочей полости гранулятора роторного типа. Полученные данные распределения давления в указанной зоне позволяют рекомендовать их для оценки производительности грануляторов рассмотренного вида.

### Постановка задачи

В данной работе рассматривается одномерное течение вязкой жидкости в клиновом зазоре гранулятора роторного типа с механическим воздействием на продукт, принципиальная расчётная схема которого представлена на рис. 1. Рабочими органами гранулятора роторного типа являются перфорированный рабочий цилиндр 1 и ротор 2, вращающиеся с разными угловыми скоростями в противоположные стороны. Перерабатываемая масса 3 подаётся в зазор между перфорированным рабочим цилиндром и ротором.



**Рисунок 1. Расчётная схема гранулятора роторного типа**

Рабочей зоной, определяющей производительность гранулятора, является широкий криволинейный клин с пористыми граничными поверхностями рабочего цилиндра. Для определения производительности гранулятора необходимо выявить картину распределения давления в указанной зоне.

Задача решается в предположении, что течение жидкости установившееся, изотермическое и плоскопараллельное. Инерционными членами и объемными силами по сравнению с членами, содержащими вязкость, пренебрегаем. Так как толщина клина невелика, то  $v_x \ll v_y$ .

Вследствие прилипания жидкости к стенке  $\frac{\partial v_x}{\partial x} \ll \frac{\partial v_y}{\partial y}$ .

### Результаты исследования

С учётом вышеуказанных допущений исходные уравнения Навье-Стокса для данного случая имеют вид [2]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

где:  $v_x, v_y$  - проекции скорости на неподвижные оси координат (рисунок 1);  $\mu$  - динамический коэффициент вязкости;  $p$  - избыточное давление в слое жидкости.

Граничные условия для случая полного прилипания жидкости к поверхностям, образующим клин, будут:

$$\text{при } \left. \begin{aligned} y=0 & \quad v_x = +u_1; \quad v_y = -\lambda p, \\ x=0 & \quad v_x = -u_2; \quad v_y = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\text{при } x=0 \quad \text{и} \quad x=R_2 \cdot \varphi = a; \quad p = p_0, \quad (4)$$

где:  $u_1$  и  $u_2$  — окружные скорости перфорированного рабочего цилиндра и ротора;  $\lambda$  — коэффициент пористости, характеризующий скорость продавливания перерабатываемой массы внутрь рабочего цилиндра.

В граничном условии (3) локальная скорость выдавливания жидкости через перфорированный рабочий цилиндр гранулятора принята пропорциональной избыточному давлению  $p$  в рассматриваемой точке с постоянным коэффициентом пропорциональности  $\lambda$  [3].

Выразим толщину клина  $h$  через другие параметры гранулятора:

$$h = R_1 - O_2A; \quad O_2A = \sqrt{R_2^2 + e^2 + 2R_2e \cos \phi}, \quad (5)$$

где:  $R_1$  — радиус перфорированного рабочего цилиндра;  $R_2$  — радиус ротора;  $e$  — эксцентриситет.

Раскладывая  $O_2A$  в ряд Маклорена и ограничиваясь членом, содержащим  $\varphi^2$ , получим следующее выражение для толщины клина  $h$ :

$$h = R_1 - R_2 - e + \frac{\varphi^2 R_2 e}{2(R_2 + e)}. \quad (6)$$

Обозначим  $R_1 - R_2 - e = h_0$ , тогда:

$$h = h_0 + \frac{\varphi^2 R_2 e}{2(R_2 + e)}, \quad (7)$$

где:  $h_0$  — минимальная толщина клина.

В случае тонкого клина, когда  $e \ll R_2$ , имеем  $R_2 + e \approx R_2$ .

Тогда (7) примет вид:

$$h = h_0 + \frac{\varphi^2 e}{2}. \quad (8)$$

Интегрируя уравнение (1) при граничных условиях (3), получаем:

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - hy) + \frac{u_1 - u_2}{h} y + u_1. \quad (9)$$

Для вычисления производной  $\frac{\partial p}{\partial x}$  проинтегрируем уравнение неразрывности (2) в пределах от 0 до  $h$  и, проведя последующее дифференцирование, получим следующую зависимость для определения давления  $p$ :

$$\lambda p = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h^3}{6} + (u_2 - u_1) h \right]. \quad (10)$$

Переходя к новой переменной  $\varphi$ , связанной с  $x$  соотношением (4)  $x = R_2 \varphi$ , и обозначая  $\beta = \sqrt{\frac{e}{2h_0}} \varphi$ , получим для определения давления  $p$  следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d}{d\beta} \left[ (1 + \beta^2)^3 \frac{dp}{d\beta} \right] - \frac{24\mu\lambda R_2^2}{e h_0^2} p = -\frac{12\mu R_2}{h_0^2} \sqrt{\frac{2h_0}{e}} (u_2 - u_1) \beta + \frac{2u_2}{R_2 h_0 e} \sqrt{\frac{2e}{h_0}} \beta. \quad (11)$$

Обозначим

$$a_1 = \frac{24\mu\lambda R_2^2}{e h_0^2}; \quad (12)$$

$$a_2 = \frac{12\mu R_2}{h_0^2} \sqrt{\frac{2h_0}{e}} (u_2 - u_1) \beta - \frac{2u_2}{R_2 h_0 e} \sqrt{\frac{2e}{h_0}} \beta.$$

Тогда уравнение (11) примет вид:

$$\frac{d}{d\beta} \left[ (1 + \beta^2)^3 \frac{dp}{d\beta} \right] - a_1 p = -a_2 \beta. \quad (13)$$

Определяющим уравнением однородного дифференциального уравнения (13) является

$$\left[ \alpha(\alpha - 1) + \frac{6\alpha\beta(1 + \beta^2)^2\beta}{(1 + \beta^2)^3} - \frac{\beta^2 a_1}{(1 + \beta^2)^3} \right]_{\beta \rightarrow 0} = 0, \quad (14)$$

откуда  $\alpha_1 = 0$ ;  $\alpha_2 = 1$ .

В случае  $\alpha_1 = 0$  решение уравнения (13) ищем в виде:

$$p_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \beta^n. \quad (15)$$

Коэффициенты этого ряда имеют вид:

$$A_0 = 1;$$

$$A_n = \frac{1}{n} \left\{ \left[ \frac{a_1}{n-1} - 3(n-2) \right] A_{n-2} - 3(n-4) A_{n-4} - (n-6) A_{n-6} \right\}, \quad (16)$$

где  $n = 2, 4, 6, \dots$

В случае  $\alpha_2 = 1$  решение уравнения (13) ищем в следующем виде:

$$p_2 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \beta^{n+1}. \quad (17)$$

Коэффициенты ряда вычисляются по следующим формулам:

$$B_0 = 1; \\ B_n = \frac{1}{n} \left\{ \left[ \frac{a_1}{n} B_{n-1} - 3(n-1) \right] B_{n-2} - 3(n-3) B_{n-4} - (n-5) B_{n-6} \right\} \quad (18)$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$

Будем искать частное решение неоднородного дифференциального уравнения (11) в виде:

$$p_3 = \sum_{n=0}^{\infty} N_n \beta^{n+1}. \quad (19)$$

Коэффициенты этого ряда выражаются следующим образом:

$$N_0 = 1; \quad N_2 = \frac{a_1}{2}; \quad N_3 = \frac{1}{6} [(a_1 - 6) - a_2]; \\ N_n = \frac{1}{n} \left\{ \left[ \frac{a_1}{n-1} - 3(n-2) \right] N_{n-2} - 3(n-4) N_{n-4} - (n-6) N_{n-6} \right\}, \quad (20)$$

где  $n = 4, 5, \dots$

Общим решением уравнения (13) будет:

$$p = C_1 p_1 + C_2 p_2 + p_3. \quad (21)$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  находятся из граничных условий:

$$\begin{aligned} \varphi = 0 & \quad p = p_0; \\ \text{при} & \\ \varphi = \varphi_0 & \quad p = p_0. \end{aligned} \quad (22)$$

По полученной зависимости (21) для давления в рабочем клине гранулятора роторного типа произведён численный расчет на ЭВМ при следующих данных:

$$R_1 = 16 [см]; \quad R_2 = 11 [см]; \quad e = 4 [см]; \quad h_0 = 1 [см]; \\ \mu = 5 \cdot 10^4 [нз]; \quad \lambda = 1,27 \cdot 10^{-7} \left[ \frac{сек \cdot см}{г} \right]; \quad d = 5 [мм]; \quad (23)$$

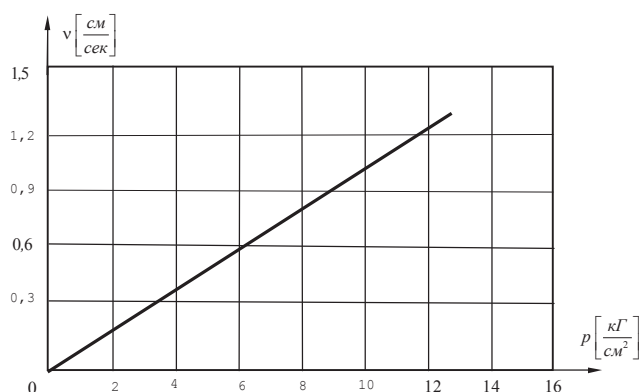
$$u_2 = 5,75 \left[ \frac{см}{сек} \right]; \quad u_1 = 0.$$

Реологические константы жидкости  $\mu$  и  $n$  определялись с помощью капиллярного вискозиметра. Для ньютоновской жидкости  $n = 1$ .

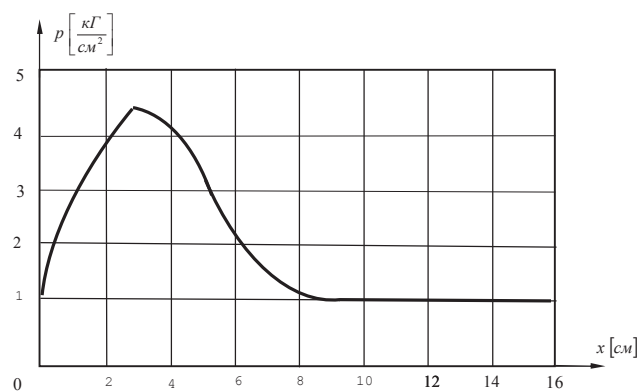
Коэффициент пористости  $\lambda$  определялся опытным путём [3]. Для этого исследуемую жидкость продавливали через канал диаметром 5 [мм] и длиной 10 [мм] (канал аналогичен перфорации рабочего цилиндра роторного гранулятора).

Результаты экспериментальных исследований представлены на графике зависимости давления жидкости в канале от скорости продавливания, представленном на рисунке 2.

Кривая распределения давления по длине клина гранулятора роторного типа имеет вид, представленный на рисунке 3. Проведённые исследования показали, что на основании установленного для давления соотношения (21) можно рассчитывать производительность гранулятора рассмотренного типа.



**Рисунок 2. График зависимости давления жидкости в канале от скорости продавливания**



**Рисунок 3. Кривая распределения давления по длине клина гранулятора роторного типа**

### Заключение

Проведены теоретические исследования одномерного течения вязкой жидкости ньютоновского типа в клиновом зазоре с пористыми граничными поверхностями рабочего цилиндра гранулятора роторного типа на основе точного решения уравнений Навье-Стокса.

Выявлены аналитические зависимости распределения величин давления, описывающих основной процесс, происходящий в рабочей полости гранулятора роторного типа. Полученные данные распределения давления в указанной зоне позволяют рекомендовать их для оценки производительности грануляторов рассмотренного вида.

Показано, что предлагаемая одномерная теория течения ньютоновских жидкостей в грануляторах роторного типа может быть использована для расчётов производительности грануляторов в первом приближении.

### Литература

- Александрова С.Г., Серов М.В., Аверьянова Г.М. Исследование двумерного течения вязких жидкостей в рабочих органах гранулятора валкового типа. //Химическое и нефтегазовое машиностроение. 2013, №5, с.17-19.
- Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. М.: Гос. издат. технико-теоретич. литер., 1951, 420 с.
- Александрова С.Г., Серов М.В., Аверьянова Г.М. Экспериментальное исследование зависимости коэффициента пористости формующей решетки гранулятора. Математические методы в технике и технологиях.–ММТТ-26: сб. трудов XXVI Междунар. науч. конф.: в 10 т. Т.7. Секция 14/ под общ. ред. А.А. Большакова. Нижний Новгород: Нижегород. Гос. Техн. ун-т, 2013.-68 с.