

**Математическая модель динамики существенно нелинейной управляемой механической системы**

д.т.н. проф. Божкова Л.В., к.т.н. доц. Норицина Г.И., к.т.н. проф. Рябов В.Г., Акульшина Т.В.  
 Университет машиностроения  
 8(495)223-05-23, tm@mami.ru

*Аннотация.* Построена математическая модель динамики существенно нелинейной управляемой механической системы на примере промышленного робота типа «SKILAM» с учетом сухого трения в кинематических парах манипулятора робота и динамических характеристик двигателей. В основу решения положены принципы Даламбера и Даламбера-Лагранжа. При этом был применен аппарат матриц преобразования однородных координат.

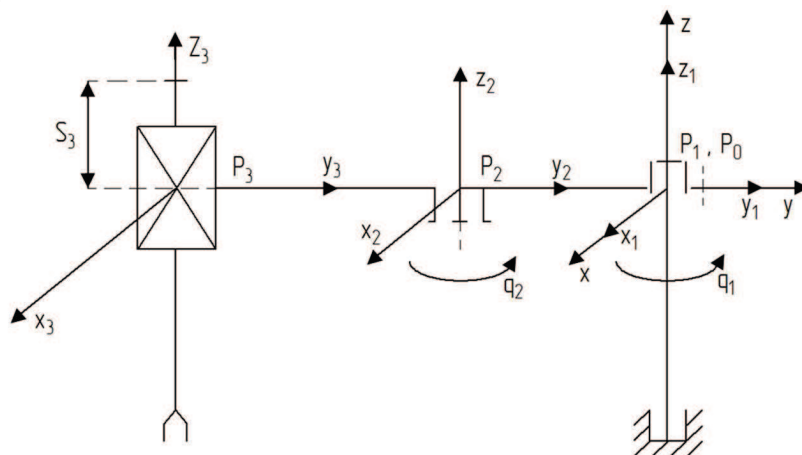
*Ключевые слова:* робот, манипулятор, кинематическая пара, трение, сила инерции

Примером существенно нелинейной управляемой механической системы является манипулятор промышленного робота. Учет сил сухого трения (трения скольжения) в сочленениях звеньев манипулятора (в кинематических парах) усложняет эту и без того достаточно сложную нелинейную механическую систему. Практически отсутствуют исследования динамики манипуляторов роботов с учетом сухого трения в кинематических парах.

Как следует ожидать, уравнения динамики манипуляторов при учете сухого трения будут нелинейными относительно обобщенных ускорений, что значительно усложняет их решения. Кроме того, наличие сил трения в кинематических парах приведет к динамической зависимости тех звеньев манипулятора, движения которых в случае отсутствия сил трения являются динамически независимыми. Данный факт следует учитывать при проектировании системы управления для роботов, требующих по своему технологическому назначению особо высокую точность позиционирования.

Таким образом, математическая модель динамики существенно нелинейной управляемой механической систем, построенная на примере манипулятора робота, позволяет не только проводить теоретические исследования в области нелинейной механической системы со многими степенями свободы, но также стать основой при проектировании системы управления робота.

Построим математическую модель динамики манипулятора промышленного робота типа «SKILAM» с учетом сухого трения в кинематических парах и с учетом динамических характеристик двигателей.



**Рисунок 1. Кинематическая схема манипулятора промышленного робота «SKILAM»**

Рабочими движениями манипулятора данного робота являются вращения первых двух звеньев вокруг вертикальных осей и поступательное перемещение в вертикальном направлении третьего звена, несущего хват (рисунок 1).

Первые два звена манипулятора приводятся в движение электродвигателями постоянного тока через волновые редукторы. Электродвигатели и волновые редукторы расположены на осях вращения звеньев (оси вращения роторов двигателей совпадают с осями вращения звеньев). Третье звено приводится в движение пневмоприводом. На этапе транспортировки груза будем считать рабочий орган (схват) жестко связанным с третьим звеном.

В этом случае манипулятор робота будет иметь три степени свободы. За обобщенные координаты рассматриваемой механической системы выберем параметры  $q_1, q_2, s_3$ , определяющие перемещение одного звена манипулятора относительно предыдущего (рис.1).

В основу определения реакций в кинематических парах, а также построения дифференциальных уравнений движения системы положим соответственно принципы Даламбера и Даламбера-Лагранжа [1].

Напомним, что составление уравнений кинестатики, в основе которых лежит принцип Даламбера, для механической системы связано введением сил инерции. Силы инерции каждого звена приведем к его центру масс и заменим главным вектором и главным моментом относительно центра масс.

Главный вектор сил инерции каждого звена (твердого тела) определяется соотношением [1]:

$$\bar{R}_i^{un} = -m_i \bar{a}_{c_i} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где:  $\bar{a}_{c_i}$  ( $i = 1, 2, 3$ )- абсолютное ускорение центра масс соответствующего звена,  
 $m_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )- массы звеньев.

Главный момент сил инерции каждого из звеньев можно представить в виде [1]:

$$\bar{M}_c^{un} = - \left[ \frac{d' \bar{K}_{c_i}}{dt} + \bar{\omega}_i \times \bar{K}_{c_i} \right] \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2)$$

где:  $\bar{K}_{c_i}$  - кинетический момент  $i$ -го звена относительно его центра масс,

$\frac{d' \bar{K}_{c_i}}{dt}$  - локальная производная вектора кинетического момента по времени,

$\bar{\omega}_i$  - абсолютная угловая скорость  $i$ -го звена.

При определении реакций в кинематических парах манипулятора применим аппарат матриц преобразования однородных координат [2]. С этой целью свяжем жестко со звеньями манипулятора системы координат  $\rho_i x_i y_i z_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), оси которых являются главными осями инерции соответствующих звеньев. Система координат  $\rho_0 x y z$  является неподвижной (рисунок 1).

Проекция абсолютного ускорения центра масс  $i$ -го звена  $\bar{a}_{c_i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) на неподвижные оси координат могут быть определены по формуле [3]:

$$\{\bar{a}_{c_i}\} = [\ddot{B}_i] \{\bar{\rho}_{c_i}\}, \quad (3)$$

где:  $[B_i]$  - матрица, определяющая положение системы координат, связанной с  $i$ -ым звеном, относительно неподвижной системы координат;

$[\ddot{B}_i]$  - матрица, элементы которой являются вторыми производными по времени элементов матрицы  $[B_i]$ ;

$\{\bar{\rho}_{c_i}\}$  - радиус-вектор центра масс  $i$ -го звена в системе координат, связанной с этим звеном.

Для построения матриц  $[B_i]$  ( $i=1,2,3$ ) имеет место следующее рекуррентное соотношение [2]:

$$[B_i] = [B_{i-1}][A_i] \quad (i=1,2,3), \quad (4)$$

где:  $[B_0]$  - единичная матрица,

$[A_i]$  ( $i=1,2,3$ ) - матрицы, определяющие положение системы координат, связанной с  $i$ -ым звеном, в системе координат, связанной с предыдущем  $i-1$ -ым звеном.

Для рассматриваемой механической системы матрицы  $[A_i]$  ( $i=1,2,3$ ) имеют следующий вид:

$$[A_1] = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[A_2] = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & 0 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 & -l_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$[A_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -l_2 \\ 0 & 0 & 1 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где:  $l_1$  и  $l_2$  - длины соответственно первого и второго звеньев манипулятора.

Таким образом, на основании (1) с учетом (3)-(5) можно найти проекции главного вектора сил инерции каждого из звеньев манипулятора на оси неподвижной системы координат:

$$\{\bar{R}_1^{un}\} = \{-m_1(|P_1C_1|\sin q_1 \cdot \dot{q}_1^2 + |P_1C_1|\cos q_1 \ddot{q}_1);$$

$$-m_1(|P_1C_1|\cos q_1 \cdot \dot{q}_1^2 + |P_1C_1|\sin q_1 \ddot{q}_1); 0; 0\}^*, \quad (6)$$

$$\{\bar{R}_2^{un}\} = \{-m_2[|P_2C_2|\cos(q_1 + q_2)(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) - |P_2C_2|\sin(q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 +$$

$$+ l_1 \cos q_1 \ddot{q}_1 - l_1 \sin q_1 \dot{q}_1^2]; -m_2[|P_2C_2|\sin(q_1 + q_2)(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) +$$

$$|P_2C_2|\cos(q_1 + q_2) \cdot (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + l_1 \sin q_1 \ddot{q}_1 + l_1 \cos q_1 \cdot \dot{q}_1^2]; 0; 0\}^* \quad (7)$$

$$\{\bar{R}_3^{un}\} = \{-m_3[-l_2 \sin(q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + l_2 \cos(q_1 + q_2)(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) +$$

$$+ l_1 \cos q_1 \ddot{q}_1 - l_1 \sin q_1 \dot{q}_1^2]; -m_3[l_2 \cos(q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 +$$

$$+ l_2 \sin(q_1 + q_2) \cdot (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + l_1 \sin q_1 \ddot{q}_1 + l_1 \cos q_1 \cdot \dot{q}_1^2]; -m_3 \ddot{s}_3; 0\}^*, \quad (8)$$

где:  $|P_1C_1|$  и  $|P_2C_2|$  - расстояние центров масс соответственно первого и второго звеньев манипулятора от их собственных осей вращения.

Следует отметить, что при определении главных векторов сил инерции массы двигателей включены в массы тех звеньев манипулятора, на которых они расположены.

Символ звездочки (\*) в (6)–(8) обозначает операцию транспортирования вектора.

Компоненты главных векторов сил инерции звеньев манипулятора в локальных системах координат, связанных с некоторыми из звеньев, определим на основании следующего соотношения:

$$\{\bar{R}_i^{un}\}^{(j)} = [B_j]^{-1} \{\bar{R}_i^{un}\}, \quad (9)$$

где:  $\{\bar{R}_i^{un}\}^j$  - компоненты главного вектора сил инерции  $i$ -го звена в системе координат, связанной с  $j$ -ым звеном,

$[B_j]^{-1}$  - матрица, обратная матрице  $[B_j]$ .

Таким образом, на основании (9) с учетом (6)–(8) получим:

$$\{\bar{R}_1^{un}\}^{(1)} = \{-m_1 |P_1 C_1| \ddot{q}_1; -m_1 |P_1 C_1| \cdot \dot{q}_1^2, 0, 0\}^*, \quad (10)$$

$$\{\bar{R}_2^{un}\}^{(1)} = \left\{ -m_2 \left[ l_1 \ddot{q}_1 - |P_2 C_2| \sin q_2 \cdot (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + |P_2 C_2| \cos q_2 \cdot (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \right]; \right. \\ \left. -m_2 \left[ |P_2 C_2| \sin q_2 \cdot (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + |P_2 C_2| \cos q_2 \cdot (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + l_1 \dot{q}_1^2 \right]; 0; 0 \right\}^* \quad (11)$$

$$\{\bar{R}_3^{un}\}^{(1)} = \left\{ -m_3 \left[ -l_2 \sin q_2 \cdot (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + l_1 \ddot{q}_1 + l_2 \cos q_2 \cdot (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \right]; \right. \\ \left. -m_3 \left[ l_2 \cos q_2 \cdot (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + l_2 \sin q_2 \cdot (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + l_1 \dot{q}_1^2 \right]; -m_3 \ddot{s}_3, 0 \right\}^* \quad (12)$$

$$\{\bar{R}_2^{un}\}^{(2)} = \left\{ -m_2 \left[ |P_2 C_2| \cdot (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + l_1 \cos q_2 \cdot \ddot{q}_1 + l_1 \sin q_2 \cdot \dot{q}_1^2 \right]; \right. \\ \left. -m_2 \left[ |P_2 C_2| (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 - l_1 \sin q_2 \cdot \ddot{q}_1 + l_1 \cos q_2 \cdot \dot{q}_1^2 \right]; 0, 0 \right\}^* \quad (13)$$

$$\{\bar{R}_3^{un}\}^{(2)} = \left\{ -m_3 \left[ l_2 \cdot (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + l_1 \cos q_2 \cdot \ddot{q}_1 + l_1 \sin q_2 \cdot \dot{q}_1^2 \right]; \right. \\ \left. -m_3 \left[ l_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 - l_1 \sin q_2 \cdot \ddot{q}_1 + l_1 \cos q_2 \cdot \dot{q}_1^2 \right]; -m_3 \ddot{s}_3; 0 \right\}^* \quad (14)$$

$$\{R_3^{un}\}^{(3)} = \{\bar{R}_3^{un}\}^{(2)}. \quad (15)$$

Необходимо также найти компоненты главных моментов сил инерции роторов двигателей и звеньев манипулятора в локальных системах координат, связанных со звеньями.

Если взять за центры приведения сил инерции звеньев и роторов двигателей их центры масс, то согласно (2) получим следующие выражения для проекций главного момента сил инерции на главные центральные оси координат, связанные со звеньями:

$$M_{c_i x_i}^{un} = - \left[ I_{c_i x_i}^{(i)} \dot{\omega}_{x_i} + \left( I_{c_i z_i}^{(i)} - I_{c_i y_i}^{(i)} \right) \omega_{y_i} \omega_{z_i} \right]; \\ M_{c_i y_i}^{un} = - \left[ I_{c_i y_i}^{(i)} \dot{\omega}_{y_i} + \left( I_{c_i x_i}^{(i)} - I_{c_i z_i}^{(i)} \right) \omega_{x_i} \omega_{z_i} \right]; \\ M_{c_i z_i}^{un} = - \left[ I_{c_i z_i}^{(i)} \dot{\omega}_{z_i} + \left( I_{c_i y_i}^{(i)} - I_{c_i x_i}^{(i)} \right) \omega_{x_i} \omega_{y_i} \right]. \quad (16)$$

Здесь  $\dot{\omega}_{x_i}, \dot{\omega}_{y_i}, \dot{\omega}_{z_i}$  - производные по времени от проекций абсолютной угловой скорости соответствующих звеньев или роторов двигателей на подвижные оси координат, жест-

ко связанные со звеньями;  $I_{c_i x_i}^{(i)}, I_{c_i y_i}^{(i)}, I_{c_i z_i}^{(i)}$  - главные осевые моменты инерции звеньев.

Проекции абсолютных угловых скоростей звеньев манипулятора на оси координат, жестко связанные со звеньями, определяются следующими выражениями:

$$\{\bar{\omega}_1\} = \{0; 0; \dot{q}_1\}^*; \{\bar{\omega}_2\} = \{0; 0; \dot{q}_1 + \dot{q}_2\}^*; \{\bar{\omega}_3\} = \{0; 0; \dot{q}_1 + \dot{q}_2\}^*. \quad (17)$$

Компоненты абсолютных угловых скоростей роторов электродвигателей в локальных системах координат, связанных с соответствующими звеньями, имеют вид:

$$\{\bar{\omega}_g^{(1)}\} = \{0; 0; i_1 \dot{q}_1\}^*; \{\bar{\omega}_g^{(2)}\} = \{0; 0; \dot{q}_1 + i_2 \dot{q}_2\}^*, \quad (18)$$

где:  $i_1$  и  $i_2$  - передаточные отношения соответственно первого и второго редуктора.

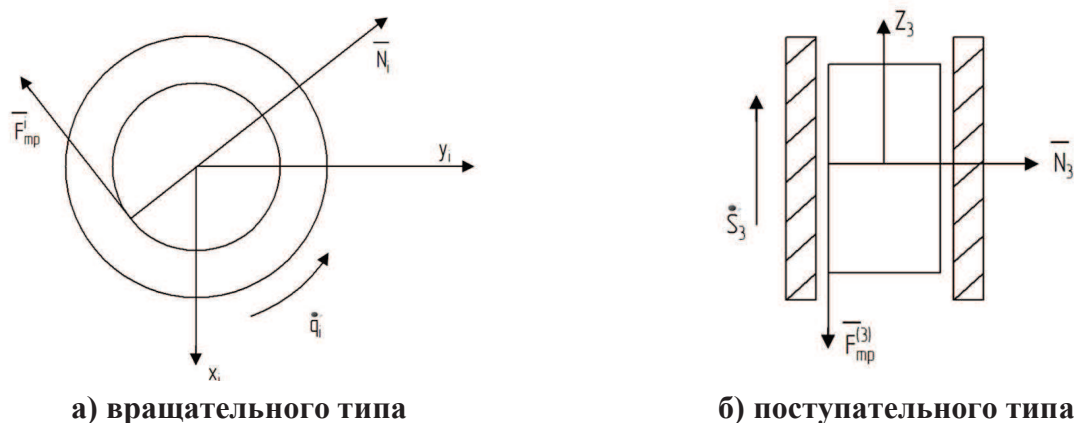
На основании (16) с учетом (17) и (18) получим следующие выражения проекций главных моментов сил инерции звеньев манипулятора и роторов двигателей на центральные локальные оси координат:

$$\begin{aligned} M_{c_1 z_1}^{un} &= -I_{c_1 z_1}^{(1)} \ddot{q}_1 \\ M_{c_2 z_2}^{un} &= -I_{c_2 z_2}^{(2)} (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \\ M_{c_3 z_3}^{un} &= -I_{c_3 z_3}^{(3)} (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \\ M_{g_1}^{un} &= -I_p^{(1)} i_1 \ddot{g}_1 \\ M_{g_2}^{un} &= -I_p^{(2)} (\ddot{g}_1 + i_2 \ddot{g}_2), \end{aligned} \quad (19)$$

где:  $I_p^{(1)}$  и  $I_p^{(2)}$  - моменты инерции роторов соответственно первого и второго двигателя относительно их собственных осей вращения.

Следует отметить, что главные центральные оси координат звеньев манипулятора ( $C_i x_i y_i z_i$ ,  $i=1,2,3$ ) параллельны указанным на рисунке 1 главным осям инерции  $P_i x_i y_i z_i$  ( $i=1,2,3$ ). Это объясняется тем, что оси  $P_1 y_1$ ,  $P_2 y_2$  и  $P_3 z_3$  являются осями симметрии соответствующих звеньев манипулятора.

Для дальнейшего решения задачи необходимо определить проекции нормальных реакций и сил трения скольжения в кинематических парах манипулятора на соответствующие локальные оси координат.



**Рисунок 2. Расчетные схемы кинематических пар**

В первом приближении рассмотрим упрощенные модели кинематических пар вращательного типа (первой и второй кинематической пары) (рисунок 2а) и поступательного типа (третья кинематическая пара) (рисунок 2б).

Показанные на рисунках 2а и 2б модели кинематических пар соответствуют случаю от-

сутствия перекоса оси симметрии кинематической пары.

Для определения реакций в кинематических парах приложим к звеньям манипулятора кроме действующих активных сил силы инерций. Размыкая поочередно кинематическую цепь манипулятора в каждой кинематической паре, начиная с последней, будем составлять уравнения кинетостатики для свободной части. При этом будем использовать локальные системы координат, связанные соответственно с последним звеном части кинематической цепи, ставшей свободной.

Составляющие нормальной реакции, действующей в третьей кинематической паре, найдем из следующих уравнений, записанных для третьего звена:

$$\begin{aligned} N_{3x_3} + R_{3x_3}^{ин} &= 0, \\ N_{3y_3} + R_{3y_3}^{ин} &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

На основании (20) с учетом (14) и (15) получим:

$$\begin{aligned} N_{3x_3} &= m_3 \left[ l_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + l_1 \cos q_2 \cdot \ddot{q}_1 + l_1 \sin q_2 \cdot \dot{q}_1^2 \right], \\ N_{3y_3} &= m_3 \left[ l_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 - l_1 \sin q_2 \cdot \ddot{q}_1 + l_1 \cos q_2 \cdot \dot{q}_1^2 \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Следует учитывать, что в массу третьего звена включена масса транспортируемого груза.

Сила трения скольжения, действующая в третьей кинематической паре, определится по формуле:

$$F_{трян_3}^{(3)} = -f_3 \frac{\dot{s}_3}{|\dot{s}_3|} |\bar{N}_3|, \quad (22)$$

где:  $|\bar{N}_3| = \sqrt{N_{3x_3}^2 + N_{3y_3}^2}$ ;  $f_3$  - коэффициент трения в третьей кинематической паре.

Таким образом, учитывая (21) будем иметь:

$$|\bar{N}_3| = m_3 \sqrt{\left[ l_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + l_1 \cos q_2 \cdot \ddot{q}_1 + l_1 \sin q_2 \cdot \dot{q}_1^2 \right]^2 + \left[ l_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 - l_1 \sin q_2 \cdot \ddot{q}_1 + l_1 \cos q_2 \cdot \dot{q}_1^2 \right]^2}. \quad (23)$$

Составляющие нормальной реакции ( $N_{2x_2}, N_{2y_2}$ ) и сил трения ( $F_{трян_2}^{(2)}, F_{трян_2}^{(2)}$ ), действующих во второй кинематической паре, можно определить на основании уравнений кинетостатики, записанных для свободной механической системы, состоящей из третьего и второго звеньев манипулятора:

$$\begin{aligned} N_{2x_2} + F_{трян_2}^{(2)} + R_{3x_2}^{ин} + R_{2x_2}^{ин} &= 0, \\ N_{2y_2} + F_{трян_2}^{(2)} + R_{3y_2}^{ин} + R_{2y_2}^{ин} &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Учитывая, что сила трения скольжения  $\bar{F}_{трян}^{(2)}$  перпендикулярна соответствующей нормальной реакции  $\bar{N}_2$  и оси кинематической пары ( $P_2 z_2$ ), ее можно представить в следующем виде:

$$F_{трян}^{(2)} = f_2 \frac{\dot{q}_2}{|\dot{q}_2|} \left[ \bar{k}_2 \times \bar{N}_2 \right], \quad (25)$$

где:  $f_2$  - коэффициент трения второй кинематической пары,

$\bar{k}_2$  - орг оси  $P_2 z_2$ .

Следует заметить, что соотношение (25) справедливо в случае, когда система координат

нат  $P_2x_2y_2z_2$  имеет правую ориентацию.

На основании (25) получим:

$$\begin{aligned} F_{mpx_2}^{(2)} &= -f_2 \frac{\dot{q}_2}{|\dot{q}_2|} \cdot N_{2y_2}, \\ F_{mpy_2}^{(2)} &= f_2 \frac{\dot{q}_2}{|\dot{q}_2|} \cdot N_{2x_2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Таким образом, решая систему двух линейных алгебраических уравнений (24), учитывая при этом (26), найдем выражения компонент нормальной реакции второй кинематической пары в системе координат, связанной со вторым звеном:

$$\begin{aligned} N_{2x_2} &= - \frac{\left[ (R_{2x_2}^{un} + R_{3x_2}^{un}) + f_2 \frac{\dot{q}_2}{|\dot{q}_2|} (R_{2y_2}^{un} + R_{3y_2}^{un}) \right]}{1 + f^2}, \\ N_{2y_2} &= - \frac{\left[ (R_{2y_2}^{un} + R_{3y_2}^{un}) - f_2 \frac{\dot{q}_2}{|\dot{q}_2|} (R_{2x_2}^{un} + R_{3x_2}^{un}) \right]}{1 + f^2}, \end{aligned} \quad (27)$$

Пренебрегая в знаменателях (27) квадратом коэффициента трения по сравнению с единицей, получим:

$$\begin{aligned} N_{2x_2} &= - \left[ R_{2x_2}^{un} + R_{3x_2}^{un} + f_2 \frac{\dot{q}_2}{|\dot{q}_2|} (R_{2y_2}^{un} + R_{3y_2}^{un}) \right], \\ N_{2y_2} &= - \left[ R_{2y_2}^{un} + R_{3y_2}^{un} - f_2 \frac{\dot{q}_2}{|\dot{q}_2|} (R_{2x_2}^{un} + R_{3x_2}^{un}) \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Выражения (28) с учетом (13) и (14) примут вид:

$$\begin{aligned} N_{2x_2} &= n_{11}(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + n_{12}\ddot{q}_1 + n_{13}\dot{q}_1^2 + f_2 \frac{\dot{q}_2}{|\dot{q}_2|} \left[ n_{11}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 - n_{13}\ddot{q}_1 + n_{12}\dot{q}_1^2 \right], \\ N_{2y_2} &= n_{11}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 - n_{13}\ddot{q}_1 + n_{12}\dot{q}_1^2 - f_2 \frac{\dot{q}_2}{|\dot{q}_2|} \left[ n_{11}(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) - n_{12}\ddot{q}_1 + n_{13}\dot{q}_1^2 \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

где:

$$\begin{aligned} n_{11} &= m_2 |P_2C_2| + m_3 l_2, \\ n_{12} &= (m_2 + m_3) l_1 \cos q_2, \\ n_{13} &= (m_2 + m_3) l_1 \sin q_2. \end{aligned} \quad (30)$$

Составляющие нормальной реакции  $(N_{1x_1}, N_{1y_1})$  первой кинематической пары можно определить из уравнений кинетостатики механической системы, состоящей из трех звеньев манипулятора:

$$\begin{aligned} N_{1x_1} + F_{mpx_1}^{(1)} + R_{1x_1}^{un} + R_{2x_1}^{un} + R_{3x_1}^{un} &= 0, \\ N_{1y_1} + F_{mpy_1}^{(1)} + R_{1y_1}^{un} + R_{2y_1}^{un} + R_{3y_1}^{un} &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Проекция силы трения скольжения первой кинематической пары на оси координат,

связанные с первым звеном, можно представить в виде:

$$\begin{aligned} F_{mpx_1}^{(1)} &= -f_1 \frac{\dot{q}_1}{|\dot{q}_1|} \cdot N_{1y_1}, \\ F_{mpy_1}^{(1)} &= f_1 \frac{\dot{q}_1}{|\dot{q}_1|} \cdot N_{1x_1}. \end{aligned} \quad (32)$$

где:  $f_1$  - коэффициент трения скольжения первой кинематической пары.

Решая (31) с учетом (32), получим:

$$\begin{aligned} N_{1x_1} &= - \frac{\left[ R_{1x_1}^{un} + R_{2x_1}^{un} + R_{3x_1}^{un} + f_1 \frac{\dot{q}_1}{|\dot{q}_1|} (R_{1y_1}^{un} + R_{2y_1}^{un} + R_{3y_1}^{un}) \right]}{1 + f_1^2}, \\ N_{2y_2} &= - \frac{\left[ R_{1y_1}^{un} + R_{2y_1}^{un} + R_{3y_1}^{un} - f_1 \frac{\dot{q}_1}{|\dot{q}_1|} (R_{1x_1}^{un} + R_{2x_1}^{un} + R_{3x_1}^{un}) \right]}{1 + f_1^2}. \end{aligned} \quad (33)$$

Как и ранее, пренебрежем в знаменателях (33) квадратом коэффициента трения по сравнению с единицей. В результате компоненты нормальной реакции первой кинематической пары в локальной системе координат, связанной с первым звеном, примут вид:

$$\begin{aligned} N_{1x_1} &= - \left[ R_{1x_1}^{un} + R_{2x_1}^{un} + R_{3x_1}^{un} + f_1 \frac{\dot{q}_1}{|\dot{q}_1|} (R_{1y_1}^{un} + R_{2y_1}^{un} + R_{3y_1}^{un}) \right], \\ N_{2y_2} &= - \left[ R_{1y_1}^{un} + R_{2y_1}^{un} + R_{3y_1}^{un} - f_1 \frac{\dot{q}_1}{|\dot{q}_1|} (R_{1x_1}^{un} + R_{2x_1}^{un} + R_{3x_1}^{un}) \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

С учетом (10)-(12) соотношения (34) примут вид:

$$\begin{aligned} N_{1x_1} &= \left[ n_{14} \ddot{q}_1 + n_{11} \cos q_2 \cdot (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)^2 - n_{11} \sin q_2 \cdot (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \right] + \\ &+ f_1 \frac{\dot{q}_1}{|\dot{q}_1|} \left[ n_{14} \dot{q}_1^2 + n_{11} \sin q_2 \cdot (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + n_{11} \cos q_2 \cdot (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \right], \\ N_{1y_1} &= \left[ n_{14} \dot{q}_1^2 + n_{11} \sin q_2 \cdot (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + n_{11} \cos q_2 \cdot (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \right] - \\ &- f_1 \frac{\dot{q}_1}{|\dot{q}_1|} \left[ n_{14} \ddot{q}_1 - n_{11} \sin q_2 \cdot (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + n_{11} \cos q_2 \cdot (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \right], \end{aligned} \quad (35)$$

где:

$$n_{14} = m_1 |PC_1| + (m_2 + m_3) l_1. \quad (36)$$

Полученные выражения (29) и (35) для нормальных реакций соответственно первой и второй вращательной кинематической пары позволяют найти моменты сил трения относительно осей вращения:

$$M_{mp}^{(i)} = -r_i f_i \operatorname{sign} \dot{q}_i \sqrt{N_{ix_i}^2 + N_{iy_i}^2} \quad i = 1, 2, \quad (37)$$

где:  $r_i (i = 1, 2)$  - радиусы, определяющие размеры соприкасающихся поверхностей соответственно первой и второй вращательной кинематической пары,



$$\text{sign } \dot{q}_i = \frac{\dot{q}_i}{|\dot{q}_i|} = \begin{cases} 1 & \text{при } \dot{q}_i > 0 \\ -1 & \text{при } \dot{q}_i < 0, \end{cases} \quad (i=1,2) \quad (38)$$

Для получения дифференциальных уравнений движения манипулятора робота необходимо составить общее уравнение динамики для каждого из независимых возможных перемещений системы  $(\delta q_1, \delta q_2, \delta s_3)$ , число которых равно числу степеней свободы системы.

$$\begin{aligned} & M_{g_1} \cdot \delta \phi_1 + M_{g_1}^{un} \delta \phi_1 + M_{c_1 z_1}^{un} \delta q_1 + M_{g_2}^{un} \delta q_1 + M_{c_2 z_2}^{un} \delta q_1 + M_{c_3 z_3}^{un} \delta q_1 + \\ & + M_{p_1 z_1} \left( \bar{R}_1^{un} \right) \delta g_1 + M_{p_1 z_1} \left( \bar{R}_2^{un} \right) \delta q_1 + M_{p_1 z_1} \left( \bar{R}_3^{un} \right) \delta g_1 + M_{mp}^{(1)} \delta q_1 = 0; \\ & M_{g_2} \cdot \delta \phi_2 + M_{g_2}^{un} \delta \phi_2 + M_{c_2 z_2}^{un} \delta q_2 + M_{c_3 z_3}^{un} \delta q_2 + \\ & + M_{p_2 z_2} \left( \bar{R}_2^{un} \right) \delta g_2 + M_{p_2 z_2} \left( \bar{R}_3^{un} \right) \delta q_2 + M_{mp}^{(2)} \delta q_2 = 0; \\ & P_{g_3} \delta s_3 - m_3 g \delta s_3 + F_{mp}^{(3)} \delta s_3 + R_{3z_3}^{un} \delta s_3 = 0, \end{aligned} \quad (39)$$

где:  $M_{g_1}, M_{g_2}, P_{g_3}$  - моменты и усилие, развиваемые соответствующими двигателями,

$M_{g_i}^{un} (i=1,2), M_{c_i z_i}^{un} (i=1,2,3)$  - главные моменты сил инерции электродвигателей и звеньев манипулятора, определяемые соотношениями (19),

$M_{p_i z_i} \left( \bar{R}_j^{un} \right) i=1,2; j=1,2,3$  - моменты главных векторов сил инерции соответствующих звеньев относительно осей вращения первых двух звеньев (рисунок 1),

$\delta \varphi_\varphi (i=1,2)$  - возможные перемещения соответственно первого и второго роторов электродвигателей. При этом  $\delta \varphi_1 = i_1 \delta q_1$ , а  $\delta \varphi_2 = i_2 \delta q_2$ .

Моменты главных векторов сил инерции относительно осей вращения можно определить на основании соотношений:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{p_1} \left( \bar{R}_j^{un} \right) &= \overline{P_1 C_j} \times \bar{R}_j^{un} \quad i=1,2,3 \\ \bar{M}_{p_2} \left( \bar{R}_j^{un} \right) &= \overline{P_2 C_j} \times \bar{R}_j^{un} \quad j=1,2,3 \end{aligned} \quad (40)$$

где:  $\overline{P_1 C_j} (j=1,2,3), \overline{P_2 C_j} (j=2,3)$  - радиусы-векторы центров масс соответствующих звеньев относительно точек  $P_i (i=1,2)$  (начала связанных с первыми двумя звеньями систем координат (рисунок 1)).

В результате, на основании (39) с учетом (10)-(15), (19), (22), (26), (30), (32), (36), (37) и (40) получим

$$\begin{aligned} & (a_{11} + b_{11}) \ddot{q}_1 + (a_{12} + b_{12}) \ddot{q}_2 - 2b_{13} \sin q_2 \cdot \dot{q}_1 \dot{q}_2 - b_{13} \sin q_2 \cdot \dot{q}_2^2 = \\ & = i_1 M_{g_1} - f_1 r_1 \text{sign} \dot{q}_1 \sqrt{N_{1x_1}^2 + N_{1y_1}^2}; \\ & (a_{12} + b_{12}) \ddot{q}_1 + (a_{22} + b_{22}) \ddot{q}_2 + b_{13} \sin q_2 \cdot \dot{q}_1^2 = i_2 M_{g_2} - f_2 r_2 \text{sign} \dot{q}_2 \sqrt{N_{2x_2}^2 + N_{2y_2}^2}; \end{aligned} \quad (41)$$

$$m_3 \ddot{s}_3 = p_{g_3} - m_3 g - f_3 \frac{\dot{s}_3}{|\dot{s}_3|} |\bar{N}_3|,$$

где:  $N_{1x_1}, N_{1y_1}, N_{2x_2}, N_{2y_2}, |\bar{N}_3|$  определяются соответственно соотношениями (35), (29) и (23),

$$\begin{aligned} a_{11} &= I_{p_1 z_1}^{(1)} + I_{p_2 z_2}^{(2)} + I_{p_3 z_3}^{(3)} + m_2 l_1^2 + m_3 (l_1^2 + l_2^2) + 2b_{13} \cos q_2; \\ a_{12} &= m_3 l_2^2 + b_{13} \cos q_2 + I_{p_2 z_2}^{(2)} + I_{p_3 z_3}^{(3)}; \quad a_{22} = I_{p_2 z_2}^{(2)} + I_{p_3 z_3}^{(3)} + m_3 l_2^2; \end{aligned}$$

$$b_{11} = i_1^2 I_p^{(1)}; \quad b_{22} = i_2^2 I_p^{(2)}; \quad b_{12} = i_2 I_p^{(2)}; \quad b_{13} = m_2 |P_2 C_2| l_1 + m_3 l_1 l_2,$$

$I_{p_1 z_1}^{(1)}, I_{p_2 z_2}^{(2)}$  - моменты инерции соответствующих звеньев относительно их собственных осей вращения, переход к которым осуществлен на основании теоремы Гюйгенса-Штейнера [1].

Система дифференциальных уравнений движения рассматриваемой механической системы (41) полностью совпадает в случае отсутствия сил трения скольжения в кинематических парах с дифференциальными уравнениями, полученными в работе [3] на основании уравнений Лагранжа II рода.

В случае отсутствия сил трения в кинематических парах, как следует из [3], движение третьего звена манипулятора динамически не зависит от движения первых двух звеньев.

Анализ системы дифференциальных уравнений движения манипулятора робота (41), полученной при учете сил сухого трения (трения скольжения) в кинематических парах, показывает, что силы трения в кинематических парах приводят к динамической зависимости всех трех звеньев манипулятора. При этом дифференциальные уравнения движения рассматриваемой механической системы (41) нелинейны относительно обобщенных ускорений.

Для упрощения данной задачи рассмотрим наиболее часто встречающийся вариант транспортировки груза, при которой вначале одновременно движутся два первых звена манипулятора, а затем, после их остановки, перемещается третье звено. При этом сила трения в третьей кинематической паре станет равной нулю и в результате может быть найдено аналитическое решение третьего уравнения системы (41).

Таким образом, задача сведется к решению системы первых двух уравнений (41). Систему, состоящую из первых двух уравнений (41), необходимо дополнить уравнениями динамических характеристик двух электродвигателей. Уравнения динамических характеристик электродвигателей постоянного тока с независимым возбуждением могут быть представлены в виде [2]:

$$\begin{aligned} M_{g_1} + \tau_1 \dot{M}_{g_1} &= r_1 U_1 + s_1 i_1 \dot{q}_1, \\ M_{g_2} + \tau_2 \dot{M}_{g_2} &= r_2 U_2 + s_2 i_2 \dot{q}_2, \end{aligned} \quad (42)$$

где:  $\tau_i (i = 1, 2)$  - электромагнитные постоянные времени двигателей,

$s_i (i = 1, 2)$  - крутизна статической характеристики,

$r_i (i = 1, 2)$  - некоторые постоянные параметры

$U_i (i = 1, 2)$  - вектор программного управления.

В этом случае задача определения динамических ошибок – отклонений законов движения от программных, а следовательно, погрешности позиционирования робота – будет сводиться к интегрированию уравнений движения механической системы, состоящей из первых двух уравнений системы (41) совместно с уравнениями динамических характеристик двигателей (42).

### Литература

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Санкт-Петербург – Москва-Краснодар, Лань, 2008, 729 с.
2. Божкова Л.В., Вартанов М.В. Автоматизация сборки изделий машиностроения с применением промышленных роботов и виброустройств. М.: Университет машиностроения, 2013, 318 с.
3. Божкова Л.В., Вартанов и др. Анализ точности отработки роботом заданных траекторий на основании его динамических моделей. М.: Техника машиностроения, 2002, № 2, с. 84-90.