Подходы к постановкам и методам решения краевых задач механики деформируемого твердого тела

д.ф.-м.н. проф. Бровко Г.Л.
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
glb@mech.math.msu.su

Аннотация. Представлены подходы к постановкам и методам решения начально-краевых задач механики деформируемого твердого тела. Рассмотрены классические формулировки задач, представлена принципиальная схема построения обобщенной формулировки задач в виде операторных уравнений в функциональных пространствах, подробно проиллюстрированная на примере краевых задач теории малых упругопластических деформаций. Изложена математическая структура итерационных методов (метод упругих решений и его модификации) и инкрементальных подходов. Приведены теоремы о существовании и единственности решений, о сходимости методов. Обсуждаются специфические вопросы постановок начально-краевых задач при конечных деформациях. Отмечены трудности лагранжевой и ограничительность эйлеровой постановок. Выявлены условия возможности эффективного применения эйлеровой постановки задач, приводящие к существенным ограничениям на механические свойства материала. Приведены примеры отсутствия решений задач при конечных деформациях, показана нецелесообразность требования единственности решений задач статики. Для эволюционных задач предложена гипотеза о единственности решений как непрерывных по времени полей-процессов.

Ключевые слова: *механика деформируемого твердого тела, начально-краевые задачи, физическая достоверность, математическая корректность, обобщенная постановка, операторное уравнение, итерационные методы, сходимость, конечные деформации, лагранжево и эйлерово описание, существование и единственность решений задач.*

Введение

Основной моделью исследования механических процессов в деформируемых телах являются краевые и начально-краевые задачи, постановки которых предусматривают в качестве задания определение характеристик движения тела, деформаций и напряженного состояния его элементов при заданных механических свойствах тела, выраженных определяющими соотношениями сопротивления деформированию, и заданных условиях кинематического и динамического нагружения, определенных известным полем массовых сил, силовыми и кинематическими граничными воздействиями, а также начальными условиями процесса (см. [1-45]).

Постановка задачи выражается системой соотношений для искомых функций, включающей заданные в точках области тела уравнения движения (равновесия), уравнения связи деформаций с перемещениями и определяющие соотношения, а также заданные в граничных точках тела контактные (поверхностные) воздействия в виде распределенных по поверхности контактных сил, кинематических ограничений и их комбинаций; кроме того, подразумевается задание соответствующих изучаемому процессу начальных условий.

В настоящей работе обсуждаются вопросы о физической достоверности соотношений краевой задачи, корректности ее математической формулировки, представлен общий подход к обобщенной формулировке краевой задачи, проиллюстрированный на примере краевых задач теории малых упругопластических деформаций, рассмотрены возможности применения к решению задач итерационных и инкрементальных методов, обсуждается вопрос о существовании и единственности решений краевых задач для упругих и неупругих тел при конечных деформациях.

1. НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В КЛАССИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ МАЛЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

1.1. Постановка начально-краевой задачи

1.1.1. Типичная математическая формулировка

Постановка типичной начально-краевой задачи выражается системой соотношений для искомых полей перемещений $\mathbf{u}$, деформаций $\mathbf{e}$ и напряжений $\mathbf{y}$ в четырехмерной области $\Omega\times[t_0,t_1]$ (Ω – трехмерная область, занятая телом, $[t_0,t_1]$ – отрезок времени исследуемого процесса). Система включает уравнения движения, определяющие соотношения и соотношения Коши

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}+\rho\mathbf{b}=\rho\mathbf{w},\quad \boldsymbol{\sigma}=\mathbf{F}[\boldsymbol{\varepsilon}],\quad \boldsymbol{\varepsilon}=\operatorname{sym}\nabla\mathbf{u}, \tag{1.1}$$

где: ρ – плотность массы, $\mathbf{b}$ – плотность массовых сил, $\mathbf{w}\equiv\dfrac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}$ – ускорение точки тела,

$\mathbf{F}$ – оператор, выражающий механические свойства частицы тела.

Типичные граничные условия задают в каждый момент времени $t\in[t_0,t_1]$ значения $\mathbf{u}_\Gamma$ вектора перемещений на части Γ_u границы тела Γ и значения $\mathbf{t}_\Gamma$ вектора напряжений на остальной части Γ_σ границы тела ($\mathbf{n}$ — внешняя единичная нормаль к поверхности тела)

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}_\Gamma \quad \text{на } \Gamma_u, \qquad \sigma\cdot\mathbf{n}=\mathbf{t}_\Gamma \quad \text{на } \Gamma_\sigma. \tag{1.2}$$

Начальные условия выражаются равенствами с заданными в области Ω функциями $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{v}_0$

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}_0 \quad \text{при } t=t_0, \qquad \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}=\mathbf{v}_0 \quad \text{при } t=t_0. \tag{1.3}$$

1.1.2. Физическая достоверность

Физическая достоверность соотношений большинства практических задач [46] обусловлена адекватной формулировкой определяющих соотношений и граничных условий.

1. Определяющие соотношения. Экспериментальное подтверждение

Достоверность определяющих соотношений обеспечивается результатами систематического набора определяющих экспериментов и их соответствующей математической обработкой с необходимой точностью для класса процессов деформации, априорно предполагаемых протекающими в частицах тела в изучаемом движении.

В случае апостериорного (после решения задачи) обнаружения отклонения процессов в какой-либо части тела от экспериментально исследованного класса следует использовать *метод корректирующего анализа*, а именно, заново провести эксперименты и их математическую обработку для более широкого класса процессов деформации и, тем самым, задать (по крайней мере в указанной части тела) определяющие соотношения нового вида.

2. Граничные условия

Источником не вполне достоверного описания механического процесса в теле часто служат формулировки граничных условий кинематического, силового и смешанных типов. Кинематические условия служат приближенной моделью *силового* контактного взаимодействия [3] изучаемого тела с другими телами и, как правило, не учитывают деформируемости этих других тел (условия закрепления, гладкого жесткого контакта, контакта с трением). Задание силовых граничных условий в виде распределенных поверхностных сил также может быть признанным достоверным далеко не во всех конкретных случаях (кроме очевидных случаев контакта тела с покоящейся однородной жидкостью) [19,20]. Специальному анализу подлежат граничные условия контактного взаимодействия с трением [47].

1.1.3. Математическая корректность

1. Полнота и непротиворечивость системы соотношений

Система соотношений краевой задачи призвана дать полное и внутренне непротиворечивое описание механического процесса (внешних воздействий и внутренних реакций), отвечающее требованиям физической достоверности в рамках изучаемого класса процессов в соответствующем диапазоне деформаций [10,11] и обеспечивающее наличие решений задачи в функциональных пространствах определенного типа [48-59].

Для этого накладываются ограничения на форму (границу) области тела, требования согласования граничных условий на соседних участках границы, согласования граничных и начальных условий.

2. Корректность по Адамару

В подавляющем большинстве случаев постановки начально-краевых задач о механических процессах в телах отвечают требованиям корректности по Адамару:

- существование решения;
- единственность решения;
- непрерывная зависимость решения от данных задачи.

Проанализировать свойственность этих требований поставленной задаче и найти условия их выполнения удается чаще всего для обобщенной постановки задачи.

1.2. Обобщенная формулировка начально-краевых задач

1.2.1. Функциональные пространства. Операторное уравнение

1. Общая формулировка

Обобщенная формулировка краевых задач механики деформируемого твердого тела [51-59] в большинстве случаев сводится к операторному уравнению вида

$$\mathbf{Au} = \mathbf{f}, \tag{1.4}$$

где: $\mathbf{u}$ и $\mathbf{f}$ – элементы функциональных пространств U и F соответственно, а оператор $\mathbf{A}$ действует из U в F.

Неизвестным в уравнении (1.4) является элемент $\mathbf{u} \in U$, выражающий в обобщенном смысле искомое кинематически допустимое движение тела – поле перемещений (или скоростей перемещений) точек тела, удовлетворяющее начальным и кинематическим граничным условиям. Элемент $\mathbf{f} \in F$ в уравнении (1.4) задан, он отражает воздействие на тело внешних силовых (массовых и поверхностных) нагрузок. Оператор $\mathbf{A}$ (основной оператор краевой задачи) отражает механические свойства тела, его значение $\mathbf{Au}$ на элементе $\mathbf{u}$ выражает реакцию тела на движение $\mathbf{u}$.

2. Функциональные пространства

В эволюционных задачах (квазистатика, динамика) качестве функциональных пространств U используются, как правило, *банаховы* рефлексивные ($U = U^{**}$) пространства, а в качестве F – пространства, сопряженные к U ($F = U^{*}$) [56, 57].

В задачах статики зачастую допустимо упрощение: $U = F$ — одно и то же *гильбертово* пространство.

3. Корректность операторного уравнения

Для операторного уравнения (1.4) требования корректности по Адамару выражаются следующими свойствами основного оператора краевой задачи [56,57]:

- оператор $\mathbf{A}$ сюръективен (уравнение имеет решение при любой правой части $\mathbf{f}$),
- оператор $\mathbf{A}$ инъективен (уравнение имеет не более одного решения),
- обратный оператор $\mathbf{A}^{-1}: F \to U$ непрерывен.

4. Свойства основного оператора краевой задачи

Отметим существенные для задачи (1.4) свойства основного оператора $\mathbf{A}$: *коэрцитивность* и *монотонность* [56-59].

Отображение $\mathbf{A}$ из нормированного пространства U в сопряженное пространство U^* называется *коэрцитивным*, если

$$\langle \mathbf{Au}, \mathbf{u} \rangle \geq \gamma(\| \mathbf{u} \|) \| \mathbf{u} \| \qquad \forall \mathbf{u} \in U, \tag{1.5}$$

где: $\gamma(x)$ — функция неотрицательного аргумента x такая, что $\gamma(x) \to \infty$ при $x \to \infty$.

Отображение $\mathbf{A}$ из нормированного пространства U в U^* называется *монотонным*, если

$$\langle \mathbf{Au} - \mathbf{Av}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle \geq 0 \qquad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U, \tag{1.6}$$

строго монотонным, если равенство в (1.6) выполняется только тогда, когда $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, и *сильно монотонным*, если

$$\langle \mathbf{Au} - \mathbf{Av}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle \geq \gamma(\| \mathbf{u} - \mathbf{v} \|) \| \mathbf{u} - \mathbf{v} \| \qquad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U, \tag{1.7}$$

где: $\gamma(x)$ — возрастающая функция неотрицательного аргумента x такая, что $\gamma(0) = 0$ и $\gamma(x) \to \infty$ при $x \to \infty$.

5. Общая теорема

Достаточные условия корректности задачи (1.4) дает следующая теорема [56, 57].

Теорема 1. *Пусть U — рефлексивное банахово пространство, и $\mathbf{A}: U \to U^*$ — непрерывный монотонный и коэрцитивный оператор. Тогда отображение $\mathbf{A}: U \to U^*$ сюръективно (решение уравнения (1.4) существует при любом $\mathbf{f} \in U^*$).*

Если дополнительно $\mathbf{A}$ — строго монотонный оператор, то отображение $\mathbf{A}: U \to U^*$ инъективно (решение уравнения (1.4) единственно). В этом случае отображение $\mathbf{A}: U \to U^*$ биективно, и существует обратное отображение $\mathbf{A}^{-1}$.

Если дополнительно $\mathbf{A}$ — сильно монотонный оператор, то обратное отображение $\mathbf{A}^{-1}: U^* \to U$ непрерывно (решение $\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}$ задачи (1.4) непрерывно зависит от правой части). В этом случае $\mathbf{A}$ — гомеоморфизм U на U^*.

Широкое множество краевых задач механики деформируемых сред приводимо в обобщенной постановке к уравнению вида (1.4) с оператором $\mathbf{A}: U \to U^*$, обладающим свойствами, отмеченными в теореме 1.

Теорема 1 остается в силе и в случае, когда U — гильбертово пространство (случай, типичный для задач статики упрочняющихся упругопластических тел).

1.2.2. Обобщенная постановка задач теории малых упругопластических деформаций

Типичная постановка краевой задачи статики теории малых упругопластических деформаций (для активных процессов) выражается системой соотношений вида (1.1),(1.2) ($\mathbf{w} \equiv 0$ и начальные условия (1.3) не рассматриваются) с искомыми и заданными функциями, определенными в трехмерной области Ω, занятой телом, и на ее границе. Для второй краевой задачи ($\Gamma_u = \varnothing$) предполагается, что главный вектор и главный момент внешних сил равны нулю.

В качестве определяющего соотношения механических свойств сопротивления тела деформированию (второго уравнения в (1.1)) используется соотношение Генки–Ильюшина [10]

$$\boldsymbol{\sigma} = 3K\varepsilon\mathbf{I} + \frac{2\Phi(э_u)}{3э_u}\mathbf{э}, \tag{1.8}$$

где: $\mathbf{y}$ – тензор напряжений, $\varepsilon := \frac{1}{3}\operatorname{tr}\mathbf{e}$ – средняя деформация, $\mathbf{э} := \mathbf{e} - \varepsilon\mathbf{I}$ – девиатор деформаций, $э_u := \sqrt{\frac{2}{3}э : э}$ – интенсивность деформаций, K – модуль объемной упругости, Ф – функция упрочнения, выражающая зависимость интенсивности напряжений $\sigma_u := \sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{s} : \mathbf{s}}$ ($\mathbf{s} := \mathbf{y} - \sigma\mathbf{I}$ – девиатор напряжений, $\sigma := \frac{1}{3}\operatorname{tr}\mathbf{y}$ – среднее напряжение) от интенсивности деформаций: $\sigma_u = \Phi(э_u)$.

1. Принцип виртуальных работ

Согласно принципу виртуальных работ система соотношений краевой задачи сводится к выполнению интегрального равенства

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}](\mathbf{x}) : \delta\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})dV = \int_\Omega \rho\mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \delta\mathbf{u}(\mathbf{x})dV + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}(\mathbf{x}) \cdot \delta\mathbf{u}(\mathbf{x})dS \tag{1.9}$$

для искомого действительного поля перемещений $\mathbf{u}$ среди всех кинематически допустимых полей (гладких полей, удовлетворяющих кинематическому граничному условию $(1.2)_1$ на Γ_u) при произвольных виртуальных полях перемещений $\delta\mathbf{u}$ (гладких полях, удовлетворяющих однородному кинематическому условию на Γ_u). Здесь $\mathbf{y}[\mathbf{u}]$ — искомое действительное поле напряжений, построенное по действительному полю перемещений $\mathbf{u}$ с учетом (1.8), $\delta\mathbf{e} := \operatorname{sym}\nabla\delta\mathbf{u}$ — виртуальное поле деформаций, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{t}$ — плотности внешних массовых и поверхностных сил.

Левая и правая части (1.9) суть линейные функционалы над линейным пространством всех виртуальных полей перемещений $\delta\mathbf{u}$, причем функционал левой части определяется кинематически допустимым полем $\mathbf{u}$, то есть является значением некоторого оператора $\mathbf{A}$ от $\mathbf{u}$. Обозначая эти функционалы через $\mathbf{Au}$ и $\mathbf{f}$, получаем (1.9) в виде равенства

$$\langle \mathbf{Au}, \delta\mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{f}, \delta\mathbf{u} \rangle \tag{1.10}$$

с произвольным полем виртуальных перемещений $\delta\mathbf{u}$.

2. Энергетические пространства

Для первой и смешанной краевых задач ($\Gamma_u \neq \varnothing$) рассмотрим однородное граничное условие

$$\mathbf{u} = 0 \qquad \text{на } \Gamma_u, \tag{1.11}$$

для второй краевой задачи ($\Gamma_u = \varnothing$) примем условия, исключающие произвол жестких смещений,

$$\int_\Omega \mathbf{u}dV = 0, \quad \int_\Omega \mathbf{x} \times \mathbf{u}dV = 0. \tag{1.12}$$

Множества кинематически допустимых и виртуальных полей перемещений будем рассматривать как одно *линейное пространство* $\widetilde{U}$ гладких вектор-функций, удовлетворяющих условиям (1.11), (1.12). Это позволит переписать (1.10) в виде

$$\langle \mathbf{Au}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall\mathbf{v} \in \widetilde{U}. \tag{1.13}$$

Зададим в пространстве $\widetilde{U}$ билинейный функционал

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_\Omega := \int_\Omega (\mathbf{u},\mathbf{v})(\mathbf{x})dV, \tag{1.14}$$

где

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{u},\mathbf{v})(\mathbf{x}) := (\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathrm{int}}(\mathbf{x}) + (\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathrm{div}}(\mathbf{x}),\\
&(\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathrm{int}}(\mathbf{x}) := э[\mathbf{u}](\mathbf{x}) : э[\mathbf{v}](\mathbf{x}) \equiv \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}](\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{v}](\mathbf{x}) - 3\varepsilon[\mathbf{u}](\mathbf{x})\varepsilon[\mathbf{v}](\mathbf{x}),\\
&(\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathrm{div}}(\mathbf{x}) := \frac{9K}{2G}\varepsilon[\mathbf{u}](\mathbf{x})\varepsilon[\mathbf{v}](\mathbf{x}).
\end{aligned} \tag{1.15}$$

В силу известного неравенства $3K/2G > 1$ функция $(\mathbf{u},\mathbf{u})(\mathbf{x})$ является положительно определенной квадратичной формой от $\mathbf{e}[\mathbf{u}](\mathbf{x})$, и поэтому из условия $(\mathbf{u},\mathbf{u})_\Omega = 0$ следует, что $\mathbf{e}[\mathbf{u}](\mathbf{x}) \equiv 0$ в Ω, и с учетом условий (1.11), (1.12) имеем $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \equiv 0$ в Ω.

Таким образом, функционал (1.14) является билинейным, симметричным, положительно определенным функционалом в линейном пространстве $\widetilde{U}$, а значит, является *скалярным произведением* в $\widetilde{U}$ (пространство $\widetilde{U}$ *евклидово*).

Соответствующая евклидова *норма* в $\widetilde{U}$ задается равенством

$$\|\mathbf{u}\|_\Omega := \sqrt{(\mathbf{u},\mathbf{u})_\Omega}, \tag{1.16}$$

причем соответственно (1.15) имеем

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{u},\mathbf{u})(\mathbf{x}) := (\mathbf{u},\mathbf{u})_{\mathrm{int}}(\mathbf{x}) + (\mathbf{u},\mathbf{u})_{\mathrm{div}}(\mathbf{x}),\\
&(\mathbf{u},\mathbf{u})_{\mathrm{int}}(\mathbf{x}) := \frac{3}{2}э_u^2[\mathbf{u}](\mathbf{x}),\\
&(\mathbf{u},\mathbf{u})_{\mathrm{div}}(\mathbf{x}) := \frac{9K}{2G}\varepsilon^2[\mathbf{u}](\mathbf{x}).
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Замыкание пространства $\widetilde{U}$ по норме (1.16) является *гильбертовым пространством*. Обозначим его через $H(\Omega)$.

Пространство $H(\Omega)$ называют *энергетическим пространством*, а скалярное произведение (1.14) и норму (1.16) — энергетическими [51-54].

3. Неравенство Корна. Вложение в пространства Соболева

Условия (1.11), (1.12) обеспечивают важное свойство пространства $H(\Omega)$, выражающееся выполнением для вектор-функций $\mathbf{u} \in H(\Omega)$ *неравенства Корна* [51]:

$$\int_\Omega \nabla\mathbf{u}(\mathbf{x})\cdot\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x})dV \le C\int_\Omega \mathbf{e}[\mathbf{u}](\mathbf{x}) : \mathbf{e}[\mathbf{u}](\mathbf{x})dV, \tag{1.18}$$

из которого с учетом неравенства $3K/2G > 1$ немедленно следует априорная оценка

$$\int_\Omega \nabla\mathbf{u}(\mathbf{x})\cdot\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x})dVC\|\mathbf{u}\|_\Omega^2. \tag{1.19}$$

Оценка (1.19) показывает, что пространству $H(\Omega)$ принадлежат вектор-функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, компоненты $u_i(\mathbf{x})$ которых имеют обобщенные производные, суммируемые с квадратом в Ω, то есть компоненты $u_i(\mathbf{x})$ принадлежат *пространству Соболева* $W_2^{(1)}(\Omega)$ [53,54].

4. Теоремы вложения. Обобщенное представление массовых и поверхностных сил

В силу известных теорем вложения Соболева [53,54,58,59] компоненты $u_i(\mathbf{x})$ вектор-функций $\mathbf{u} \in H(\Omega)$ принадлежат пространству $L_p(\Omega)$ с $p < 6$, а их следы на границе Γ_σ принадлежат пространству $L_q(\Gamma_\sigma)$ с $q \le 4$ (на Γ_u следы равны нулю).

Неравенство Гельдера приводит к важному выводу: для того, чтобы линейный функционал правой части (1.9) — виртуальная работа внешних сил — был *линейным ограниченным (непрерывным) функционалом* над $H(\Omega)$, достаточно, чтобы компоненты b_i массовых сил $\mathbf{b}$ и компоненты t_i поверхностных сил $\mathbf{t}$ удовлетворяли условиям:

$$\rho b_i(\mathbf{x}) \in L_{p'}(\Omega), \quad p' > \frac{6}{5}, \qquad t_i(\mathbf{x}) \in L_{q'}(\Gamma_\sigma), \quad q' \le \frac{4}{3}. \tag{1.20}$$

В свою очередь, по *теореме Рисса* [51,53,56,59] любой линейный ограниченный (непрерывный) функционал в гильбертовом пространстве может быть отождествлен с элементом этого пространства и представлен в виде скалярного умножения на этот элемент. Принимая в условиях (1.20) такое отождествление и сохраняя обозначение $\mathbf{f}$ для функционала виртуальной работы внешних сил, имеем:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \equiv (\mathbf{f}, \mathbf{v})_\Omega, \quad \mathbf{f} \in H(\Omega), \forall \mathbf{v} \in H(\Omega). \tag{1.21}$$

5. Упругопластические свойства материала. Условия Ильюшина

Введением функции Ильюшина $\omega(э_u)$ [10], удовлетворяющей тождеству:

$$\Phi(э_u) \equiv 3Gэ_u[1 - \omega(э_u)] \tag{1.22}$$

(G — модуль сдвига), определяющее соотношение (1.8) можно переписать в виде:

$$\boldsymbol{\sigma} = 3K\varepsilon\mathbf{I} + 2G[1 - \omega(э_u)]\mathbf{Э}. \tag{1.23}$$

Типичные свойства *неразупрочняющихся* ("устойчивых"), *строго упрочняющихся* и *сильно упрочняющихся* упругопластических материалов отражают *слабое*, *строгое* и *сильное условия Ильюшина*, записываемые соответственно в видах

$$\begin{gathered} 3G \ge \frac{\Phi(э_u)}{э_u} \ge \frac{d\Phi}{dэ_u} \ge 0, \\ 3G \ge \frac{\Phi(э_u)}{э_u} \ge \frac{d\Phi}{dэ_u} > 0, \\ 3G \ge \frac{\Phi(э_u)}{э_u} \ge \frac{d\Phi}{dэ_u} \ge a > 0 \quad (a = \text{const}), \end{gathered} \tag{1.24}$$

или в терминах функции Ильюшина $\omega(э_u)$ — в видах

$$\begin{gathered} 0 \le \omega(э_u) \le \omega(э_u) + э_u\omega'(э_u) \le 1, \\ 0 \le \omega(э_u) \le \omega(э_u) + э_u\omega'(э_u) < 1, \\ 0 \le \omega(э_u) \le \omega(э_u) + э_u\omega'(э_u) \le \lambda < 1 \quad (\lambda = \text{const}). \end{gathered} \tag{1.25}$$

6. Обобщенное представление виртуальной работы внутренних сил. Операторное уравнение

Ограниченность функции Ильюшина $\omega(э_u)$ приводит к априорной оценке для виртуальной работы внутренних сил

$$|\langle \mathbf{Au}, \mathbf{v} \rangle| \le C \|\mathbf{u}\|_\Omega \|\mathbf{v}\|_\Omega \quad (C = \text{const}), \tag{1.26}$$

показывающей, что зависящий от $\mathbf{u}$ линейный функционал $\mathbf{Au}$ левой части (1.13) является *ограниченным (непрерывным)* линейным функционалом от $\mathbf{v} \in H(\Omega)$ и, следовательно, по теореме Рисса отождествим с элементом гильбертова пространства $H(\Omega)$. Тем самым, аналогично (1.21) для виртуальной работы внутренних сил получаем представление в виде скалярного произведения

$$\left\langle \mathbf{Au}, \mathbf{v} \right\rangle \equiv (A\mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega \quad \forall \mathbf{v} \in H(\Omega), \tag{1.27}$$

то есть оператор $\mathbf{A}$ *действует в пространстве* $H(\Omega)$:

$$\mathbf{A} : H(\Omega) \to H(\Omega). \tag{1.28}$$

Таким образом, в силу (1.21), (1.27) равенство (1.13) принципа виртуальных работ принимает вид

$$(\mathbf{Au}, \mathbf{v})_\Omega = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_\Omega \quad \forall \mathbf{v} \in H(\Omega), \tag{1.29}$$

что равносильно *операторному уравнению* с заданным $\mathbf{f}$ и искомым $\mathbf{u}$ элементами из $H(\Omega)$

$$\mathbf{Au} = \mathbf{f} \quad \text{в} \quad H(\Omega). \tag{1.30}$$

7. Условия Ильюшина и свойства основного оператора краевой задачи

Из оценки (1.26) немедленно следует *ограниченность* оператора $\mathbf{A}$:

$$\| \mathbf{Au} \|_\Omega \le C \| \mathbf{u} \|_\Omega \quad \forall \mathbf{u} \in H(\Omega). \tag{1.31}$$

При выполнении слабых (а также строгих и сильных) условий Ильюшина оператор $\mathbf{A}$ *непрерывен*:

$$\| \mathbf{Au}_1 - \mathbf{Au}_2 \|_\Omega \le C_1 \| \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \|_\Omega \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in H(\Omega). \tag{1.32}$$

Оператор $\mathbf{A}$ в случае неразупрочняющегося ("устойчивого") материала (слабые условия Ильюшина) является *монотонным*

$$(A\mathbf{u}_1 - A\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_\Omega \ge 0 \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in H(\Omega), \tag{1.33}$$

в случае строгого упрочнения (строгие условия Ильюшина) – *строго монотонным* (равенство в (1.33) выполнено в точности при $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ в $H(\Omega)$), в случае сильного упрочнения – *сильно монотонным*, а именно

$$(\mathbf{Au}_1 - \mathbf{Au}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_\Omega \ge c \| \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \|_\Omega^2 \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in H(\Omega) \tag{1.34}$$

Из сильной монотонности и ограниченности оператора A следует его сильная положительность

$$\| A\mathbf{u} \|_\Omega \ge c \| \mathbf{u} \|_\Omega^2 \quad \forall \mathbf{u} \in H(\Omega), \tag{1.35}$$

а значит, и *коэрцитивность*.

8. Существование и единственность обобщенного решения краевой задачи

Теорема 1 приводит к *достаточным условиям* корректности обобщенной постановки задачи теории малых упругопластических деформаций.

Теорема 2. *Пусть Ω — ограниченная область с кусочно-регулярной границей Γ ($\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$). Пусть внешние массовые и поверхностные силы удовлетворяют условиям (1.20), и выполнены сильные условия Ильюшина.*

Тогда операторное уравнение (1.30) имеет в гильбертовом пространстве $H(\Omega)$ единственное решение, непрерывно зависящее от правой части.

Замечание. Потенциальность определяющих соотношений

$$\exists U(\mathbf{e}) : \mathbf{y} = \frac{dU}{d\mathbf{e}} \tag{1.36}$$

приводит к потенциальности основного оператора краевой задачи, что позволяет перейти с языка монотонности операторов на язык выпуклости функционалов и сформулировать подобные результаты в виде *теорем о стационарности (о минимуме)* функционалов.

1.3. Методы решения начально-краевых задач

1.3.1. Итерационные методы (задачи статики)

Итерационные методы [60-67] основываются, как правило, на выделении "линейной части" соотношений задачи и формулировке на каждом шаге итерации соответствующей линейной задачи для последующего приближения при известной "нелинейной части" соотношений, соответствующей приближению предыдущего шага (предыдущих шагов).

Как видно из общей постановки типичных задач статики при малых деформациях (соотношения (1.1), (1.2)), нелинейная зависимость содержится в определяющем соотношении, задающем тензор напряжений $\mathbf{y}$ как функцию от деформации частицы тела.

Представляя тензор напряжений в виде суммы:

$$\mathbf{y} \equiv \mathbf{y}_{\text{lin}} + \mathbf{y}_*$$

с подходяще выбранным слагаемым $\mathbf{y}_{\text{lin}}$, линейно зависящим от тензора деформаций, и с "остаточным" нелинейным членом $\mathbf{y}_*$, строят итерационную процедуру как последовательность линейных задач в предположении линейного определяющего соотношения, задаваемого выражением $\mathbf{y}_{\text{lin}}^{(n+1)}$, при известных значениях нелинейных членов $\mathbf{y}_*^{(n)}$, относя их к предыдущим приближениям. Тем самым, на каждом $(n+1)$-ом этапе решается линейная задача с неизвестными $\mathbf{u}^{(n+1)}$, $\mathbf{e}^{(n+1)}$ и $\mathbf{y}_{\text{lin}}^{(n+1)}$, и с "определяющим соотношением":

$$\mathbf{y}^{(n+1)} \equiv \mathbf{y}_{\text{lin}}^{(n+1)} + \mathbf{y}_*^{(n)}, \tag{1.37}$$

где: $\mathbf{y}_*^{(n)}$ известно из предыдущего этапа вычислений.

1. Метод упругих решений

Этот метод, предложенный А.А. Ильюшиным для решения задач теории малых упругопластических деформаций [10], предусматривает представление тензора напряжений $\mathbf{y}$ в (1.23) в виде суммы (1.37) и в предположении:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{lin}}^{(n+1)} = 3K\varepsilon^{(n+1)}\mathbf{I} + 2G\text{э}^{(n+1)}, \quad \boldsymbol{\sigma}_*^{(n)} = -2G\omega(\text{э}_u^{(n)})\text{э}^{(n)}. \tag{1.38}$$

Соответствующая итерационная процедура задается решением последовательности краевых задач для однородного упругого тела с модулями G и K, но с дополнительными фиктивными массовыми $\mathbf{b}_*^{(n)}$ и поверхностными $\mathbf{t}_*^{(n)}$ силами:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}_{\text{lin}}^{(n+1)} + \rho(\mathbf{b} + \mathbf{b}_*^{(n)}) = 0,\\
&\boldsymbol{\sigma}_{\text{lin}}^{(n+1)} = 3K\varepsilon^{(n+1)}\mathbf{I} + 2G\text{э}^{(n+1)},\\
&\boldsymbol{\varepsilon}^{(n+1)} = \operatorname{sym}\nabla\mathbf{u}^{(n+1)} \quad \text{в } \Omega,\\
&\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{u}_\Gamma \quad \text{на } \Gamma_u, \qquad \boldsymbol{\sigma}_{\text{lin}}^{(n+1)}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{t}_\Gamma + \mathbf{t}_*^{(n)} \quad \text{на } \Gamma_\sigma,
\end{aligned} \tag{1.39}$$

где:

$$\rho\mathbf{b}_*^{(n)} = -2G\operatorname{div}[\omega(\text{э}_u^{(n)})\text{э}^{(n)}], \quad \mathbf{t}_*^{(n)} = 2G\omega(\text{э}_u^{(n)})\text{э}^{(n)}\cdot\mathbf{n}. \tag{1.40}$$

Обобщенная формулировка задачи (1.39) при условиях (1.40) сводится к итерационному операторному уравнению [61-63]:

$$\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{A}_*\mathbf{u}^{(n)} \quad \text{в } H(\Omega), \tag{1.41}$$

где оператор $\mathbf{A}_*$ задается равенством $\mathbf{A}_*\mathbf{u} := \mathbf{u} - \frac{1}{2G}\mathbf{A}\mathbf{u} + \frac{1}{2G}\mathbf{f}$ и удовлетворяет соотношению

$$(\mathbf{A}_*\mathbf{u},\mathbf{v})_\Omega=\frac{1}{2G}\int_\Omega \rho\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}dV+\frac{1}{2G}\int_{\Gamma_\sigma}\mathbf{t}_\Gamma\cdot\mathbf{v}dS+\int_\Omega \omega(э_u[\mathbf{u}])э[\mathbf{u}]:э[\mathbf{v}]dV. \quad (1.42)$$

2. Сходимость метода

Доказательство сходимости метода упругих решений основывается на свойстве сильного сжатия оператора $\mathbf{A}_*$, справедливом для сильно упрочняющихся материалов (сильное условие Ильюшина):

$$\|\mathbf{A}_*\mathbf{u}_1-\mathbf{A}_*\mathbf{u}_2\|_\Omega\le\lambda\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\|_\Omega \quad \forall\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\in H(\Omega) \quad (1.43)$$

(константа $\lambda<1$ та же, что и в сильном условии Ильюшина).

Справедливо следующее утверждение [61].

Теорема 3. В условиях теоремы 2 оператор $\mathbf{A}_*$ действует в $H(\Omega)$, последовательность $\mathbf{u}^{(n)}$, определенная рекуррентным соотношением (1.41), существует, является сходящейся при любом начальном приближении $\mathbf{u}^{(0)}\in H(\Omega)$ (со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем λ), и ее предел $\mathbf{u}$ есть обобщенное решение краевой задачи, совпадающее с решением уравнения (1.30).

3. Модификации метода упругих решений

Метод приведенного модуля сдвига [63] ориентирован на решение задач теории малых упругопластических деформаций с развитыми пластическими деформациями, когда "среднее" в области тела Ω значение отношения $\frac{\sigma_u}{э_u}$ ("секущего модуля") заметно меньше величины $3G$. Вместо G вводится меньшая положительная константа G^* (приведенный модуль сдвига), и выражение интенсивности напряжений записывается в форме:

$$\sigma_u=3G^*э_u[1-\tau(э_u)], \quad (1.44)$$

где функция τ выражается через функцию Ильюшина ω в виде:

$$\tau(э_u)=1-[1-\omega(э_u)]\frac{G}{G^*}, \quad (1.45)$$

и сильное условие Ильюшина (в разностной форме) принимает вид:

$$1-\frac{G}{G^*}\le\tau(э_u)\le\tau(э_u)+\frac{\tau(э_u)-\tau(э'_u)}{э_u-э'_u}э'_u\le\lambda+1-\frac{G}{G^*}. \quad (1.46)$$

Аналогично методу упругих решений итерационная процедура строится на основе представления (1.37) со слагаемыми, построенными по (1.44) подобно (1.38):

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{lin}}^{(n+1)}=3K\varepsilon^{(n+1)}\mathbf{I}+2G^*\mathbf{э}^{(n+1)}, \quad \boldsymbol{\sigma}_*^{(n)}=-2G^*\tau(э_u^{(n)})\mathbf{э}^{(n)}, \quad (1.47)$$

и сводится к решению последовательности краевых задач для линейно упругого тела с модулями G^* и K и с дополнительными фиктивными массовыми и поверхностными силами.

В обобщенном представлении процедура сводится к операторному уравнению

$$\mathbf{u}^{(n+1)}=\mathbf{A}_{*1}\mathbf{u}^{(n)}, \quad (1.48)$$

где оператор $\mathbf{A}_{*1}$ задан аналогично $\mathbf{A}_*$ соотношением, подобным (1.42):

$$(\mathbf{A}_{*1}\mathbf{u},\mathbf{v})_\Omega=\frac{1}{2G^*}\int_\Omega \rho\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}dV+\frac{1}{2G^*}\int_{\Gamma_\sigma}\mathbf{t}_\Gamma\cdot\mathbf{v}dS+\int_\Omega \tau(э_u[\mathbf{u}])э[\mathbf{u}]:э[\mathbf{v}]dV. \quad (1.49)$$

Можно показать сжимающее свойство оператора $\mathbf{A}_{*1}$ и сходимость метода приведенного модуля сдвига при условии

$$|\tau(э_u)|+\frac{\tau(э_u)-\tau(э'_u)}{э_u-э'_u}э'_u\le\lambda<1. \quad (1.50)$$

Метод переменных параметров упругости [63] предусматривает представление вида (1.37) со слагаемыми

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{lin}}^{(n+1)} = 3K\varepsilon^{(n+1)}\mathbf{I} + 2G[1-\omega(э_u^{(n)})]\mathbf{э}^{(n+1)}, \quad \boldsymbol{\sigma}_*^{(n)} = 0. \qquad (1.51)$$

Отсутствие нелинейного слагаемого $\mathbf{y}_*^{(n)}$ в (1.51) показывает, что на каждом этапе метода решается линейная задача теории упругости с неизменными массовыми и поверхностными силами (теми, которые заданы в постановке исходной нелинейной задачи пластичности). Однако выражение линейного слагаемого $\mathbf{y}_{\text{lin}}^{(n+1)}$ в (1.51) показывает, что свойства линейной упругости на $(n+1)$-ом этапе метода выражаются постоянным объемным модулем K и, вообще говоря, переменным по координатам модулем сдвига $G^{(n)} \equiv G[1-\omega(э_u^{(n)})]$, причем различным на разных этапах.

Доказана сходимость этого метода при выполнении сильного условия Ильюшина с $\lambda < \frac{1}{2}$. Однако при подходящем выборе начального приближения можно ожидать сходимость метода и в случае $\frac{1}{2} \le \lambda < 1$.

Метод переменных параметров упругости, хотя и более трудоемок, чем предыдущие, но сходится быстрее, особенно в тех случаях, когда напряженно-деформированное состояние тела существенно неоднородно (значение секущего модуля $\dfrac{\sigma_u}{э_u}$ неоднородно в области Ω).

Метод однородных линейных приближений [64,65] является обобщением метода упругих решений на случай тел с неоднородными упругопластическими свойствами (с неоднородными по координатам свойствами объемной упругости и пластическими свойствами), обусловленными в первую очередь влиянием температуры и радиационного облучения.

1.3.2. Инкрементальные подходы (эволюционные задачи)

Для решения эволюционных задач (динамика, квазистатика) целесообразно использование *инкрементальных* методов, предусматривающих разбиение временного интервала на малые промежутки и решение задачи определения приращений искомых величин (полей) на этих промежутках.

Частичная дискретизация процесса (дискретизация по времени, или семидискретизация) предполагает определение дискретных по времени значений искомых полей при (приближенном) выполнении соотношений исходной эволюционной задачи в каждый дискретный момент времени.

Нелинейность определяющих соотношений и выраженная ими сложная зависимость напряжений от истории деформаций приводит систему соотношений задачи для приращений на каждом шаге к сложному нелинейному виду.

Однако задача для приращений на отдельном шаге по времени может быть формально классифицирована как некоторая задача статики. К решению этой задачи могут быть применены *итерационные процедуры* методов последовательных приближений (включая метод упругих решений и его модификации).

Такая схема пошаговых вычислений предложена в *методе псевдоупругой семидискретизации* для решения начально-краевых задач теории пластичности малой кривизны [68, 69].

НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

1.4. Общие постановки задач

2.1.1. Лагранжева постановка

1. Система соотношений

Основная система соотношений начально краевой задачи при конечных деформациях тела в лагранжевом описании выражается системой уравнений относительно искомых функций, определенных в области $\Omega\times[t_0,t_1]$ лагранжевых переменных $(\mathbf{x},t)$ (Ω – область отсчетной конфигурации тела): функции $\mathbf{f}$ лагранжева закона движения $\boldsymbol{x}=\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ ($\boldsymbol{x}$ – актуальное в момент t положение точки тела $\mathbf{x}$), аффинора деформации $\mathbf{A}$, тензора деформаций Коши–Грина $\mathcal{E}$, тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа второго рода $\mathbf{P}$, плотности массы ρ в актуальной конфигурации:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}_{\mathbf{x}}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{P})+\rho_0\mathbf{b}=\rho_0\mathbf{w},\\
&\mathbf{P}=\mathbf{P}^T,\\
&\mathbf{A}=\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f},\\
&\mathcal{E}=\frac{1}{2}(\mathbf{C}-\mathbf{I}),\\
&\rho J=\rho_0
\end{aligned}\tag{2.1}$$

при выполнении начальных и граничных условий. Здесь $\mathbf{w}=\dfrac{d^2\mathbf{f}}{dt^2}$ – ускорение точки тела, $\mathbf{C}=\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{A}$ – мера деформаций Коши, $J=|\,det\,\mathbf{A}\,|$ – кратность изменения объема при деформации, $\mathbf{I}$ – единичный тензор второго ранга.

Полная система соотношений начально-краевой задачи получается из основной системы добавлением определяющего соотношения, представимого в форме [3, 7]:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x},t)=\mathbf{F}_P([\mathcal{E}^t(\mathbf{x},s)]_{s\geq0},\mathbf{x}),\tag{2.2}$$

где: $\mathcal{E}^t$ – предыстория деформаций.

2. Особенности задания внешних нагрузок

Трудность такой постановки задачи обусловлена неизвестной наперед актуальной конфигурацией тела.

Внешние массовые силы известны, как правило, в виде функций от эйлеровых переменных $\mathbf{b}=\mathbf{b}(x,t)$ и потому появляются в системе (2.1) в виде функций известного вида от неизвестной величины $\mathbf{f}$, а именно, в виде: $\mathbf{b}=\mathbf{b}(\mathbf{f},t)$.

Поверхностные силы $\mathbf{t}_\Gamma$ в граничном условии $(1.2)_2$ зачастую определяются неизвестной наперед фактической историей процесса движения тела и не могут быть заданы физически априорно на всем промежутке времени $[t_0,t_1]$. Априорное задание поверхностных сил (например, в виде "мертвых" или "следящих" нагрузок [19,20]) лишь в редких случаях физически обусловлено.

2.1.2. Эйлерова постановка

1. Система соотношений

Основная система соотношений начально-краевой задачи при конечных деформациях среды в эйлеровой постановке выражается системой уравнений для искомых функций от эйлеровых переменных $(\boldsymbol{x},t)\in\Omega_{\mathrm{E}}\times[t_0,t_1]$ (Ω_{E} — фиксированная в пространстве эйлерова область, заполненная средой): вектора скорости $\mathbf{v}$ точек тела, тензора скоростей деформаций $\mathbf{V}$, тензора напряжений Коши $\mathbf{S}$, плотности массы ρ:

$$\begin{aligned} &\mathrm{div}_x\mathbf{S}+\rho\mathbf{b}=\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt},\\ &\mathbf{S}=\mathbf{S}^T,\\ &\mathbf{V}=\mathrm{sym}\nabla_x\mathbf{v},\\ &\frac{d\rho}{dt}+\rho\mathrm{div}_x\mathbf{v}=0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

при выполнении начальных и граничных условий.

Дополнение основной системы определяющим соотношением приводит к *полной системе соотношений* начально-краевой задачи в эйлеровом описании [7].

2. Ограничительность эйлерова описания

Определяющее соотношение любой индивидуальной частицы классической сплошной среды представимо в форме Нолла [3]:

$$\mathbf{S}(\mathbf{x},t)=\mathbf{Q}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{F}_N([\mathbf{X}^t(\mathbf{x},s)]_{s\geq 0},\mathbf{x})\cdot\mathbf{Q}^T(\mathbf{x},t), \tag{2.4}$$

где: $\mathbf{X}$ – правый тензор растяжений, $\mathbf{Q}$ – тензор полярного поворота частицы, $\mathbf{x}$ – лагранжева координата частицы.

Соотношение (2.4) задает значение тензора напряжений Коши $\mathbf{S}$ в точке среды в момент времени t, если известна полная предыстория движения частицы тела относительно ее отсчетной конфигурации. Это обстоятельство справедливо для подавляющего большинства деформируемых твердых тел.

В общем случае использование определяющего соотношения (2.4) в эйлеровой постановке задачи требует знания предыстории движения частиц среды на входе в эйлерову область Ω_{E}, что существенно усложняет задачу.

Эффективное применение эйлерова постановка задачи находит лишь в частном случае, когда выполнены следующие условия:

1) определяющее соотношение задает тензор напряжений независимо от выбора отсчетной конфигурации (одинаково для всех отсчетных конфигураций),
2) тензор напряжений определяется не всей предысторией движения частицы (и не каким-либо ее конечным отрезком), а только инфинитезимальной (бесконечно малой) предысторией,
3) зависимость тензора напряжений от движения частицы одинакова для всех частиц (среда однородна).

Рассмотрим определяющее соотношение классической среды в относительном описании (относительно текущей t-конфигурации) в общей приведенной форме Труделла [3] (эквивалентной форме (2.4))

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}_t,t)=\mathbf{Q}_\kappa(\mathbf{x}_t,t)\cdot\mathbf{H}_\kappa([(\mathbf{C}_t^t(\mathbf{x}_t,s))^{\mathbf{Q}_\kappa(\mathbf{x}_t,t)}]_{s\geq 0};\mathbf{C}_\kappa(\mathbf{x}_t,t),\mathbf{x}_t)\cdot\mathbf{Q}_\kappa^T(\mathbf{x}_t,t), \tag{2.5}$$

где: $\mathbf{x}_t$ – координата точки тела в t-конфигурации, нижний индекс κ показывает зависимость от отсчетной конфигурации κ и использовано обозначение

$$(\mathbf{C}_t^t(\mathbf{x}_t,s))^{\mathbf{Q}_\kappa(\mathbf{x}_t,t)}\equiv\mathbf{Q}_\kappa^T(\mathbf{x}_t,t)\cdot\mathbf{C}_t^t(\mathbf{x}_t,s)\cdot\mathbf{Q}_\kappa(\mathbf{x}_t,t).$$

Условие 1) приводит соотношение (2.5) к виду:

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}_t,t)=\mathbf{H}([\mathbf{C}_t^t(\mathbf{x}_t,s)]_{s\geq 0};\rho(\mathbf{x}_t,t),\mathbf{x}_t) \tag{2.6}$$

с изотропным по $[\mathbf{C}_t^t(\mathbf{x}_t,s)]_{s0}$ отображением $\mathbf{H}$, не зависящим от κ.

Соотношение (2.6) есть не что иное, как *общая форма определяющего соотношения* *жидкости* [3]. Оно не зависит от отсчетной конфигурации, но предполагает наличие памяти на полную относительную предысторию движения частицы (относительно t-конфигурации).

Условие 2) сводит зависимость от полной предыстории $[\mathbf{C}_t^t(\mathbf{x}_t, s)]_{s\geq 0}$ к зависимости от тензоров Ривлина–Эриксена различных порядков n, определяемых для произвольной частицы тела равенством [3]:

$$\mathbf{R}_n(t) := \left.\frac{d^n \mathbf{C}_t(\tau)}{d\tau^n}\right|_{\tau=t}. \tag{2.7}$$

Соотношение (2.6) принимает вид:

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}_t, t) = \mathbf{h}(\mathbf{R}_1(\mathbf{x}_t, t), \mathbf{R}_2(\mathbf{x}_t, t), ..., \mathbf{R}_n(\mathbf{x}_t, t), ...; \rho(\mathbf{x}_t, t), \mathbf{x}_t) \tag{2.8}$$

с тензорнозначной функцией $\mathbf{h}$, изотропной по своим тензорным аргументам.

Наконец, условие 3) об однородности среды означает отсутствие явной зависимости функции $\mathbf{h}$ от координаты $\mathbf{x}_t$.

При этом, ограничиваясь лишь первым тензором Ривлина–Эриксена $\mathbf{R}_1$ и учитывая равенство $\mathbf{R}_1 = 2\mathbf{V}$ для тензора скоростей деформаций $\mathbf{V}$, а также равенство $\mathbf{x}_t \equiv \boldsymbol{x}$ координаты $\mathbf{x}_t$ относительного описания и эйлеровой координаты $\boldsymbol{x}$, получаем из (2.8) определяющее соотношение *простейшей однородной жидкости* [7]

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{f}(\mathbf{V}(\boldsymbol{x}, t); \rho(\boldsymbol{x}, t)), \tag{2.9}$$

где функция $\boldsymbol{f}$ изотропна по $\mathbf{V}$.

Соотношение (2.9) справедливо, в частности, для всех однородных идеальных (эйлеровых) жидкостей, линейно вязких (ньютоновых) и нелинейно вязких (неньютоновых) простейших жидкостей.

Оно может быть отнесено к деформируемым твердым телам лишь при исключительных предположениях (например, к изотропным телам в состоянии пластического течения).

2.2. Замечания о существовании и единственности решений задач о конечных деформациях

2.2.1. Примеры (нелинейная упругость)

1. Случаи несуществования решений

Для модели *нелинейно упругого материала Сен-Венана* [20], определяемой линейным соотношением вида закона Гука для тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа второго рода $\mathbf{P}$ и тензора деформаций Коши–Грина $\boldsymbol{\mathcal{E}}$

$$\mathbf{P} = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\mathcal{E}})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\mathcal{E}}, \tag{2.10}$$

задача об одноосном растяжении стержня постоянного поперечного сечения имеет решение в точности при значениях кратности удлинения λ_1 стержня, удовлетворяющих условию

$$\lambda_1 < \sqrt{\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda}} \equiv C_1. \tag{2.11}$$

Следовательно, задача с кинематическим граничным условием, отвечающим неравенству $\lambda_1 \geq C_1$, *не имеет решений*. При этом при $\lambda_1 \to C_1 - 0$ поперечные размеры стержня (кратности λ_2 и λ_3 поперечных удлинений) стремятся к нулю, истинное растягивающее напряжение асимптотически обратно пропорционально площади поперечного сечения, так что растягивающая сила стремится к постоянной величине $\mu\sqrt{\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda}}$ (в расчете на стержень с единичной начальной площадью поперечного сечения).

Для той же модели Сен-Венана задача об одномерном растяжении плоского слоя в поперечном направлении (лишь с одной компонентой деформации растяжения–сжатия λ_1) имеет решение тогда и только тогда, когда растягивающее (сжимающее) напряжение S_1 на лицевых поверхностях слоя удовлетворяет неравенству:

$$S_1 \geq -\frac{\lambda + 2\mu}{3\sqrt{3}}. \qquad (2.12)$$

При этом при $S_1 \geq 0$ и при $S_1 = -\frac{\lambda+2\mu}{3\sqrt{3}}$ решение единственно, а при $-\frac{\lambda+2\mu}{3\sqrt{3}} < S_1 < 0$ существует ровно два решения. При $S_1 < -\frac{\lambda+2\mu}{3\sqrt{3}}$ решений нет.

Для модели *нелинейно упругого <u>материала Сетха</u>* [20] с аналогичной линейной зависимостью между тензором напряжений Коши $\mathbf{S}$ и тензором деформаций Альманзи $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{S} = \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} \qquad (2.13)$$

решение задачи об одноосном растяжении–сжатии стержня существует ровно при условии:

$$\lambda_1 > \sqrt{\frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}} \equiv C_2, \qquad (2.14)$$

причем при $\lambda_1 \to C_2 + 0$ поперечные размеры стержня неограниченно растут ($\lambda_{2,3} \to +\infty$), истинное сжимающее напряжение стремится к константе $-\mu\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda}$, сжимающая сила – к бесконечности, и при $\lambda_1 \leq C_2$ решение перестает существовать.

Отсутствие решений или их явная физическая неадекватность в определенных процессах и диапазонах конечных деформаций могут быть выявлены также в задачах с другими моделями деформируемых твердых тел (нелинейная упругость, гипоупругость, пластичность) [20,22,70,71].

2. Примеры неединственности решений задач статики

Известны примеры неединственности решений задач статики с конечными деформациями [19,20].

К числу таких задач с *отсутствующими внешними нагрузками* относятся задачи нелинейной упругости о выворачивании полого цилиндра наизнанку, о выворачивании полусферического купола.

К числу таких задач с *нетривиальными внешними нагрузками* относится, например, задача о равновесии стержня под действием приложенных к его торцам взаимно уравновешенных "мертвых" нагрузок: стержень либо растянут, либо (когда его торцы меняются местами) сжат. Таковы же задачи о статическом равновесии полого цилиндра или полусферического купола в вывернутом и невывернутом состояниях при наличии ненулевых внешних нагрузок.

Неединственность решений демонстрируют различные задачи статического равновесия нелинейно упругих тел при наличии *контакта с сухим трением* (например, контакта шины автомобиля с дорожным покрытием).

Наличие таких примеров, отвечающих реальному поведению тел, показывает, что априорное требование единственности решений задач статики при больших деформациях далеко не во всех случаях уместно.

2.2.2. Физическая достоверность соотношений и гипотеза о существовании единственного решения в эволюционных задачах

Неединственность решений задач статики при конечных деформациях обусловлена тем, что в этих задачах фигурируют только начальная (недеформированная) и конечная (деформированная) конфигурации равновесия тела. При этом игнорируется рассмотрение процесса перехода тела из одного состояния в другое.

Процесс смены актуальных конфигураций тела, то есть движение тела, происходящее с течением времени (или другого времениподобного параметра), описывается *эволюционными задачами* — задачами динамики или квазистатики.

Решениями эволюционных задач являются искомые поля-процессы перемещений, деформаций и напряжений, меняющиеся в течение времени, как правило, непрерывно. Для таких задач можно предположить *единственность решений как непрерывных по времени полей-процессов*. Исключение могут составить задачи об устойчивости процессов [72.73].

В эволюционных задачах особо необходимо обеспечение *физической достоверности* определяющих соотношений для исследуемых динамических и квазистатических процессов, а также достоверности граничных условий, особенно при наличии трения (часто сопровождаемого износом, адгезией и т.п.)

Заключение

Постановки и методы решения краевых задач механики деформируемого твердого тела при малых деформациях получили достаточно продвинутое теоретическое описание, опирающееся на современные достижения теории дифференциальных уравнений и функционального анализа. Обобщенная постановка задач демонстрирует существенное значение основных свойств основного оператора краевой задачи для обеспечения математической корректности задачи: существования, единственности решения и его непрерывной зависимости от данных задачи. Свойства непрерывности, коэрцитивности и монотонности основного оператора краевой задачи отражают механические характеристики материала и определяются этими характеристиками. Поэтому физическая достоверность решений задач может быть обеспечена физической достоверностью соотношений задачи, в первую очередь, достоверностью определяющих соотношений материала, требующей основательного экспериментального подтверждения.

Как показывает проведенное рассмотрение, подходы к обобщенным формулировкам задач сопряжены с необходимостью аккуратного учета механических особенностей задачи и возможных способов их математического описания. Эти трудности компенсируются тем, что обобщенная формулировка позволяет эффективно оценить корректность постановки задачи и сходимость методов решения.

Рассмотренные постановки задач при конечных деформациях выявляют особенности лагранжевой и существенную ограничительность эйлеровой формулировок. Предложенные условия эффективного использования эйлеровой постановки существенно сужают класс исследуемых материалов, сводя его к семейству простейших однородных жидкостей, что в весьма редких случаях может быть перенесено на движения деформируемых твердых тел.

Приведенные примеры несуществования решений задач для простейших моделей нелинейно упругих тел демонстрируют отсутствие адекватности моделей в определенных диапазонах деформаций, что подчеркивает особую значимость физической достоверности определяющих соотношений модели. Примеры неединственности решений задач, в свою очередь, отвечают адекватному поведению тел в реальных условиях и тем самым показывают нецелесообразность априорного требования единственности решений задач статики. Гипотеза о единственности решений эволюционных задач (динамика, квазистатика) как непрерывных во времени полей процессов представляется допустимым предположением для большинства материалов и процессов устойчивого характера.

Моделирование процессов в деформируемых твердых телах при конечных деформациях сопряжено с существенными трудностями, обусловленными геометрической и физической нелинейностью соотношений краевых задач, неголономностью связей между тензорными мерами напряжений и деформаций, неоднозначностью самих тензорных мер и их производных по времени (см., например, [74-84]). Имеющиеся в этой области исследования сосредоточены в основном на определяющих соотношениях сред. В этой связи предложенный А.А. Ильюшиным метод СН-ЭВМ [11,85-87], основанный на непосредственном использовании экспериментальных данных в расчетной схеме, представляется гарантом физической достоверности результатов.

Литература

1. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.
2. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1,2. М.: Наука, 1984.
3. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975.
4. Жермен П. Механика сплошных сред. М.: Высшая школа, 1983.
5. Победря Б.Е., Георгиевский Д.В. Основы механики сплошной среды. Курс лекций. М.: Физматлит, 2006.
6. Эглит М.Э. Лекции по основам механики сплошных сред. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2008.
7. Бровко Г.Л. Основы механики сплошной среды. М.: Изд-во "Попечительский совет механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова". Ч.1. — 2011. Ч.2. — 2013.
8. Ильюшин А.А., Ломакин В.А., Шмаков А.П. Задачи и упражнения по механике сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1973. 200 с.
9. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Мир, 1974. 318 с.
10. Ильюшин А.А. Пластичность. Ч.1. Упругопластические деформации. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. 376 с. (См. также: М.: Логос, 2004. 388 с. – репр. переизд.)
11. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
12. Ильюшин А.А., Ленский В.С. Сопротивление материалов. М.: Физматгиз, 1959. 371 с.
13. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
14. Толоконников Л.А. Механика деформируемого твердого тела. М.: Высшая школа, 1979. 318 с.
15. Ляв А. Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935. 674 с.
16. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 575 с.
17. Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 663 с.
18. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
19. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
20. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
21. Черных К.Ф. Нелинейная упругость (теория и приложения). СПб: Соло, 2004. 420 с.
22. Сьярле Ф. Математическая теория упругости. М.: Мир, 1992. 471 с.
23. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 456 с.
24. Победря Б.Е., Георгиевский Д.В. Лекции по теории упругости. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
25. Исраилов М.Ш. Динамическая теория упругости и дифракция волн. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992. 204 с.
26. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Мысль, 1970. 280 с.
27. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. 343 с.
28. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 336 с.
29. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации. М.: Наука, 1986. 232 с.
30. Левитас В.И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наукова думка. 1987. 231 с.

31. Кийко И.А. Вязко-пластическое течение материалов. Физико-математические основы технологии обработки давлением (Ч.I — под общ. ред. И.А.Кийко, Ч.II — авт. И.А.Кийко). М.: Изд-во ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ, 2003. Кн. I: 98 с., кн. II: 132 с.
32. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред. М.: Мир, 1979. 302 с.
33. Темам Р. Математические задачи теории пластичности. М.: Наука, 1991. 288 с.
34. Зубчанинов В.Г. Механика процессов пластических сред. М.: Физматлит, 2010. 352 с.
35. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. 367 с.
36. Маркин А.А. Вариант определяющих соотношений и постановка граничных задач при конечных упругопластических деформациях. Автореф. дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. М.: 1988. 38 с.
37. Москвитин В.В. Циклические нагружения элементов конструкций. М.: Наука, 1981. 344 с.
38. Мосолов П.П., Мясников В.П. Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.
39. Астарита Дж., Марруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 309 с.
40. Eringen A.C. Mechanics of continua. New-York: John Wiley & Sons, 1967.
41. Gurtin M.E. An introduction to continuum mechanics. New York, London, Toronto, Sydney, San Francisco: Academic Press, 1981.
42. Maugin G.A. The thermomechanics of plasticity and fracture. Cambridge, N.-Y., Port Chester, Melbourne, Sydney: Cambridge University Press, 1992. 350(+xx) pp.
43. Rymarz Cz., Mechanika ośrodków ciagłyh. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 1993.
44. Silhavy M. The mechanics and thermodynamics of continuous media. Berlin: Springer, 1997.
45. Wilmanski K. Thermomechanics of continua. Berlin: Springer, 1998.
46. Ленский В.С. Физическая достоверность в современной теории пластичности. В кн.: Упругость и неупругость. Ч.1. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1993. С. 95-119.
47. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
48. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
49. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: ГИФМЛ, 1958. 439 с.
50. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 159 с.
51. Михлин С.Г. Проблема минимума квадратичного функционала. М.-Л.: Гостехиздат, 1952. 250 с.
52. Дьяконов Е.Г. Энергетические пространства и их применения. М.: Изд. отдел ф-та ВМК МГУ, 2001.
53. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950. Переизд.: М.: 1962; М.: 1988. 333 с.
54. Соболев С.Л. Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций. М.: Наука, 1989. 254 с.
55. Шварц Л. Математические методы для физических наук. М.: Мир, 1965. 412 с.
56. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 587 с.
57. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. М.: Наука, 1972. 415 с.
58. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
59. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. 336 с.
60. Биргер И.А. Некоторые общие методы решения задач теории пластичности. ПММ. 1951.

Т.15. Вып.6. С.765-770.
61. Ворович И.И., Красовский Ю.П. О методе упругих решений. ДАН СССР. 1959. Т.126. № 4. С. 740-743.
62. Быков Д.Л. О некоторых методах решения задач теории пластичности. В кн.: Упругость и неупругость. Вып.4. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975. С. 119-139.
63. Быков Д.Л., Шачнев В.А. Об одном обобщении метода упругих решений. ПММ. 1969. Т.33. Вып.2. С. 290-298.
64. Ленский В.С. Влияние радиоактивного облучения на механические свойства твердых тел. Инж. сб. 1960. Т.28. С. 97-133.
65. Бровко Г.Л., Ленский В.С. О сходимости метода однородных линейных приближений в задачах теории пластичности неоднородных тел. ПММ. 1972. Т.36. № 3. С. 519-527.
66. Кравчук А.С. О методе последовательных приближений в теории пластичности при сложном нагружении. Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1970. № 4. С. 188-191.
67. Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 455 с.
68. Бровко Г.Л. О постановке краевых задач теории упругопластических процессов малой кривизны. Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ. 1980. № 4. С. 80-83.
69. Бровко Г.Л. Об одном методе последовательных приближений в классе задач общей теории пластичности. Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ. 1982. № 6. С. 76-83.
70. Сьярле Ф., Рабье П. Уравнения Кармана. М.: Мир, 1983. 172 с.
71. Lehmann Th. On the concept of stress-strain relations in plasticity. Acta Mech. 1982. V.42. Pp. 263-275.
72. Громов В.Г. Современное состояние и проблемы математической теории устойчивости в механике упругих и наследственно упругих тел. В кн.: Устойчивость в механике деформируемого твердого тела. Калинин: Изд-во Калининск. ун-та, 1986. С. 65-87.
73. Георгиевский Д.В. Устойчивость процессов деформирования вязкопластических тел. М.: УРСС, 1998. 176 с.
74. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. Л.-М.: Гостехиздат, 1948. 211 с.
75. Новожилов В.В., Толоконников Л.А., Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости. Механика в СССР за 50 лет. 1968. Т.3. С. 71-78.
76. Seth B.R. Generalized strain measures with applications to physical problems. In: Second Order Effects in Elasticity, Plasticity and Fluid Dynamics (Edited by M.Reiner and D.Abir). Oxford: Pergamon Press, 1964. Pp. 162-172.
77. Hill R. Aspects of invariance in solid mechanics. Advances in Appl. Mech. N.-Y. - L.: Acad. Press. 1978. V.18. Pp. 1-75.
78. Седов Л.И. Понятие разных скоростей изменения тензоров. ПММ. 1960. Т.24. Вып.3. С 393-398.
79. Бровко Г.Л., Ильюшин А.А. Модели и определяющие эксперименты в теории упругопластических процессов при конечных деформациях. В кн.: А.А.Ильюшин. Труды. Т. 4. Моделирование динамических процессов в твердых телах и инженерные приложения. М.: Физматлит, 2009. С. 148-159.
80. Бровко Г.Л. Материальные и пространственные представления определяющих соотношений деформируемых сред // ПММ. 1990. Т.54. Вып.5. С.814-824. 166.
81. Маркин А.А., Толоконников Л.А. Меры и определяющие соотношения конечного упругопластического деформирования. Прикладные проблемы прочности и пластичности. Всес. межвуз. сб. Горький: Изд-во Горьковского ун-та, 1987. С. 32-37.
82. Кондауров В.И., Никитин Л.В. Теоретические основы реологии геоматериалов. М.: Наука, 1990. 205 с.
83. Арутюнян Н.Х., Метлов В.В. О принципе инвариантности в теории неоднородно стареющих сред. ПММ. 1986. Т.50. Вып.6. С. 1034-1036.

84. Brovko G.L., Ivanova O.A., Finoshkina A.S. On geometrical and analytical aspects in formulations of problems of classic and non-classic continuum mechanics. Operator Theory: Advances and Applications. Birkhäuser Verlag Basel/Switzerland. 2009. Vol. 191. Pp. 51-79.
85. Богатырев И.С., Ильюшин А.А., Ленский В.С., Панферов В.М. Машина СН для исследования пластического деформирования металлов при сложном нагружении. Инж. журнал. 1961. Т.1. Вып.2. С. 182-193.
86. Ильюшин А.А. Метод СН–ЭВМ в теории пластичности. В кн.: Проблемы прикладной математики и механики. М.: Наука, 1971. С. 166-178.
87. Бабамурадов К.Ш., Ильюшин А.А., Кабулов В.К. Метод СН-ЭВМ и его приложения к задачам теории пластичности. Ташкент: Фан, 1982. 286 с.