Вариант связи между напряжениями и деформациями в теории пологих оболочек

к.т.н. проф. Володин В.П., Надиров Э.Р.
Тверской государственный технический университет, г. Тверь
+7 (4822) 52-63-63, n-emin@mail.ru

Аннотация. Получены уравнения связи между напряжениями, деформациями и внутренними усилиями для прямоугольных в плане пологих оболочек, удобные для численного расчета процесса их нагружения. Задача решается с учетом геометрической и физической нелинейностей.

Ключевые слова: пологая оболочка, напряжения, деформации, тензор, девиатор

Введение

В работе дается единая форма связи между напряжениями σ_{ij} и деформациями e_{ij} для трех рассматриваемых случаев материала оболочки. Материал оболочки будем считать: упругим, нелинейно-упругим, упруго-пластическим. Рассматривается квазипростое нагружение оболочки.

В соответствии с теорией квазипростых процессов принимаем [3-5]:

1. Закон упругого изменения объема.

$$e_0 = \frac{\sigma_0}{3K},\ K = \frac{E}{3(1-2\mu)}; \tag{1}$$

где: $e_0 = \frac{1}{3} e_{ii}$ – средняя деформация; $\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$ – среднее напряжение; K – модуль объемной деформации Бриджмена; E – модуль упругости; μ – коэффициент Пуассона. Используется правило суммирования по повторяющемуся индексу.

2. Закон упругопластического формоизменения.

$$S_{ij} = N_p Э_{ij}, \tag{2}$$

где: $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0$, $Э_{ij} = e_{ij} - \delta_{ij} e_0$ – компоненты девиаторов напряжений и деформаций.

Для упругих панелей: $N_p = 2G = \dfrac{E}{1+\mu}$;

если материал панели нелинейно-упругий [4], то: $N_p = \dfrac{\sigma}{Э} = 2G_p = \dfrac{E_p}{1+\mu_p}$;

в теории квазипростых процессов: $N_p = 2G_p + (2G - 2G_p) f^q$, $f = \dfrac{1}{2}(1-\cos\vartheta_1)$, $2G_p = \dfrac{\sigma}{Э}$,

E_p, G_p, μ_p – пластические характеристики материала;

q – экспериментально определяемый параметр [3, 4].

3. Закон упругопластического упрочнения.

Модуль тензора-девиатора напряжений есть универсальная функция модуля тензора-девиатора деформаций:

$$\sigma = \Phi(Э),$$

определяемая из опытов на простое растяжение [3].

Связь между напряжениями и деформациями

Запишем общую зависимость (2) в обратной форме: $Э_{ij} = \dfrac{1}{N_p} S_{ij}$, или в развернутом виде (в технических обозначениях):

$$\begin{cases} e_x - e_0 = (\sigma_x - \sigma_0)/N_p, \quad e_{xy} = \tau_{xy}/N_p, \\ e_y - e_0 = (\sigma_y - \sigma_0)/N_p, \quad e_{yz} = \tau_{yz}/N_p, \\ e_z - e_0 = (\sigma_z - \sigma_0)/N_p, \quad e_{zx} = \tau_{zx}/N_p. \end{cases} \tag{3}$$

Вследствие гипотезы прямых нормалей $e_{xz} = e_{yz} = 0$, а поэтому: $\tau_{xz}, \tau_{yz} << \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$.

Вследствие гипотезы о ненадавливании слоев:

$$\sigma_z << \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}. \tag{4}$$

Таким образом, можно считать, что в оболочке возникает плоское напряженное состояние. На основании (4) запишем:

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y). \tag{5}$$

Из выражения (3) с учетом (1) получим:

$$e_z - e_0 = -\frac{1}{N_p}\sigma_0; \; e_z = \frac{1 - 3K/N_p}{2 + 3K/N_p}(e_x + e_y); \; e_0 = \frac{1}{2 + 3K/N_p}(e_x + e_y). \tag{6}$$

В частном случае нелинейно-упругого тела:

$$K = \frac{E_p}{3(1 - 2\mu_p)}; \; N_p = 2G_p = \frac{E_p}{1 + \mu_p}; \tag{7}$$

$$1 - \frac{3K}{N_p} = -\frac{3\mu_p}{1 - 2\mu_p}; \; 2 + \frac{3K}{N_p} = \frac{3(1 - \mu_p)}{1 - 2\mu_p}. \tag{8}$$

В результате получим: $e_z = -\frac{\mu_p}{1 - \mu_p}(e_x + e_y)$; $e_0 = \frac{1 - 2\mu_p}{3(1 - \mu_p)}(e_x + e_y)$.

Это совпадает с имеющимися результатами. Для упругой оболочки $\mu_p = \mu$.

Предположим, что:

$$N_p = 2G\bar{N}_p; \tag{9}$$

где: $\bar{N}_p$ – безразмерная величина: для упругой оболочки $\bar{N}_p = 1$;

для оболочки из нелинейно-упругого материала: $\bar{N}_p = \frac{2G_p}{2G} = \frac{1 + \mu}{1 + \mu_p} \cdot \frac{E_p}{E}$;

при квазипростом нагружении: $\bar{N}_p = \frac{N_p}{2G} = \frac{2G_p}{2G} + \left(1 - \frac{2G_p}{2G}\right) f^q$.

При условии (9) имеем: $1 - \frac{3K}{N_p} = \frac{\bar{N}_p - 1 - (2\bar{N}_p + 1)\mu}{(1 - 2\mu)\bar{N}_p}$; $2 + \frac{3K}{N_p} = \frac{2\bar{N}_p + 1 + (1 - 4\bar{N}_p)\mu}{(1 - 2\mu)\bar{N}_p}$.

При $\bar{N}_p = 1$ $1 - \frac{3K}{N_p} = -\frac{3\mu}{1 - 2\mu}$; $2 + \frac{3K}{N_p} = \frac{3(1 - \mu)}{1 - 2\mu}$. Это совпадает с (8) при $\mu_p = \mu$.

При $\bar{N}_p = \frac{2G_p}{2G} = \frac{1 + \mu}{1 + \mu_p} \cdot \frac{E_p}{E}$ $1 - \frac{3K}{N_p} = -\frac{3\mu_p}{1 - 2\mu_p}$, $2 + \frac{3K}{N_p} = \frac{3(1 - \mu_p)}{1 - 2\mu_p}$.

Это совпадает с (8) т.к. из (1) и (7) $(1 - 2\mu)\frac{E_p}{E} = 1 - 2\mu_p$, $\mu_p = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \mu\right)\frac{E_p}{E}$.

Последнее выражение служит для определения пластического коэффициента Пуассона μ_p.

В дальнейшем в практических расчетах будем принимать следующие выражения для функционалов $\bar{N}_p$: для упругих оболочек $\bar{N}_p = 1$; для оболочек из нелинейно-упругого материала:

$$\bar{N}_p = \frac{1}{2G} \cdot \frac{\sigma}{Э}; \tag{10}$$

при квазипростом нагружении:

$$\bar{N}_p = \frac{1}{2G} \cdot \frac{\sigma}{Э} + \left(1 - \frac{1}{2G} \cdot \frac{\sigma}{Э}\right) f^q. \tag{11}$$

Для вычисления этих функционалов необходимо знать диаграмму зависимости $\sigma = \Phi(Э)$. Замечательным свойством последнего функционала является то, что он справедлив и при разгрузке.

При условии (9) имеем:

$$\frac{1 - 3K/N_p}{2 + 3K/N_p} = \frac{\mu_0 \bar{N}_p - 1}{2\mu_0 \bar{N}_p + 1}; \quad \frac{1}{2 + 3K/N_p} = \frac{\mu_0 \bar{N}_p}{2\mu_0 \bar{N}_p + 1}; \tag{12}$$

где введено обозначение $\mu_0 = \frac{2G}{3K} = \frac{1 - 2\mu}{1 + \mu}$.

На основании (12) вместо (6) получим:

$$e_z = \frac{\mu_0 \bar{N}_p - 1}{2\mu_0 \bar{N}_p + 1}(e_x + e_y); \quad e_0 = \frac{\mu_0 \bar{N}_p}{2\mu_0 \bar{N}_p + 1}(e_x + e_y). \tag{13}$$

Для несжимаемого материала $\mu = 0{,}5$, $\mu_0 = 0$, $e_z = -(e_x + e_y)$; $e_0 = 0$. Это согласуется с известными результатами.

На основании вышеизложенного связь между напряжениями и деформациями для упруго-пластических панелей можно записать в виде (в технических обозначениях):

$$\begin{cases} \sigma_x - \sigma_0 = 2G\bar{N}_p(e_x - e_0), \\ \sigma_y - \sigma_0 = 2G\bar{N}_p(e_y - e_0), \\ \tau_{xy} = 2G\bar{N}_p e_{xy}. \end{cases} \tag{14}$$

В этих выражениях: σ_0 определяется по формуле (5), e_0 определяется по формуле (13), параметры пластичности $\bar{N}_p$ определяются по формулам (10), (11). Исключим из первых двух выражений (14) σ_0 и e_0:

$$\begin{cases} 2\sigma_x - \sigma_y = 6G\bar{N}_p(e_x - e_0), \\ -\sigma_x + 2\sigma_y = 6G\bar{N}_p(e_y - e_0). \end{cases}$$

Решение этой системы:

$$\begin{cases} \sigma_x = 2G\bar{N}_p(2e_x + e_y - 3e_0), \\ \sigma_y = 2G\bar{N}_p(e_x + 2e_y - 3e_0). \end{cases} \tag{15}$$

С учетом (13), решение (15) запишется так:

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{2G\bar{N}_p}{2\mu_0 \bar{N}_p + 1}\left[(2 + \mu_0 \bar{N}_p)e_x + (1 - \mu_0 \bar{N}_p)e_y\right], \\ \sigma_y = \dfrac{2G\bar{N}_p}{2\mu_0 \bar{N}_p + 1}\left[(1 - \mu_0 \bar{N}_p)e_x + (2 + \mu_0 \bar{N}_p)e_y\right]. \end{cases}$$

Складывая и вычитая эти выражения, а также введя полусуммы и полуразности напряжений и деформаций:

$$\sigma_s = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y);\ \sigma_r = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y);\ e_s = \frac{1}{2}(e_x + e_y);\ e_r = \frac{1}{2}(e_x - e_y); \tag{16}$$

получим связь между напряжениями и деформациями в виде:

$$\begin{cases} \sigma_s = 2G\bar{H}_p e_s, \\ \sigma_r = 2G\bar{N}_p e_r, \\ \tau_{xy} = 2G\bar{N}_p e_{xy}, \end{cases}$$

где:

$$\bar{H}_p = \frac{3\bar{N}_p}{2\mu_0 \bar{N}_p + 1}. \tag{17}$$

Внутренние усилия в оболочке

Внутренние усилия в оболочке определяются следующим образом:

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{ij} dz\ ;\quad M_{ij} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{ij} z dz\ .$$

Но

$$N_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x dz = \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_s + \sigma_r) dz;\ N_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y dz = \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_s - \sigma_r) dz;$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dz = \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_s + \sigma_r) z dz;\ M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y z dz = \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_s - \sigma_r) z dz\ .$$

Отсюда следует, что

$$N_x = N_s + N_r;\ N_y = N_s - N_r;\ M_x = M_s + M_r;\ M_y = M_s - M_r; \tag{18}$$

где:

$$N_s = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_s dz;\ N_r = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_r dz;\ M_s = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_s z dz;\ M_r = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_r z dz. \tag{19}$$

Вводим безразмерную координату (h – толщина оболочки):

$$\bar{z} = \frac{2z}{h},\ -1 \le \bar{z} \le +1,\ z = \frac{h}{2}\bar{z},\ dz = \frac{h}{2} d\bar{z}\ .$$

В силу гипотезы прямых нормалей:

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} + z æ_{ij}, \tag{20}$$

где: ε_{ij} – деформации растяжения-сжатия и сдвига срединной поверхности оболочки;

$æ_{ij}$ – кривизны изгиба и кручения этой поверхности.

На основании (20) можем записать:

$$\begin{cases} e_s = \varepsilon_s + z æ_s, \\ e_r = \varepsilon_r + z æ_r, \\ e_{xy} = \varepsilon_{xy} + z æ_{xy}, \end{cases} \tag{21}$$

где:

$$\varepsilon_s = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y),\ \varepsilon_r = \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y),\ æ_s = \frac{1}{2}(æ_x + æ_y),\ æ_r = \frac{1}{2}(æ_x - æ_y). \tag{22}$$

Вводим обозначения:

$$\bar{H}_{pk} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \int_{-1}^{+1} \bar{H}_p \bar{z}^{k-1} d\bar{z}\,;\ \bar{N}_{pk} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \int_{-1}^{+1} \bar{N}_p \bar{z}^{k-1} d\bar{z}\,.$$

Тогда на основании (16), (19) и (21) получим:

$$N_s = 2G(\bar{H}_{p1} h\varepsilon_s + \bar{H}_{p2} h^2 æ_s)\,;\ N_r = 2G(\bar{N}_{p1} h\varepsilon_r + \bar{N}_{p2} h^2 æ_r)\,;\ N_{xy} = 2G(\bar{N}_{p1} h\varepsilon_{xy} + \bar{N}_{p2} h^2 æ_{xy})\,;$$

$$M_s = 2G(\bar{H}_{p2} h^2\varepsilon_s + \bar{H}_{p3} h^3 æ_s)\,;\ M_r = 2G(\bar{N}_{p2} h^2\varepsilon_r + \bar{N}_{p3} h^3 æ_r)\,;\ M_{xy} = 2G(\bar{N}_{p2} h^2\varepsilon_{xy} + \bar{N}_{p3} h^3 æ_{xy})\,.$$

Определив N_s, N_r, M_s, M_r, из (18) можно найти сами усилия.

Для оболочки из несжимаемого материала $\mu = 0{,}5$, $\mu_0 = 0$; тогда из (17) следует:

$$\bar{H}_p = 3\bar{N}_p\,,\ \bar{H}_{pk} = 3\bar{N}_{pk}\,.$$

Для упругой оболочки $\bar{N}_p = 1$; значит:

$$\bar{H}_p = \frac{3}{2\mu_0 + 1}\,,\ \bar{H}_{p1} = \frac{3}{2\mu_0 + 1}\,,\ \bar{H}_{p2} = 0\,,\ \bar{H}_{p3} = \frac{1}{4(2\mu_0 + 1)}\,,\ \bar{N}_{p1} = 1\,,\ \bar{N}_{p2} = 0\,,\ \bar{N}_{p3} = \frac{1}{12}\,.$$

Таким образом, в этом случае:

$$N_s = 2G\frac{3}{2\mu_0 + 1} h\varepsilon_s\,;\ N_r = 2Gh\varepsilon_r\,;\ N_{xy} = 2Gh\varepsilon_{xy}\,;$$

$$M_s = 2G\frac{1}{4(2\mu_0 + 1)} h^3 æ_s\,;\ M_r = 2G\frac{1}{12} h^3 æ_r\,;\ M_{xy} = 2G\frac{1}{12} h^3 æ_{xy}\,.$$

Для определения параметров пластичности $\bar{H}_{pk}$ и $\bar{N}_{pk}$ используем диаграмму зависимости $\sigma = \Phi(Э)$. Поэтому нужна формула для вычисления модуля Э девиатора деформаций. В общем случае имеем [5]:

$$Э^2 = Э_{ij}Э_{ij} = \frac{1}{3}\left[(e_x - e_y)^2 + (e_y - e_z)^2 + (e_z - e_x)^2 + 6(e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2)\right].$$

Для пологих оболочек: $e_{yz} = e_{zx} = 0$; $e_z = \dfrac{2(\mu_0 \bar{N}_p - 1)}{2\mu_0 \bar{N}_p + 1} e_s$.

Учитывая зависимости (22), окончательно получаем: $Э = \sqrt{2}\sqrt{\dfrac{3}{(2\mu_0 \bar{N}_p + 1)^2} e_s^2 + e_r^2 + e_{xy}^2}$.

Заключение

Полученные зависимости между напряжениями, деформациями и внутренними усилиями удобны тем, что являются едиными при использовании в расчётах линейной и нелинейной теории упругости и частного варианта теории пластичности.

Литература

1. Володин В.П., Надиров Э.Р. Определение аппроксимирующих функций в выражениях для перемещений при расчете пологих оболочек // Вестник Тверского государственного университета: научный журнал. Серия «Прикладная математика» – Тверь: ТвГУ, 2012. №17. Вып. 2 (25). С. 41 – 51.
2. Володин В.П., Надиров Э.Р. Уравнения процесса нагружения пологих цилиндрических оболочек при двустороннем сжатии // Известия МГТУ «МАМИ»: научный рецензируемый журнал. Серия 3. Естественные науки. – М.: МГТУ «МАМИ», 2013. № 1(15). Т. 3. С. 30 – 36.
3. Зубчанинов В.Г. Механика процессов пластических сред. – М.: Физматлит, 2010. 352 с.
4. Зубчанинов В.Г. Механика сплошных деформируемых сред. – Тверь: ЧуДо, 2000. 703 с.
5. Зубчанинов В.Г. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1990. 368 с.

Идентификация циклических производных кетосульфидов

к.х.н. доц. Гневашева Л.М., к.т.н. Гневашев Д.А.
МГУПИ, Университет машиностроения
8(965)723-50-30, 8(495) 223-05-23, dengnevashev@mail.ru

Аннотация. На основании ИК- и ПМР-спектров идентифицированы циклические производные кетосульфидов 1,3-диоксоланы, которые, кроме самостоятельного интереса, могут быть активными реагентами. Раскрытие цикла 1,3-диоксолановой системы осуществлено магнийорганическими соединениями. Функциональные и непредельные производные циклических кеталей охарактеризованы физико-механическими методами и спектральными свойствами.

Ключевые слова: идентификация, физико-химический анализ, кетосульфиды, 1,3-диоксоланы

Процесс выяснения строения неизвестного соединения на основе комплексного изучения его свойств широко распространен как в научно-исследовательских работах, так и на производстве, когда возникает необходимость проанализировать пробу того или иного изучаемого вещества. Обычно для установления строения новых органических соединений совершенно необходимо применение ИК - спектроскопии. Анализ ИК – спектров, который применяется параллельно с классификационными химическими реакциями, является превосходным методом определения кратности связи и функциональных групп.

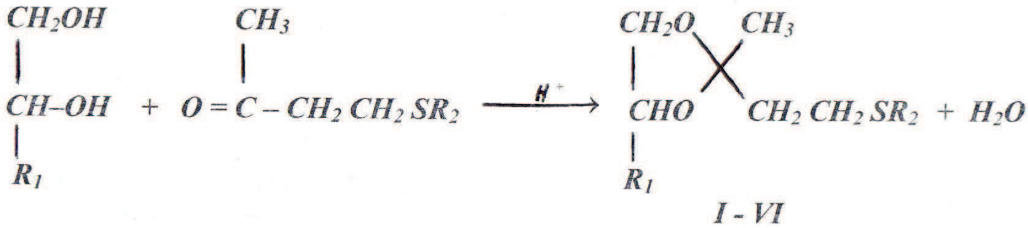
Для выяснения структуры веществ большую помощь оказывает метод ядерного магнитного резонанса на протонах. По существу, ПМР - спектроскопия представляет собой метод определения относительного расположения и числа спин - активных ядер протонов.

Данная работа посвящена определению структуры циклических и непредельных производных кетосульфидов - алкилтиоэтил -1,3 диоксоланов, реакционная способность которых позволяет использовать их для получения разнообразных сероорганических веществ.

Разработанный одним из авторов способ получения кетосульфидов, 1- алкилтио-3-бутанонов, общей формулы:

$$RS\,CH_2\,C\,H_2\,CO\,C\,H_3,$$

где: R - нормальный алкил, с 2-8 атомами углерода [1], имеет препаративное значение и позволяет широко использовать эти соединения в качестве полупродуктов органического синтеза. Так, широко используются сероорганические регуляторы полимеризационных процессов, экстрагенты редких и благородных металлов, инсектициды, лекарственные вещества и др.



I - VI

где R_1=H; $R_2 = C_2H_5$(I); C_3H_7(II); C_4H_9(III);

R_1=CH$_2$OH; $R_2 = C_2H_5$(IV); C_3H_7(V); C_4H_9(VI);

Учитывая перспективность применения серосодержащих ацеталей в качестве пластификаторов, флотореагентов, компонентов сополимеризации, стабилизаторов хлорированных углеводородов, радиозащитных средств и лекарственных препаратов, нами проведена реакция кетализации кетосульфидов с этиленгликолем и глицерином. Синтез проводился с применением растворителя толуола и азеотропной отгонкой воды. В качестве катализатора ис-