Действие как векторная алгебраическая величина

к.т.н. доц. Кецарис А.А.
Университет машиностроения
8 (495) 223-05-23 доб. 1312

Аннотация. В статье показано, что квантовые явления могут быть объяснены алгебраической структурой пространства фундаментальной физической величины – действия. Задача на собственные значения оператора получена как следствие алгебраического закона умножения векторов действия, существование которого мы допустили. Тем самым мы подошли к объяснению квантовых явлений алгебраической структурой пространства векторов действия. Кроме того намечен путь объяснения вида квантовых операторов по отношению к классическим операторам дифференцирования: множители, входящие в состав структурных постоянных могут переноситься на операторы дифференцирования. К числу таких множителей относится и мнимая единица. Кроме того, установлено понимание волновой функции как частного дифференциала вектора действия.

Ключевые слова: *действие, волновая функция, дифференциальный оператор физической величины, структурные постоянные алгебры, структурные матрицы, уравнение структуры*

Введение

Квантовые явления как таковые, а также теория, приспособленная для их описания, остаются неясными до сих пор. Прежде всего, остается неясным, в чем заключается причина такого явления, как дискретность значений физических величин. Под причиной мы здесь понимаем ответ на следующий вопрос: существуют ли какие-либо общие представления, из которых следовала бы указанная дискретность. Сейчас неясно, нужно ли вообще ставить вопрос о поиске причины, не рациональнее ли основываться на квантовых явлениях как на заданности. Именно по этому пути идет сегодняшняя квантовая теория. Дискретность значений физических величин заложена в ней как постулат. Вследствие того, что современная квантовая теория не рассматривает причину квантовых явлений, она не может описать эти явления детерминистским образом, то есть через последовательность предопределяющих друг друга событий. И вследствие этого теоретический объект, которым пользуется квантовая теория для описания состояния частиц, участвующих в квантовом процессе, – волновая функция – получил статистическую интерпретацию. Такую ситуацию нужно считать временной и существующей до тех пор, пока не решен вопрос о причине квантовых явлений. Настоящая статья направлена на выяснение причин квантовых явлений. Далее остановимся на действии и волновой функции – понятиях современной физики, существенных для нашего изложения. Заключая введение, заметим, что настоящая статья является развитием концепции, изложенной в [1].

Действие и классические дифференциальные операторы физических величин

Сначала отметим, что процесс научного анализа физических явлений включает этап, на котором из всех физических явлений выделяется некоторая их часть, являющаяся фоном для рассмотрения остальных явлений. Условием такого выделения является то, что эта часть может быть представлена в виде элементов, подчиняющихся аддитивному групповому закону. Например, движение материальной частицы рассматривается на фоне группы сложения геометрических отрезков и группы сложения временных отрезков. При анализе физических явлений элементы фоновых групп рассматриваются как независимые переменные. Мы будем рассматривать непрерывные фоновые группы. Непрерывные независимые переменные, которыми описывается физическая система – обобщенные координаты, – обозначим x^m, где индекс m пробегает значения от *1* до M, M число координат. Развитие теоретической физики привело к утверждению, что существует некоторая функция координат *S(x)*, используя которую в соответствии с определенными правилами, можно описать происходящие физические явления. Эта функция называется действием. Для нас важно отметить, что действие является действительной скалярной величиной. То есть пространство действия есть одномерное векторное пространство над полем действительных чисел *R*. Или иначе: действие есть величина, значениями которой являются действительные числа. В этой связи для нас важно, что на значениях *S* действуют законы сложения и умножения, связанные законом дистрибутивности, то есть значения *S* образуют алгебраический объект – кольцо. На значениях *S* имеет место единица e_0, для которой:

$$S \cdot e_0 = e_0 \cdot S = S .$$

И, в частности,

$$e_0 \cdot e_0 = e_0 .$$

Полагают, что действие является непрерывной функцией координат. Например, действие для материальной релятивистской свободной частицы имеет вид:

$$S = -m \cdot c \cdot \int ds ,$$

где: *m* – масса частицы, *c* – скорость света, *s* – длина вектора в четырехмерном пространстве-времени.

К действию относится основное утверждение классической физики – принцип наименьшего действия, который гласит: динамика физического явления обусловлена минимизацией действия. Производная от действия по обобщенной координате определяется как обобщенный импульс:

$$p_m = \frac{\partial S}{\partial x^m} .$$

Заметим следующее. Обычно соответствие оператора физической величине считается прерогативой квантовой теории. Однако уже в классическом подходе мы видим это соответствие: импульсу p_m соответствует оператор:

$$\frac{\partial}{\partial x^m} ,$$

применяемый к скалярной функции – действию *S(x)*.

Волновая функция и квантовые дифференциальные операторы физических величин

В квантовой теории так же, как и в классической, из всех физических явлений выделяется некоторая их часть, которая служит фоном для рассмотрения остальных явлений. Также вводятся непрерывные фоновые группы, элементы которых, называемые обобщенными координатами, рассматриваются как независимые переменные. Развитие квантовой теории привело к утверждению, что существует некоторая функция независимых переменных $\psi(x)$, используя которую в соответствии с некоторыми правилами, можно описать происходящие физические явления. Эта функция называется волновой. Для нас важно отметить, что волновая функция является многокомпонентной величиной. В теории Дирака число компонент волновой функции равно четырем. Волновая функция записывается в виде столбца из четырех компонент, каждая из которых является комплексной функцией:

$$\psi^1 = \varphi^1 + i \cdot \zeta^1 .$$
$$\psi^2 = \varphi^2 + i \cdot \zeta^2 .$$
$$\psi^3 = \varphi^3 + i \cdot \zeta^3 .$$
$$\psi^4 = \varphi^4 + i \cdot \zeta^4 .$$

Таким образом, в теории Дирака волновая функция является четырехмерной векторной величиной над полем комплексных чисел. В теории Паули волновая функция является двумерной векторной величиной над полем комплексных чисел. В теории Шредингера волновая функция является одномерной (скалярной) величиной над полем комплексных чисел. Для непредвзятого исследователя загадочной выглядит особенность квантовой теории, состоящая в использовании комплексных чисел и функций. Волновой функции дается вероятностная интерпретация, которая встречает возражения у ряда исследователей. Однако с нашей точки зрения главный вопрос связан не с тем, насколько удачна интерпретация волновой функции, а с тем, почему вообще необходима интерпретация. Ничего подобного нет в других областях физики. Нельзя представить себе, что, например, теория гравитации Ньютона требует какой-либо интерпретации для основных, используемых в ней величин за исключением той, которая есть следствие начального понимания их сущности. Возникает впечатление, что необходимость в интерпретации волновой функции указывает на отсутствие начального этапа в построении квантовой теории. Следующей чертой, характерной для квантовой теории, является соответствие импульсу p_m оператора

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x^m},$$

применяемого к векторной величине – волновой функции $\psi(x)$. Наличие множителя

$$\frac{\hbar}{i},$$

отличающего этот оператор от классического оператора импульса, также остается не выясненным. И, наконец, ключевым для квантовой теории является постулат, выражаемый в следующем суждении: значения физической величины есть собственные значения оператора, поставленного в соответствие этой физической величине. Этот постулат мы будем называть квантовым. По отношению к импульсам квантовый постулат в теории Шредингера имеет вид:

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial x^m} = p_m \cdot \psi .$$

Умножая это уравнение на dx^m и суммируя по m, получим квантовый постулат в следующем виде:

$$\frac{\hbar}{i} d\psi = dS \cdot \psi .$$

Здесь учтено

$$dS = p_m \cdot dx^m .$$

Отсюда следует, что в частном случае

$$\psi = \exp\left(\frac{i}{\hbar} S\right).$$

Постановка задачи

Зададимся следующим вопросом: существуют ли какие-либо общие представления, из которых следовала бы дискретность значений физических величин? Если ответ утвердительный, то такие представления мы и будем называть причиной квантовых явлений. Сегодняшняя квантовая теория вопрос о причине квантовых явлений не рассматривает. Дискретность значений физических величин заложена в ней в виде квантового постулата. Если, тем не менее, считать постановку задачи поиска причины квантовых явлений правомерной, то из предыдущего следует, что квантовый постулат необходимо получить как следствие каких-то общих представлений. То есть мы должны, исходя из неких общих представлений, обнаружить, что каким-то физическим величинам по некоторому алгоритму ставятся в соответствие операторы физических величин. Далее мы должны из этих же представлений прийти к задаче на собственные значения для операторов физических величин. Если такое удастся сделать, то мы будем считать, что указанные некие общие представления лежат в основе (являются причиной) квантовых явлений. Точнее нужно сказать так: указанные представления должны быть положены в основу понимания квантовых явлений.

Действие как алгебраическая величина

Мы приходим к причине квантовых явлений, делая два принципиальных обобщения.

Первое. Пусть действие является не скалярной величиной, как это принято в классической и квантовой физике, а векторной. То есть пространство действия есть многомерное векторное пространство. Пространство векторов действия $\boldsymbol{S}$ обозначим $B(\boldsymbol{S})$. Будем полагать, что пространство $B(\boldsymbol{S})$ определено над полем действительных чисел и имеет размерность $N+1$. Число N определится как только будет определено пространство векторов действия. Базисные векторы в пространстве $B(\boldsymbol{S})$ обозначим e_K, здесь индекс K пробегает значения от 0 до N. Вектор действия $S \in B(S)$ можно записать через базисные векторы так:

$$S = e_K \cdot S^K . \qquad (1)$$

где: S^K – координаты вектора действия.

Наделим координаты S^K размерностью действия. Будем полагать, что компонента $e_0 \cdot S^0$ вектора действия представляет собой скалярное действие в классическом смысле. Мы полагаем, что вектор действия является непрерывной функцией обобщенных координат. Производная от вектора действия по координате определяется как обобщенный импульс Обобщенный импульс разлагается по базисным векторам пространства действия:

$$p_m = e_K \cdot p_m^K . \qquad (2)$$

Здесь:

$$p_m^K = \frac{\partial S^K}{\partial x^m} .$$

Компонента обобщенного импульса

$$p_m^0 = \frac{\partial S^0}{\partial x^m}$$

совпадает с импульсом в классическом смысле.

Второе принципиальное обобщение состоит в предположении, что множество векторов действия $B(\boldsymbol{S})$ является алгеброй, то есть на множестве векторов действия имеет место не только закон сложения векторов и закон умножения векторов на число, но и закон умножения векторов. Закон умножения векторов в алгебре $B(\boldsymbol{S})$ запишем следующим образом:

$$S = \frac{1}{S_0} S_1 \circ S_2 .$$

где: $S, S_1, S_2 \in B(S)$, S_0 есть постоянная величина с размерностью действия, согласующая размерности правой и левой частей уравнения. Мы будем полагать эту постоянную величину, равной постоянной Планка:

$$S_0 = \hbar .$$

Таким образом, закон умножения векторов действия приобретает вид:

$$S = \frac{1}{\hbar} S_1 \circ S_2 . \qquad (3)$$

В качестве единичного вектора относительно умножения векторов примем вектор:

$$e_0 \cdot S_0 = e_0 \cdot \hbar .$$

После подстановки этого вектора в закон умножения получим следующие условия, накладываемые на базисный вектор e_0:

$$S \circ e_0 = e_0 \circ S = S .$$

Отсюда в частности имеем:

$$e_0 \circ e_I = e_I \circ e_0 = e_I$$

и

$$e_0 \circ e_0 = e_0 .$$

Последнее соотношение соответствует нашему представлению о базисном векторе e_0, установленном в разделе 2. Отсюда следует, что $\circ$ – умножение для векторов, пропорциональных вектору e_0, может быть отождествлено с умножением на число. Произведение базисных векторов есть вектор, который можно разложить по базисным векторам и записать в следующем виде:

$$e_K \circ e_I = e_L \cdot C^L_{KI} . \tag{4}$$

Здесь C^L_{KI} есть действительные числа, которые называются структурные постоянные или структурные матрицы алгебры *B(**S**)*. Из (4) следует, что произведение базисных векторов e_I на базисный вектор e_0 удовлетворяет условиям:

$$e_I \circ e_0 = e_L \cdot C^L_{I0} = e_I .$$

$$e_0 \circ e_I = e_L \cdot C^L_{0I} = e_I .$$

Отсюда имеем:

$$C^L_{I0} = C^L_{0I} = \delta^L_I .$$

Приведенный закон умножения базисных векторов позволяет записать закон умножения (3) через координаты векторов действия. Действительно, из (3) имеем:

$$S = e_L \cdot S^L = \frac{1}{\hbar} S_1 \circ S_2 = \frac{1}{\hbar} \cdot (e_K \circ e_I) \cdot S_1^K \cdot S_2^I .$$

Используя (4), получим искомое соотношение:

$$S^L = \frac{1}{\hbar} \cdot C^L_{KI} \cdot S_1^K \cdot S_2^I . \tag{5}$$

Далее покажем, что сделанные обобщения приводят к задаче на собственные значения по отношению к операторам дифференцирования, которая может рассматриваться как квантовый постулат.

Уравнения структуры алгебры действия

Особенность дифференцирования векторов алгебр связана с дифференцированием закона умножения векторов. Она проявляется в существовании для алгебр уравнений структуры. Далее рассмотрим уравнения структуры для алгебры *B(**S**)*. При дифференцировании закона умножения (3) будем придерживаться следующих обозначений. Обозначим через $d_1 S$ дифференциал вектора ***S*** в соотношении (3) при изменении вектора S_1, обозначим через $d_2 S$ дифференциал вектора ***S*** в соотношении (3) при изменении вектора S_2. В соответствии с этим имеем:

$$d_1 S = \frac{1}{\hbar} dS_1 \circ S_2 . \tag{6}$$

$$d_2 S = \frac{1}{\hbar} S_1 \circ dS_2 . \tag{7}$$

С использованием этих же обозначений рассмотрим второй дифференциал $d_2 d_1 S$. Из (3) для него имеем:

$$d_2 d_1 S = \frac{1}{\hbar} dS_1 \circ dS_2 . \quad (8)$$

Рассмотрим соотношения (6) и (7) вблизи единицы алгебры, то есть при

$$S_1 = e_0 \cdot \hbar ,\ S_2 = e_0 \cdot \hbar$$

получим:

$$d_1 S = dS_1 ,\ d_2 S = dS_2 .$$

С учетом этих соотношений для (8) вблизи единицы алгебры получим:

$$d_2 d_1 S = \frac{1}{\hbar} d_1 S \circ d_2 S . \quad (9)$$

Это соотношение есть уравнение структуры алгебры *B(**S**)* в векторной форме. Подставляя в (5) выражения дифференциалов через дифференциалы координат векторов действия и пользуясь законом умножения базисных векторов (4), получим уравнения структуры в координатной форме:

$$d_2 d_1 S^L = \frac{1}{\hbar} \cdot C^L_{KI} \cdot d_1 S^K \cdot d_2 S^I .$$

Квантовые постулаты и интерпретация волновой функции

В уравнении (9) введем обозначение

$$\psi = d_1 S$$

и отождествим вектор $\psi(x)$ с волновой функцией, вводимой в квантовой теории. Кроме того, введем обозначение *d* для дифференциала d_2. Уравнение структуры в новых обозначениях принимает вид:

$$d\psi = \frac{1}{\hbar} \cdot \psi \circ dS . \quad (10)$$

Это уравнение можно записать для координат волновой функции:

$$\psi^I = d_1 S^I ,\ d\psi^L = \frac{1}{\hbar} \cdot C^L_{KI} \cdot dS^I \cdot \psi^K . \quad (11)$$

Уравнения (10), (11) имеют вид задачи на собственные значения оператора дифференциала *d*.

Итак, мы получили следующий результат: уравнения структуры алгебры *B(**S**)* могут быть представлены как задача на собственные значения оператора дифференциала *d*.

Выразим дифференциал *d* в виде:

$$d = \partial_m \cdot dx^m$$

и введем обобщенные импульсы (2). Тогда задача на собственные значения (11) приобретает вид:

$$\partial_m \psi^L = \frac{1}{\hbar} \cdot C^L_{KI} \cdot p^I_m \cdot \psi^K .$$

Таким образом, исходя из алгебраической структуры векторов действия, мы пришли к задаче на собственные значения в самом общем виде.

Выводы

В статье задача на собственные значения оператора получена как следствие алгебраического закона умножения векторов действия, существование которого мы допустили. Тем самым мы подошли к объяснению квантовых явлений алгебраической структурой пространства векторов действия. Кроме того намечен путь объяснения вида квантовых операторов по отношению к классическим операторам дифференцирования: множители, входящие в состав структурных постоянных, могут переноситься на операторы дифференцирования. К числу таких множителей относится и мнимая единица. Кроме того, установлено понимание волновой функции как частного дифференциала вектора действия.

Литература

1. Кецарис А.А. Основания математической физики. Ассоциация независимых издателей, 1997г., 280с.
2. D. Hestenes, A. Weingartshofer, The electron, new theory and experiment, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
3. D. Hestenes, G.Sobczyk, Clifford algebra in geometric calculus, Riedel Publishing Company, Dordrecht, 1984.