К моделированию реономных свойств твёрдых деформируемых сред

к.ф.-м.н. проф. Король Е.З.
8(495) 939-31-50, 8-916-852-30-09, ez_korol@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются вопросы, связанные с моделированием напряжённо-деформированного состояния реологических материалов линейными дифференциальными уравнениями высших порядков обобщённого эйлерова типа, содержащими производные (второго и выше порядка) по времени равноприсутствующих (по условию Кюри) напряжений и деформаций, подчиняющихся условиям напряжённо – временного или деформационно – временного подобия с одной или двумя функциями определения материальных констант и временных функций, для определения которых используется «стандартная» система опытов.

Ключевые слова: *обобщённые силы, обобщённые потоки, полная система термодинамических потенциалов, обобщённая цепочка Гиббса-Гельмгольца, преобразования Лежандра-Эйлера, соотношения взаимности Максвелла, обобщённая диаграмма Борна, условия (неравенства) равновесие и устойчивость системы, внутренние термодинамические времена релаксации и ползучести, определяющие соотношения*

1. Потенциалы для реономных систем

1.1. Обобщенные силы и обобщённые потоки в реальном времени

Для реономных систем действие обобщеных сил $\vec{\tilde{\mathrm{Y}}} = (\tilde{\mathrm{Y}}_1 \sim \tilde{\hat{\sigma}}, \tilde{\mathrm{Y}}_2 \sim \mathrm{s})$ сопровождается явлением затухания (или релаксации мгновенного значения), а реакция $\vec{\tilde{x}} = (\tilde{x}_1 \sim \tilde{\hat{\varepsilon}}, \tilde{x}_2 \sim \tilde{T})$ на внешние воздействия сопровождается явлением нарастания потока (или ползучести мгновенного значения) и их значения со временем стремятся в сторону термординамически устойчивых равновесных значений. Считается [1-6, 10-13], что обобщенная сила пропорциональна скорости релаксации $\dot{\tilde{\mathrm{Y}}}_{\mathrm{i}}$ и пропорциональна отклонению $(\tilde{Y}_i - \tilde{Y}_i^*)$ силы от равновесного значения $\tilde{Y}_i^*$, а обобщенный поток - пропорционален ускорению $\ddot{\tilde{x}}_i$, скорости ползучести $\dot{\tilde{x}}_i$ и отклонению $(\tilde{x}_i - \tilde{x}_i^*)$ потока от равновесного значения, указанные выше обобщённые силы и потоки представляются так

$$\tilde{Y}_i = \mu_{yi}\frac{\partial Y_i}{\partial t} + c_{yi}(Y_i - Y_i^*) = \mu_{Yi}(\mathrm{D} + \nu_{yi})\{Y_i\} - c_{yi}Y_i^*, \quad D\{\} = \frac{d}{dt}, \quad \mu_{yi} = \frac{c_{yi}}{\mu_{yi}} \tag{1}$$

$$\tilde{x}_i = m_{xi}\frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} + \mu_{xi}\frac{\partial x_i}{\partial t} + c_{xi}(x_i - \mathrm{x}_{\mathrm{i}}^*) = m_{xi}(D + \nu_{1xi})(D + \nu_{2xi})\{x_i\} - c_{xi}x_i^*$$
$$\nu_{1xi} + \nu_{2xi} = \frac{\mu_{xi}}{m_{xi}}, \quad \nu_{1yi}\nu_{2yi} = \frac{c_{xi}}{m_{xi}} \tag{2}$$

Здесь μ_{yi}, μ_{xi} - коэффициенты релаксации обобщенной силы и ползучести обобщенного потока соответственно; c_{yi}, c_{xi} - коэффициенты пропорциональности обобщенной силы и обобщенного потока соответственно; m_{xi} - коэффициент динамичности обобщенного потока; $\dot{\tilde{\mathrm{Y}}} = \mathrm{d}\tilde{\mathrm{Y}}_{\mathrm{i}}/dt$, $\ddot{\tilde{x}}_i = d^2\tilde{x}_i/dt^2$, $\dot{\tilde{x}}_i = d\tilde{x}_i/dt$ - производные первого и второго порядков указанных функций по времени; $\nu_{\mathrm{yi}}, \nu_{1xi}, \nu_{2xi}$ - времена релаксации.

1.2. Обобщенные силы и обобщённые потоки в «собственном» времени

Часто вместо реального времени t используют «собственное» или внутреннее «термодинамическое» время $\mathrm{G(t)} = \int \mathrm{d}t/g(t)$ или $z(t) = \exp\{G(t)\}$, где $g(t)$ - временная функция релаксации ползучести. В этом случае «вязкость» и «жёсткость» - функции времени; если они таковы, что:

$$\tilde{\tilde{Y}}_i = \mu_{yi}\frac{\partial Y_i}{\partial t} + \frac{c_{yi}}{g(t)}Y_i = \frac{\mu_{yi}}{g(t)}(D_G + \nu_{Yi})\{Y_i\}, \quad D_{\mathrm{G}}\{\} = g(t)\frac{d}{dt} = \frac{d}{dG}, \quad \nu_{yi} = \frac{c_{yi}}{\mu_{yi}} \quad (3)$$

$$\tilde{\tilde{x}}_i = m_{xi}\frac{\partial^2 x_i}{\partial t} + \frac{\dfrac{dg(t)}{dt} + \mu_{xi}}{g(t)}\frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{c_{xi}}{g^6(t)}x_i = \frac{m_{xi}}{g^2(t)}(D_G + \nu_{x1i})(D_G + \nu_{2xi})\{x_i\}, \quad (4)$$

$$\mu_{xi} = \nu_{x1i} + \nu_{x2i}, \qquad c_{xi} = \nu_{1xi}\nu_{x2i},$$

где: $g(t-\tau)$ - функция релаксации (внутреннее время релаксации - время последействия);

$G(t-\tau)$ - функция ползучести (внутреннее время ползучести - время последействия), то $d/dt = d/dG = z\, d/dz$ и исходные дифференциальные операторы Эйлера с переменными коэффициентами приводятся к операторам Эйлера с постоянными коэффициентами (что представлено ниже).

2. Операторный метод обращения (решения) обобщённых Эйлеровых уравнений ($\mathrm{N}+2\mathrm{M}$)-ого порядка [9]

2.1. Операторы с постоянными коэффициентами

Обобщённые простейшие линейные дифференциальные модели, содержащие производные высших порядков, представляются в виде операторных полиномов:

$$\mathrm{P}^{(\mathrm{N+2M})}\{\tilde{\mathrm{Y}}\} = \mathrm{Q}^{(\mathrm{K+2L})}\{\tilde{x}\}; \quad (5)$$

записанных в форме многочленов с постоянными коэффициентами $\mathrm{a}_{yk}, \mathrm{a}_{xk}$

$$\mathrm{P}^{(\mathrm{N+2M})}\{\tilde{\mathrm{Y}}\} = \sum_{k=0}^{\mathrm{N+2M}} \mathrm{a}_{\mathrm{yk}}\frac{d^k\tilde{Y}}{dt^k} = E^{(N+2M)}\{\tilde{Y}\}, \quad \mathrm{Q}^{(\mathrm{K+2L})}\{\tilde{x}\} = \sum_{k=0}^{\mathrm{K+2L}} \mathrm{a}_{\mathrm{xk}}\frac{d^k\tilde{x}}{dt^k} = E^{(K+2L)}\{\tilde{x}\} \quad (6)$$

или в виде соответствующих эйлеровых дифференциальных операторов

$$\mathrm{E}^{\mathrm{N+2M}}\{\tilde{Y}\} = f(t) = E^{K+2L}\{\tilde{x}\}, \quad (7)$$

выраженных произведениями элементарных эйлеровых дифференциальных операторов первого (с действительными характеристическими показателями $(\nu_{yn}, \nu_{xk}) \in R$) и второго (с комплексными характеристическими показателями $(\mu_{ym} = \alpha_{ym} \pm i\beta_{ym}, \mu_{xl} = \alpha_{xl} \pm i\beta_{xl}) \in C$) порядков

$$\mathrm{E}^{\mathrm{N+2M}}\{\tilde{Y}\} \equiv \prod_{n=1}^{N}(D - \nu_{yn})\prod_{m=1}^{M}[(D - \alpha_{ym})^2 + \beta^2_{ym}]\{\tilde{Y}\} = \prod_{n=1}^{N}E_n^{(1)}\prod_{m=1}^{M}E_m^{(2)}\{\tilde{Y}\}$$

$$\mathrm{E}^{\mathrm{K+2L}}\{\tilde{x}\} \equiv \prod_{k=1}^{K}(D - \nu_{xn})\prod_{l=1}^{L}[(D - \alpha_{xxm})^2 + \beta^2_{xm}]\{\tilde{x}\} = \prod_{k=1}^{K}E_k^{(1)}\prod_{l=1}^{L}E_l^{(2)}\{\tilde{x}\} \quad (8)$$

где характеристические показатели – суть корни характеристических (вековых) уравнений

$$\mathrm{P}^{(\mathrm{N+2M})}\{\nu_{\text{н}}\} = \sum_{k=0}^{\mathrm{N+2M}} \mathrm{a}_{\mathrm{yk}}\nu_{\textit{н}}^{\textit{л}} = 0, \quad \mathrm{Q}^{(\mathrm{K+2L})}\{\nu_{\textit{ч}}\} = \sum_{k=0}^{\mathrm{K+2L}} \mathrm{a}_{\mathrm{xk}}\nu_{\textit{ч}}^{\textit{л}} = 0 \quad (9)$$

Решения (обращения) операторных уравнений эйлерова типа высших порядков представляются по «новому методу операторного интегрирования обобщённых эйлеровых уравнений $(N+2\text{M})$-ого порядка» [9], не используя широко применяемые метод Лагранжа-Эйлера (вариации произвольных постоянных) и метод интегральных преобразований Лапласа или Фурье. При этом используются обращения (решения) Бернулли-Эйлера элементарных операторных уравнений первого порядка

$$E^{(1)}\{\tilde{Y}\}=(D-\nu)\{\tilde{Y}\}=f, \quad \tilde{Y}=J^{(1)}\{f\}=e^{-\nu t}\int_0^t e^{\nu\tau} f(\tau)d\tau; \tag{10}$$

и второго порядка

$$E^{(2)}\{\tilde{Y}\}=((D-\alpha)^2+\beta^2)\{\tilde{Y}\}=f,$$

$$\tilde{Y}=\frac{e^{\alpha t}\cos\beta t}{2\beta}\int_0^t e^{-\alpha\tau}\sin\beta\tau f(\tau)d\tau-\frac{e^{\alpha t}\sin\beta t}{2\beta}\int_0^t e^{-\alpha\tau}\cos\beta\tau f(\tau)d\tau, \tag{11}$$

А далее путём кратных обращений (кратного интегрирования) имеем решения соответствующих эйлеровых уравнений с простыми (некратными) характеристическими действительными $(\nu_{\text{уn}},\nu_{xk})\in R$ показателями

$$\mathrm{E}^{(\mathrm{N})}\{\tilde{Y}\}=\prod_{n=1}^{N}E_n^{(1)}\{\tilde{Y}\}=\prod_{n=1}^{N}(D-\nu_n)\{\tilde{Y}\}=f, \quad \to\tilde{Y}=J^{(N)}\{f\}=\sum_{n=1}^{N}\frac{J_n^{(1)}\{\tilde{Y}\}}{\prod\limits_{p=1,p\neq n}^{N}(\nu_n-\nu_p)} \tag{12}$$

и с простыми комплексно-сопряжёнными $(\mu_{ym}=\alpha_{ym}\pm i\beta_{ym},\mu_{xl}=\alpha_{xl}\pm i\beta_{xl})\in C$ покаэателями

$$E^{(2M}\{\tilde{Y}\}=\prod_{m=1}^{M}E_m^{(2)}\{\tilde{Y}\}=\prod[(D-\alpha_m)^2+\beta_m^2]\{\tilde{Y}\}=f,$$

$$\tilde{Y}=J^{(2M)}\{f\}=\sum_{m=1}^{M}\frac{J_m^{(2)}\{f\}}{\prod\limits_{l=1,l\neq m}^{M}[(\alpha_v-\alpha_l)^2+(\beta_m^2-\beta_k^2)]} \tag{13}$$

В общем случае, когда операторы содержат как действительные, так и комплексно-сопряжённые характеристические показатели, имеем представление решений (обращений)

$$\mathrm{E}^{\mathrm{N+2M}}\{\tilde{Y}\}=f(t)=E^{K+2L}\{\tilde{x}\},$$

$$\tilde{\mathrm{Y}}=\mathrm{J}^{(\mathrm{N+2M})}\{f\}=\sum_{n=1}^{N}\frac{J_n^{(1)}\{f\}}{\prod\limits_{p=1,p\neq n}^{N}(\nu_{yn}-\nu_{yp})\prod\limits_{m=1}^{M}[(\alpha_{ym}-\nu_{yn})^2+\beta_{ym}^2]}+$$

$$+\sum_{m=1}^{M}\frac{J_m^{(2)}\{f\}}{\prod\limits_{n=1}^{N}(\alpha_{ym}-\nu_{yn})\prod\limits_{p=1,p\neq m}^{M}[(\alpha_{ym}-\alpha_{yp})^2+(\beta_{ym}^2-\beta_{yp}^2)]} \tag{14}$$

Представленное обращений в такой (конечной суммы, а не ряда) форме удобно тем, что в случае кратных характеристических показателей как действительных, так и комплексно – сопряжённых, даётся в универсальной общеё форме; в случае кратных показателей (корней), например, при $\nu_{y1}=\nu_{y2}$ или $\mu_{y1}=(\alpha_{y1}\pm i\beta_{y1})=\mu_{н2}=(\alpha_{н2}\pm \mathrm{i}\beta_{y2})$ и достаточно перейти к пределу в указанных представлениях, в результате чего появятся степени t^{s}, s - кратность характеристического показателя

$$\tilde{\mathrm{Y}}=\mathrm{J}^{(\mathrm{N+2M})}\{f\}=\lim\nolimits_{\nu_{y2}\to\nu_{y1}}\sum_{n=1}^{N}\frac{J_n^{(1)}\{f\}}{\prod\limits_{p=1,p\neq n}^{N}(\nu_{yn}-\nu_{yp})\prod\limits_{m=1}^{M}[(\alpha_{ym}-\nu_{yn})^2+\beta_{ym}^2]}+$$

$$+\lim\nolimits_{\mu_{y2}\to\mu_{y1}}\sum_{m=1}^{M}\frac{J_m^{(2)}\{f\}}{\prod\limits_{n=1}^{N}(\alpha_{ym}-\nu_{yn})\prod\limits_{p=1,p\neq m}^{M}[(\alpha_{ym}-\alpha_{yp})^2+(\beta_{ym}^2-\beta_{yp}^2)]}= \qquad (15)$$

$$=\frac{\mathrm{t}\mathrm{J}_1^{(1)}\{f\}}{\prod\limits_{p=1,p\neq n}^{N}(\nu_{yn}-\nu_{yp})\prod\limits_{m=1}^{M}[(\alpha_{ym}-\nu_{yn})^2+\beta_{ym}^2]}+\sum_{n=1,n\neq 2}^{N}\frac{J_n^{(1)}\{f\}}{\prod\limits_{p=1,p\neq n}^{N}(\nu_{yn}-\nu_{yp})\prod\limits_{m=1}^{M}[(\alpha_{ym}-\nu_{yn})^2+\beta_{ym}^2]}+$$

$$+\frac{J_1^{(2)}\{f\}}{\prod\limits_{n=1}^{N}(\alpha_{ym}-\nu_{yn})\prod\limits_{p=1,p\neq m}^{M}[(\alpha_{ym}-\alpha_{yp})^2+(\beta_{ym}^2-\beta_{yp}^2)]}+\sum_{m=1,m\neq 2}^{M}\frac{J_m^{(2)}\{f\}}{\prod\limits_{n=1}^{N}(\alpha_{ym}-\nu_{yn})\prod\limits_{p=1,p\neq m}^{M}[(\alpha_{ym}-\alpha_{yp})^2+(\beta_{ym}^2-\beta_{yp}^2)]}$$

Общие (14-15) представления (приведенные выше) содержат интегралы двух видов

$$\mathrm{J}_{\mathrm{n}}^{(1)}\{f\}=\int_0^t e^{\nu_n(t-\tau)}f(\tau)d\tau,\quad J_m^{(2)}\{f\}=\int_0^t e^{\alpha_m(t-\tau)}\sin\alpha_m(t-\tau)f(\tau)d\tau,$$

где функции $f_y(t)=\sum\limits_{k=1}^{K+LM}a_{xk}D^n\{\widetilde{x}\}=\sum\limits_{k=1}^{K+LM}a_{xk}\widetilde{x}^{(n)}$ или $f_x(t)=\sum\limits_{k=1}^{N+LM}a_{yk}D^n\{\widetilde{Y}\}=\sum\limits_{k=1}^{N+LM}a_{yk}\widetilde{Y}^{(n)}$ содержат производные высших порядков $\widetilde{Y}^{(k)}=d^k\widetilde{Y}/dt^k$ или $\widetilde{x}^{(k)}=d^k\widetilde{x}/dt^k$ так, что

$$\mathrm{J}^{(1)}\{\hat{Z}^{(k)}\}=\sum_{p=1}^{k}(-1)^p\nu^p\tilde{Z}^{(p)}(\mathrm{t})+(-1)^k\nu^kJ^{(1)}\{\tilde{Z}\} \qquad (16)$$

и, таким образом, сводится к элементарным интегралам.

В широко применяемых методиках моделирования реологических свойств материалов (см., например, публикации Работнова Ю.Н. [1, 2]) используются в качестве ядер подынтегральных выражений экспоненциально-дробные функции:

$$\sigma_{ij}=\breve{E}_{ijkl}e_{kl};\quad e_{ij}=\breve{\Pi}_{ijkl}\sigma_{kl};\quad\to\sigma_{\text{шо}}=\mathrm{G}^*_{\mathrm{ijkl}}\dot{e}_{kl};\quad e_{ij}=J^*_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl};\quad \breve{E}=E(1-\Gamma^*)=\frac{E}{1+K^*}$$

$$\Gamma^*=\sum_{i=1}^{n}m_i Э_0^*(-\gamma_i);\quad K^*=\sum_{i=1}^{n}k_i Э_0^*(-\beta_i);\quad Э_\alpha^*(\beta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\aleph}\frac{e^{p^t}dp}{p(p^{1+\alpha}-\beta)}$$

где содержатся интегралы по контуру функций комплексной переменной.

2.2. Операторы с переменными коэффициентами

Если коэффициенты $a_{yn}(t), a_{xn}(t)$ дифференциальных операторов (5-8) переменные с одной «координатной функцией» $\mathrm{g(t)}$ так

$$a_{n-k}^{(n)}(t)=g(t)\frac{d}{dt}(a_{n-k}^{(n-1)}(t))+g(t)a_{n-k-1}^{(n-1)}(t)-\nu_n a_{(n-1)}^{(n-1)}(t),\quad a_n^{(n)}(t)=g^n(t),\quad a_0^{(n)}(t)=(-1)^n\prod_{k=1}^{n}\nu_k, \quad (17)$$

то путём использования обобщённой эйлеровой переменной

$$\eta(\mathrm{t})=\exp\{\int\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{g(t)}}\} \qquad (18)$$

исходные дифференциальные операторы с переменными коэффициентами приводятся к операторам с постоянными коэффициентами:

$$\mathrm{P}^{(\mathrm{N+2M})}\{\tilde{\mathrm{Y}}\} = \sum_{k=0}^{\mathrm{N+2M}} \mathrm{b}_{\mathrm{yk}} \frac{d^k \tilde{Y}}{d\eta^k} = E^{(N+2M)}\{\tilde{Y}\}, \quad \mathrm{Q}^{(\mathrm{K+2L})}\{\tilde{x}\} = \sum_{k=0}^{\mathrm{K+2L}} \mathrm{b}_{\mathrm{xk}} \frac{d^k \tilde{x}}{d\eta^k} = E^{(K+2L)}\{\tilde{x}\} \quad (19)$$

где связь между коэффициентами «жёсткости» операторов такова:

$$\mathrm{b}_{\mathrm{k}}^{(\mathrm{N+2M})} = (-1)^{л} \sum_{o=1}^{C^{л}_{T+2Ь}} \prod_{л_o}^{л} \nu_{л_o}, \quad \mathrm{b}_{\mathrm{N+2M}}^{(\mathrm{N+2M})} = a_{N+2M}^{(N+2M)} = 1, \quad k = \overline{1,(N+2M)}, \quad C^k_{N+2M} = \frac{(N+2M)!}{k!(N+2M-k)!}$$

и, таким образом, обращения операторов определены формулами (14-15).

3. Полная система потенциалов [8]

Полная система потенциалов представляет обобщённую цепочку Гиббса-Гельмгольца, связанных между собой преобразованиями Лежандра-Эйлера. Ниже представлены общие выражения потенциалов с n перемеными, а для частных случаев – с двумя переменными.

3.1. Цепочка Гиббса-Гельмгольца

Потенциалы $\mathrm{H}^{k+1,k+2,\ldots,n}_{1,2,3,\ldots,k}(x_1, x_2, \ldots, x_k, Y_{k+1}, Y_{k+2}, \ldots Y_n)$ - это функии соответствующих переменных, связывающие обобщённые термодинамические координаты (потоки) $\mathrm{x}_{\mathrm{i}}, i = \overline{(1,k)}$ и термодинамические силы $Y_j, j = \overline{(k+1,n)}$, равноприсутствующих (по принципу Кюри), скалярной, векторной или тензорной структуры, дифференциальными соотношениями:

$$\mathrm{Y}_{\mathrm{i}} = \frac{\partial H^{k+1,\ldots n}_{1,2,\ldots k}}{\partial x_i}, i = \overline{(1,k)}; \quad x_j = -\frac{\partial H^{k+1,\ldots n}_{1,2,\ldots k}}{\partial Y_j}, \; j = \overline{(k+1,n)} \quad (20)$$

$$\mathrm{dY}_{\mathrm{i}} = \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial Y_i}{\partial x_l} dx_l = \sum_{l=1}^{k} G_{il} dx_l; \quad dx_j = \sum_{m=k+1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial Y_m} dY_m = \sum_{m=k+1}^{n} g_{jm} dY_m \quad (21)$$

при этом «жёсткости» G_{il} и «податливости» g_{jm} удовлетворяют соотношениям взаимности Максвелла (или Гиббса-Гельмголца):

$$\frac{\partial \mathrm{G}_{\mathrm{il}}}{\partial x_p} = \frac{\partial \mathrm{G}_{\mathrm{ip}}}{\partial x_l}, \quad \frac{\partial \mathrm{g}_{\mathrm{jm}}}{\partial Y_p} = \frac{\partial \mathrm{g}_{\mathrm{jp}}}{\partial Y_m}; \quad (G_{il})\Big|_{x_p} = (G_{ip})\Big|_{x_l}, (g_{jm})\Big|_{Y_j} = (g_{mj})\Big|_{Y_m} \quad (22)$$

3.2. Преобразования Лежандра-Эйлера.Обобщённая мнемоническая схема Борна

$$\begin{pmatrix} & H^1 & \\ \mathrm{H}_1 & & H_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} & & H^{12} & & \\ & H_{12} & & H_2^1 & \\ H_{12} & & & & H_{12} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} & & & H^{123} & & & \\ & & H_1^{23} & & H_2^{13} & H_3^{12} & \\ & H_{12}^3 & & & H_{23}^1 & H_{13}^2 & \\ H_{123} & & & & & & H_{123} \end{pmatrix}$$

a) *b*) *c*)

Рисунок 1. Обобщённая мнемоническая схема Борна для преобразований Лежандра-Эйлера полной цепочки Гиббса-Гельмгольца потенциальных функций одной (а), двух (b) и трёх переменных (c)

Цепочка Гиббса-Гельмгольца (подобно мнемонической диаграмме Борна рисунок 1) для функций одной и двух переменных представляется в виде соответственно:

- одной переменной $\mathrm{H}_1(x_1)$, $H^1(Y_1)$

$$\mathrm{H}^1 = H_1 - x_1 \frac{\partial H_1}{\partial x_1} = H_1 - x_1 Y_1, \quad H_1 = H^1 - Y_1 \frac{\partial H^1}{\partial Y_1} = H^1 + Y_1 x_1, \quad (23)$$

где термодинамические координаты (потоки) и силы даны выражениями:

$$\mathrm{Y}_1 = \frac{\partial H_1}{\partial x_1}, \quad x_1 = -\frac{\partial H^1}{\partial Y_1}; \tag{24}$$

- двух переменных $\mathrm{H}_{12}(x_1, x_2), H_1^2(x_1, Y_2), H^{12}(Y_1, Y_2), H_2^1(x_2, Y_1)$

$$H_1^2 = H_{12} - x_x \frac{\partial H_{12}}{\partial x_2} = H^{12} - Y_1 \frac{\partial H^{12}}{\partial Y_1} = H_{12} - x_2 Y_2 = H^{12} + Y_1 x_1,$$

$$H_{12} = H_1^2 - \mathrm{Y}_x \frac{\partial H_1^2}{\partial Y_2} = H_2^1 - Y_1 \frac{\partial H_1^2}{\partial Y_1} = H_1^2 + Y_2 x_2 = H_2^1 + Y_1 x_1, \tag{25}$$

$$H_2^1 = H_{12} - x_1 \frac{\partial H_{12}}{\partial x_1} = H^{12} - Y_2 \frac{\partial H^{12}}{\partial Y_2} = H_{12} - x_1 Y_1 = H^{12} + Y_2 x_{21},$$

$$H^{12} = H_2^1 - x_2 \frac{\partial H_2^1}{\partial x_2} = H_1^2 - x_1 \frac{\partial H_1^2}{\partial x_1} = H_2^1 - x_2 Y_2 = H_1^2 - x_1 Y_1,$$

здесь термодинамические координаты (потоки) и силы даются выражениями:

$$Y_1 = \left.\frac{\partial H_{12}}{\partial x_1}\right|_{x_2} = \left.\frac{\partial H_1^2}{\partial x_1}\right|_{Y_2}, Y_2 = \left.\frac{\partial H_{12}}{\partial x_2}\right|_{x_1} = \left.\frac{\partial H_1^2}{\partial x_2}\right|_{Y_1}, \quad -x_1 = \left.\frac{\partial H^{12}}{\partial Y_1}\right|_{Y_2} = \left.\frac{\partial H_2^1}{\partial Y_1}\right|_{x_2}, -x_2 = \left.\frac{\partial H^{12}}{\partial Y_2}\right|_{Y_1} = \left.\frac{\partial H_1^2}{\partial Y_1}\right|_{x_2}. \tag{26}$$

Здесь нижние индексы указывают перечень переменных $\mathrm{x}_i, i = \overline{1,k}$, а верхние – переменных Y_j, $j = \overline{k+1,n}$ - аргуменов функций $H_{1,2,..,k}^{k+1,k+2,..,n}$, и при следовании слева направо в цепочке Гиббса-Гельмгольца используется правило: при поднятии индекса производная берётся по x_i, а при опускании – по Y_j. Знаки производных определяются так: при поднятии индекса –«плюс», а при опускании-«минус».

3.3. Соотношеня взаимности Максвелла. Система неравенств; условия равновесия и устойчивости системы

По свойству преобразований Лежандра-Эйлера детерминанты производных потенциалов отличны от нуля, положительны их дифференциалы второго порядка и главные миноры гессианов; это, как и условия экстремума первого и второго порядков изопараметрических коэффициентов «жёсткости» и «податливости» (при $\mathrm{x}_i = const$ или $Y_j = const$), даёт ряд неравенств типа (таких неравенств 2^n):

$$\det\left|G_{ij}\right| \geq 0; \quad \det\left|g_{ij}\right| \geq 0, \quad G_{ij} \geq 0, \quad g_{ij} \geq 0, \quad (G_{ii})\big|_{Y_k} \leq (G_{ii})\big|_{x_k}; (g_{ii})\big|_{Y_k} \leq (g_{ii})\big|_{x_k}$$

$$G_{kk}G_{k+1,k+1} - (G_{k,k+1})^2 \geq 0; g_{kk}g_{k+1,k+1} - (g_{k,k+1})^2 \geq 0, \quad \frac{\partial \mathrm{g}_{\mathrm{ij}}}{\partial \mathrm{Y}_{\mathrm{k}}} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial Y_j}; \quad \frac{\partial G_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial G_{ik}}{\partial x_j} \tag{27}$$

Система неравенств и соотношений взаимности Максвелла обеспечивает взаимнооднозначную определимость (разрешимость) потоков и сил, положитнльную определённость дифференциалов второго и высших порядков, интегрируемость дифференциальных формц первого и второго порядков, а в целом –равновесие и устойчивость системы.

3.4. Определяющие соотношения. Дифференциалы сил и потоков

Согласно (9) и (11) дифференциалы термодинамических потоков и сил соответственно представляются соотношениями

$$\mathrm{dY}_1 = (\frac{\partial Y_1}{\partial x_1})_{x_2} dx_1 + (\frac{\partial Y_1}{\partial x_2})_{x_2} dx_2 = (\frac{\partial Y_1}{\partial x_1})_{x_2} dx_1 + (\frac{\partial Y_1}{\partial Y_1})_{Y_2} dY_1$$

$$\mathrm{dY}_2 = (\frac{\partial Y_{21}}{\partial x_1})_{x_2} dx_1 + (\frac{\partial Y_{21}}{\partial x_2})_{x_2} dx_2 = (\frac{\partial Y_2}{\partial Y_1})_{x_2} dx_1 + (\frac{\partial Y_2}{\partial x_1})_{xY_2} dx_1 \qquad (28)$$

$$\mathrm{dx}_1 = (\frac{\partial x_1}{\partial Y_1})_{Y2} dY_1 + (\frac{xY_1}{\partial Y_2})_{Y1} dY_2 = (\frac{\partial x_1}{\partial Y_1})_{x_2} dY_1 + (\frac{\partial x_1}{\partial x_1})_{Y_2} dx_2$$

$$\mathrm{dx}_2 = (\frac{\partial x_2}{\partial Y_1})_{Y_2} dY_1 + (\frac{\partial x_2}{\partial Y_2})_{Y_2} dY_2 == (\frac{\partial x_2}{\partial x_1})_{Y_2} dx_1 + (\frac{\partial x_2}{\partial Y_1})_{x_1} dY_2 \qquad (29)$$

Наглядным примером потенциалов являются широко используемые в механике твёрдых деформируемых сред, а именно: внутренняя энергия $\mathrm{H}_{12}(x_1 = \tilde{\varepsilon}, x_2 = s)$, свободная энергия $H_1^2(x_1 = \tilde{\varepsilon}, Y_2 = T)$, потенциал Гиббса $H^{12}(Y_1 = \tilde{\sigma}, Y_2 = T)$ и свободная энтальпия $H_2^!(Y_1 = \tilde{\sigma}, x_2 = s)/$

4. Вариационные принципы [2, 5, 10-13]

В термодинамике существуют обобщенные силы, которые пропорциональны сопротивлениям и обобщенным скоростям (потокам). Если заданы термодинамические силы и условия принуждения, то в любой термодинамической системе возможны лишь такие необратимые процессы, для которых принуждение минимально. Универсальный локальный потенциал:

$$\Pi(\vec{J}, \vec{X}) = \Phi(\vec{J}, \vec{J}) + \Psi(\vec{X}, \vec{X}); \quad \Pi = \int_V \pi\, dV = \min;$$

Вариационные принципы: Даламбера (дифференциальный), наименьшего принуждения Гаусса (диффререниальный), наименьшего действия (Мопертье- интегральный), (Гамильтона -интегральный), наименьшего рассеяния энергии (Онзагера), наименьшего производства энтропии (Пригожина**)**, (Дьярмати**)**. Ниже приведён достаточно широкий набор формулировок вариационных принципов, рекомендуемых для анализа реологических механических систем (с рассеиванием), приведенных в [2, 5, 10-13].

4.1. Принцип наименьшего рассеяния энергии (Онзагера,1931)

Процесс описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами и линейными определяющими (конститутивными) соотношениями, коэффициенты которых удовлетворяют соотношениям взаимности и потенциальности

$$J_i = \sum_{j=1,n} L_{ij}\, grad\Gamma_j = \sum_{j=1,n} L_{ij} \nabla\Gamma_j; \quad L_{ij} = L_{ji}; \Gamma_i = \{T, -p, \mu, ..\}; \quad \nabla\Gamma_i = \sum_{j=1}^{n} R_{ij} J_j; \quad R_{ij} = R_{ji};t$$

$$X_i = \frac{\partial\Phi}{\partial J_i} = \nabla\Gamma_i; \quad J_i = \frac{\partial\Psi}{\partial X_i}; \quad R_{ij} = const; \quad L_{ij} = cons; \; F_{O-M} = \sigma_{O-M} - (\Phi + \Psi); \quad \Phi_{O-J} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} R_{ij} J_i J_j;$$

потенциалы удовлетворяют принципу

$$\Psi_{O-X} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} L_{ij} X_i X_j; \quad \sigma_{O-M} = \sum_{i=1}^{n} J_i X_i; \quad \int_V F_{O-M}\, dV = \min; \qquad (30)$$

Принцип наименьшего рассеяния энергии Онзагера в дифференциальной, локальной форме:

- представление через потоки $\vec{X} = const; \quad \delta\vec{X} = 0$

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_s - \Phi(\vec{J},\vec{J}) = \sigma(\vec{J},\vec{X}) - \Phi(\vec{J},\vec{J}); \quad \delta\left[\sigma(\vec{J},\vec{X}) - \Phi(\vec{J},\vec{J})\right]_X = 0; \Rightarrow \vec{X}_k = \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{J}_k};$$

- представление через силы $\vec{J} = const; \quad \delta\vec{J} = 0$

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_s - \Psi(\vec{X},\vec{X}) = \sigma(\vec{J},\vec{X}) - \Psi(\vec{X},\vec{X}); \quad \delta\left[\sigma(\vec{J},\vec{X}) - \Psi(\vec{X},\vec{X})\right]_J = 0; \Rightarrow \vec{J}_k = \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{X}_k}.$$

4.2. Принцип наименьшего производства энтропии (Пригожин, 1959, Дьярмати Gyarmati I., 1963)

Неравновесная термодинамика и обобщенный принцип, объединяющий принципы наименьшего рассеяния энергии и наименьшего рассеяния энтропии.

$$J_i = \sum_{j=1,n} L_{ij}\, grad\,\Gamma_j = \sum_{j=1,n} L_{ij} \nabla\Gamma_j; \quad L_{ij} = L_{ji}; \quad \Gamma_i = \{T, -p, \mu, ..\}; \quad \nabla\Gamma_i = \sum_{j=1}^{n} R_{ij} J_j; \quad R_{ij} = R_{ji};$$

$$F_{O-M} = \sigma_{O-M} - (\Phi + \Psi); \quad \Phi_{O-J} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} R_{ij} J_i J_j; \quad \Psi_{O-X} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} L_{ij} X_i X_j; \quad \sigma_{O-M} = \sum_{i=1}^{n} J_i X_i; \tag{31}$$

$$\int_V F_{O-M} dV = \min; \quad X_i = \frac{\partial \Phi}{\partial J_i} = \nabla\Gamma_i; \quad J_i = \frac{\partial \Psi}{\partial X_i}; \quad R_{ij} \neq const; \quad L_{ij} \neq const;$$

$$L_{ij} = L_{ij}(\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n); \qquad R_{ij} = R_{ij}(\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n)$$

квазилинейные конститутивные соотношения.

Представление конститутивных соотношений в виде разложения:

$$J_i = \sum_{j=1}^{n} L_{ij} \nabla\Gamma_j + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} L_{ijk} \nabla\Gamma_j \nabla\Gamma_k + ... + \frac{1}{l!}\sum_{i,j,..l=1}^{n} L_{ijk..l} \nabla\Gamma_j \nabla\Gamma_k ... \nabla\Gamma_l + ...;$$

$$\nabla\Gamma_i = \sum_{j=1}^{n} R_{ij} J_j + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} R_{ijk} J_j J_k + ... + \frac{1}{l!}\sum_{i,j,..l=1}^{n} R_{ijk..l} J_j J_k ... J_l + ...; \tag{32}$$

$$L_{ij} = L_{ji}; \quad L_{ijk} = L_{ikj} = L_{kji}; \quad ....; \quad L_{ij..l} = L_{li..k} = ...;$$

$$R_{ij} = R_{ji}; \quad R_{ijk} = R_{ikj} = R_{kji}; \quad ....; \quad R_{ij..l} = R_{li..k} = ...;$$

компоненты которого удовлетворяют соотношениям взаимности.

Вариация суммы потенциалов равна нулю (теорема Дьярмати):

$$\delta_{O-M} = \delta_{O-\nabla\Gamma} + \delta_{O-J} + \delta_{O-\Gamma} = 0; \tag{33}$$

в случае квазилинейных соотношений справедливы равенства

$$\sum_{m=1}^{n} \left(\frac{\partial R_{im}}{\partial \Gamma_j} L_{mk} + R_{im} \frac{\partial L_{mk}}{\partial \Gamma_j}\right) = \sum \left(\frac{\partial R_{im}}{\partial \Gamma_j} + R_{im} R_{kl} \frac{\partial L_{mk}}{\partial \Gamma_j}\right) = 0;$$

$$\frac{\partial F_{O-M}}{\partial \Gamma_j} = -\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial L_{ik}}{\partial \Gamma_j}\left(X_i X_k - \sum_{i,k=1}^{n} R_{im} R_{kl} J_m J_l\right) \tag{34}$$

Теорема Дьярмати справедлива (Фаркаш и Ностициус) и для нелинейных конститутивных соотношений:

$$J_i = J_i(\Gamma_1 \Gamma_2, ..., \Gamma_n, \nabla\Gamma_1, \nabla\Gamma_2, ..., \nabla\Gamma_n); \quad \left(\frac{\partial J_i}{\partial \nabla\Gamma_k}\right)_i = \left(\frac{\partial J_k}{\partial \nabla\Gamma_i}\right)_k. \tag{35}$$

Соотношения взаимности Онзагера

$$\sigma = \sigma^s + \sigma^v + \sigma^a + \sigma^t \geq 0; \quad \sigma^s = \sum_{k=1}^{n} A_k J_k; \quad \sigma^v = \vec{J}_q \cdot \vec{X}_q + \sum_{k=1}^{n-1} \vec{J}_k \vec{X}_k :$$

$$\sigma^a = \vec{P}^{av} \cdot \vec{X}_v^a; \quad \sigma^t = \vec{\vec{P}}^{av} : \vec{X}_v^s; \quad \sigma = \sum_{i.j=1}^{n} L_{ij} J_i J_j; \quad \sigma = \sum_{i.j=1}^{n} R_{ij} X_i X_j; \quad L_{ji} = L_{ij}; \quad R_{ji} = R_{ij};$$

выполняются.

4.3. Принцип (Гландсдорф – Пригожин)

$$\mathrm{P} = \sum_{i=1}^{n} J_i X_i \geq 0; \quad d\mathrm{P} = \sum_{i=1}^{n} J_i dX_i + \sum_{i=1}^{n} X_i dJ_i; \quad X_i = \sum_{i=1}^{n} L_{ii} J_i; \quad J_i = \sum_{i=1}^{n} R_{ii} X_i; \quad \frac{d\mathrm{P}}{dt} \leq 0;$$

$$\frac{d\Pi}{dt} = \int_V (\sum_{i=1}^{n} J_i \frac{\partial X_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial J_i}{\partial t}) dV \leq 0; \tag{36}$$

$$J_i = \Gamma_i = \left\{ \frac{1}{T}, -p, ... \right\}; \quad \Pi(\Gamma_i) = 2\Psi(J,J) = \int_V \left\{ \sum_{i=1}^{n} A_i \Gamma_i + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \Gamma_i \Gamma_j + \sum_{i,j=1}^{n} L_{ij} \vec{\nabla}\Gamma_i \vec{\nabla}\Gamma_j \right\} dV;$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \Gamma_i} - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \Psi}{\partial (\frac{\partial \Gamma_i}{\partial x_k})} = 0.$$

4.4. Универсальная форма (Пригожин, Онзагер - Махлуп)

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_s - \Phi(\vec{J},\vec{J}) - \Psi(\vec{X},\vec{X}) = \sigma(\vec{J},\vec{X}) - \Phi(\vec{J},\vec{J}) - \Psi(\vec{X},\vec{X});$$

$$\delta\left[\sigma(\vec{J},\vec{X}) - \Phi(\vec{J},\vec{J}) - \Psi(\vec{X},\vec{X}) \right] = \delta\left[\sigma_{OM} \right] = 0; \quad \Rightarrow \vec{X}_k = \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{J}_k}; \quad \vec{J}_k = \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{X}_k} \tag{37}$$

4.5. Функции рассеяния Рэллея (локальные потенциалы рассеяния)

$$\Psi(\vec{X},\vec{X}) = \sum_{k,l=1}^{n} R_{kl} \vec{X}_k \vec{X}_l \geq 0; \quad \Phi(\vec{J},\vec{J}) = \sum_{k,l=1}^{n} L_{kl} \vec{J}_k \vec{J}_l \geq 0; \tag{38}$$

$$\vec{J}_k = \sum_{l=1}^{n} L_{kl} X_l; \quad \vec{X}_k = \sum_{l=1}^{n} R_{kl} \vec{J}_l; \quad L_{kl} = L_{lk}; \quad R_{kl} = R_{lk}; \quad \vec{J}_k = \frac{\partial \Psi}{\partial X_k}; \quad \vec{X}_k = \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{J}_k}$$

4.6. Гауссова форма (наименьшего принуждения, наименьших скоростей, наименьших квадратов)

$$\Psi(\vec{X},\vec{X}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} R_{ki} \vec{X}_k^2 \geq 0; \quad \Phi(\vec{J},\vec{J}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} L_{ki} \vec{J}_k^2 \geq 0; \tag{39}$$

$$\vec{J}_k = \sum_{l=1}^{n} L_{ki} X_l; \quad \vec{X}_k = \sum_{l=1}^{n} R_{ki} \vec{J}_l; \quad \vec{J}_k = \frac{\partial \Psi}{\partial X_k}; \quad \vec{X}_k = \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{J}_k}$$

4.7. Интегральный принцип. Уравнения Лагранжа-Эйлера

$$\Im = \rho \frac{\partial s}{\partial t} - \Psi = \sigma - \Psi; \quad L(\Gamma) = \int_V \Im dV = \min; \tag{40}$$

$$\frac{\partial \Im}{\partial \Gamma_i} - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \Im}{\partial (\frac{\partial \Gamma_i}{\partial x_k})} = 0;$$

4.8. Общий случай

$$\Im(\Gamma, \nabla\Gamma) = \rho \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \Gamma_i \frac{\partial \Gamma_j}{\partial t} - \frac{1}{2} \sum L_{ij} \nabla\Gamma_i \nabla\Gamma_j; \quad A_{ij} = \frac{\partial^2 s}{\partial \Gamma_i \partial \Gamma_j} = A_{ji}; \qquad (41)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial s}{\partial \Gamma_i} \frac{\partial \Gamma_i}{\partial t}; \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \Im}{\partial \Gamma_i} - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \Im}{\partial (\frac{\partial \Gamma_i}{\partial x_k})} = 0.$$

4.9. Вариационный принцип А.А.Ильюшина [5].

Однородный процесс деформации в твёрдом деформируемом теле, задаваемый обобщённой функцией (потоками) $\Pi(\tau)$ в интервале времени $t_0 \le \tau \le t < \infty$, в результате чего реакция тела проявляется в обобщённых параметрах-функциях $R(\tau)$ таких, что для любой точки $\vec{x}$ тела и в любой момент t имеют место законы сохранения энергии, баланса энтропии, сохранения массы и импульса. Для функционала внутренней энергии справедливо тождество

$$\dot{u}^t \{\Pi(\tau)\} - \dot{\tilde{\varepsilon}}(t) \tilde{\sigma}^t \{\Pi(\tau)\} - \eta^t \{\Pi(\tau)\} T(t) = 0, \qquad (42)$$

где функционал внутренней энергии определён выражением

$$u(t) = u^t \{\Pi(\tau)\} = \int_0^t \tilde{\sigma}^t (\Pi(\tau)) d\Pi(\tau) + u(t_0).$$

Существует билинейная форма (например, приток тепла) – скалярный функционал $V^t\{\Pi(\tau)\} = R^{tt}\{\Pi(\tau)\}\dot{\Pi}(t)$ такой, что при ненулевом процессе существуют первые вариации (первые линейные функционалы) $L^t_\Pi\{\delta\Pi\}$ и $L^t_V\{\delta\Pi\}$:

$$\dot{R}^t\{\Pi + \delta\Pi\} - \dot{R}^t\{\Pi\} = L^t_\Pi\{\delta\Pi\} + 0(\delta N),$$

$$V^t\{\Pi + \delta\Pi\} - V^t\{\Pi\} = L^t_V\{\delta\Pi\} + 0(\delta N),$$

при заданной норме $\delta N \to 0$, удовлетворяет тождеству:

$$\delta \dot{V}^t \{\Pi(\tau)\} - R^t\{\Pi(\tau)\}\delta\Pi(t) - \delta R^t\{\Pi(\tau)\}\dot{\Pi}(t) = 0 \qquad (43)$$

Согласно принципу минимума рассеяния следует:

$$\delta \dot{V}^t = \int_{t_0}^{t} \delta\dot{\Pi}(\tau) d\vec{v}(t,\tau) + a(t)\delta\Pi(t_0), \quad \delta R^t = \int_{t_0}^{t} \delta\dot{\Pi}(\tau) d\vec{Y}(t,\tau) + b(t)\delta\Pi(t_0) \qquad (44)$$

Если процесс необратимый, т.е. $V^t\{\Pi(\tau)\} = V(t) \ge 0$ - неубывающий функционал, то величина (функционал необратимости):

$$M_V = \int \dot{V}^t \{\Pi(\tau)\} dt = V(t) - V(t_0) > 0$$

может служить мерой необратимости процесса.

4.10. Канонические полевые уравнения (Верхаша Ж.- Verhas J. ,1967 и Войта Г.- Vojta G.,1967)

Варьируется плотность потенциала рассеяния – плотность лагранжиана:

$$\tilde{L}(\Gamma_i,\dot{\Gamma}_i,\nabla\Gamma_i)=\rho\dot{s}-\Psi(\Gamma_i,\dot{\Gamma}_i,\nabla\Gamma_i)=\rho\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}s_{ij}\Gamma_i\dot{\Gamma}_j-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}L_{ij}\nabla\Gamma_i\nabla\Gamma_j; \qquad (45)$$

где время не рассматривается как независимая переменная и потому оператор – производная по времени $\frac{d}{dt}$ – может быть заменен оператором ∇: $\frac{d}{dt}\to\nabla$; $\quad \nabla_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$; и, кроме того,

предполагая существование «потенциалов скорости» ξ_i, которые не имеют непосредственного физического смысла (не измеряемые в эксперименте), а их градиенты, определяющие плотность потока:

$$\vec{J}_i=\nabla\xi_i=-\vec{\Pi}_i; \qquad (46)$$

и служат для записи уравнений переноса.

Следуя принципу Гамильтона (стационарности временного интеграла, равносильному термодинамическому принципу Лагранжа стационарности объемного интеграла):

$$L=\int_V\tilde{L}\,dV=\max; \quad\Rightarrow\quad \delta L(\Gamma_i)=\delta\int_V\tilde{L}\,dV=0; \qquad \tilde{L}=\rho s-\Psi=\sigma-\Psi; \ (47)$$

и считая полевые величины Γ_i- обобщенными термодинамическими координатами, обобщенные термодинамические импульсы определяются соотношениями:

$$\vec{\Pi}_i=\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\nabla\Gamma_i}; \qquad \Pi_{ij}=\frac{\partial\tilde{L}}{\partial(\frac{\partial\Gamma_i}{\partial x_j})}; \quad j=1,2,3; \quad i=(\overline{1,n}); \qquad (48)$$

откуда вытекают представления через потенциал диссипации $\tilde{L}(\Gamma_i,\nabla\Gamma_i)$ и, в конечном счете, через диссипативные силы $\nabla\Gamma_i$

$$\vec{\Pi}_i=-\sum_{j=1}^{n}L_{ij}\nabla\Gamma_j; \quad \Pi_{il}=-\sum_{k=1}^{n}L_{ik}\frac{\partial\Gamma_k}{\partial x_l}; \qquad (46)$$

и тогда полевые термодинамические уравнения Эйлера – Лагранжа записываются в виде:

$$\frac{\delta L}{\delta\Gamma_i}=\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\Gamma_i}-\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial(\frac{\partial\Gamma_i}{\partial x_k})}=0; \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\Gamma_i}=\nabla\cdot\vec{\Pi}_i. \qquad (49)$$

Используя плотность термодинамического потенциала рассеяния Гамильтона:

$$\tilde{H}(\Gamma_i,\vec{\Pi}_i)=\sum_{i=1}^{n}\vec{\Pi}_i\cdot\nabla\Gamma_i-\tilde{L}; \qquad \nabla\Gamma_i=\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\vec{\Pi}_i}; \quad -\nabla\cdot\vec{\Pi}_i=\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\Gamma_i}; \qquad (50)$$

нетрудно убедиться, что потенциалы рассеяния Лагранжа и Гамильтона связаны между собой преобразованиями Лежандра:

$$\tilde{H}(\Gamma_i,\vec{\Pi}_i); \quad \tilde{L}(\Gamma_i,\nabla\Gamma_i); \qquad \tilde{L}=\sum\vec{\Pi}_i\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\vec{\Pi}_i}-\tilde{H}; \quad \tilde{H}=\sum\nabla\Gamma_i\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\nabla\Gamma_i}-\tilde{L}; \ (51)$$

при этом между производными по «пассивным» переменным справедливы соотношения:

$$\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\Gamma_i}=-\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\Gamma_i}. \qquad (52)$$

Это значит: если пассивные переменные лагранжиана – обобщенные координаты Γ_i, а активные переменные – обобщенные скорости $\nabla\Gamma_i$, то они (активные переменные) переходят в обобщенные импульсы $\vec{\Pi}_i$, а плотность лагранжиана

$$\tilde{L}(\Gamma_i, \nabla\Gamma_i) = \rho\dot{s} - \Psi; \tag{53}$$

переходит в плотность гамильтониана:

$$\tilde{H}(\Gamma_i, \vec{\Pi}_i) = -\rho\dot{s} - \Phi; \tag{54}$$

связанные между собой преобразованиями Лежандра

$$\tilde{H}(\Gamma_i, \vec{\Pi}_i); \quad \tilde{L}(\Gamma_i, \nabla\Gamma_i); \quad \tilde{L} = \sum \vec{\Pi}_i \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \vec{\Pi}_i} - \tilde{H}; \quad \tilde{H} = \sum \nabla\Gamma_i \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \nabla\Gamma_i} - \tilde{L}; \tag{55}$$

для которых справедливы уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \Gamma_i} - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial (\frac{\partial \Gamma_i}{\partial x_k})} = 0; \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \Gamma_i} - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial (\vec{\Pi}_i)} = 0. \tag{56}$$

Неравновесные потенциальные функции (производство энтропии), соотношения взаимности

$$\mathrm{P} = \sum_{i,j=1}^{n} L_{ij} X_i X_j = \min; \quad \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial X_i} = 0; \quad \delta\mathrm{P} = \sum_{i=1}^{n} \delta J_i \delta X_i \geq 0; \quad J_i = \sum_{j=1}^{n} L_{ij} X_j .$$

5. Доопределение функционала рассеяния

Если в конечном объеме среды возможен стационарный периодический процесс $\Pi(T, \tilde{\varepsilon}) = \Pi(\vec{x}, t) = \Pi(\vec{x}, t + \frac{2\pi}{\omega})$ с частотой ω, то рассеяние w^* и энтропия s для произвольного момента t и любого объема V с границей Σ удовлетворяют условиям (условиям доопределения):

$$\int_{t_1}^{t_1+2\pi/\omega} dt \int_V \rho w^* dV = Q_1; \quad Q_1 = \int_{t_1}^{t_1+2\pi/\omega} dt \int_\Sigma (-\vec{q}\,\vec{n}) d\Sigma; \quad \int_{t_1}^{t_1+2\pi/\omega} dt \int_V \rho \dot{T} s dV = 0; \tag{57}$$

Допущение: тензор напряжения в точке $\vec{x}$ сплошной среды, в которой отсутствует влияние истории деформирования, зависит только от координаты $\vec{x}$, градиента $\vec{x}_i$ и его производных по времени (смещений, деформаций, скорости деформаций и производных высшего порядка):

$$\tilde{\sigma} = \tilde{f}(\vec{x}, \vec{x}_i, \dot{\vec{x}}_i, \ddot{\vec{x}}_i, \dddot{\vec{x}}_i, \ldots) = \tilde{f}(\tilde{\varepsilon}, \dot{\tilde{\varepsilon}}, \ddot{\tilde{\varepsilon}}, \dddot{\tilde{\varepsilon}}, \ldots)$$

тензор скорости напряжения в точке $\vec{x}$ сплошной среды, в которой отсутствует влияние истории деформирования, зависит только от координаты $\vec{x}$, градиента $\vec{x}_i$ и его производных по времени (смещений, деформаций, скорости деформаций и производных высшего порядка):

$$\frac{d}{dt}\tilde{\sigma} = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{\sigma} + \vec{v}\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \vec{x}} = \frac{d}{dt}\tilde{f}(\vec{x}, \vec{x}_i, \dot{\vec{x}}_i, \ddot{\vec{x}}_i, \dddot{\vec{x}}_i, \ldots) = \tilde{\varphi}(\tilde{\varepsilon}, \dot{\tilde{\varepsilon}}, \ddot{\tilde{\varepsilon}}, \dddot{\tilde{\varepsilon}}, \ldots)$$

тензорно-линейные соотношения напряжений-скоростей деформации изотропных сред:

$$\tilde{\sigma} = C_0\tilde{\delta} + C_1\dot{\tilde{\varepsilon}} + C_2\dot{\tilde{\varepsilon}} \otimes \dot{\tilde{\varepsilon}}; \quad \dot{\tilde{\varepsilon}} = c_0\tilde{\delta} + c_1\dot{\tilde{\sigma}} + c_2\dot{\tilde{\sigma}} \otimes \dot{\tilde{\sigma}};$$

потенциал рассеяния и характеристики «жесткости » и «податливости»:

$$\chi_\sigma = \chi_\sigma(I_{1\varepsilon}, I_{2\varepsilon}, I_{3\varepsilon}); \quad C_0 = \frac{\partial \chi_\sigma}{\partial I_{1\varepsilon}}; \quad C_1 = \frac{\partial \chi_\sigma}{\partial I_{2\varepsilon}}; \quad C_2 = \frac{\partial \chi_\sigma}{\partial I_{3\varepsilon}};$$

$$\chi_\varepsilon = \chi_\varepsilon(I_{1\sigma}, I_{2\sigma}, I_{3\sigma}); \quad c_0 = \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial I_{1\sigma}}; \quad c_1 = \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial I_{2\sigma}}; \quad c_2 = \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial I_{3\sigma}};$$

$$I_{1\varepsilon} = \dot{\tilde{\varepsilon}}\tilde{\delta}; \quad I_{2\varepsilon} = \dot{\tilde{\varepsilon}} \cdot \dot{\tilde{\varepsilon}}; \quad I_{3\varepsilon} = \dot{\tilde{\varepsilon}} \cdot \dot{\tilde{\varepsilon}} \cdot \dot{\tilde{\varepsilon}}; \quad I_{1\sigma} = \tilde{\sigma}\tilde{\delta}; \quad I_{2\sigma} = \tilde{\sigma} \cdot \tilde{\sigma}; \quad I_{3\sigma} = \tilde{\sigma} \cdot \tilde{\sigma} \cdot \tilde{\sigma};$$

эффекты второго порядка (Кельвина – давление пропорционально квадрату скорости сдвига или скорость изменения объема пропорциональна квадрату касательного напряжения; Пойнтинга – нормальное напряжение в плоскости движения пропорционально квадрату скорости сдвига или скорость нормального удлинения в плоскости пропорционально квадрату касательного напряжения) отсутствуют

$$\tilde{\sigma} = C_0\tilde{\delta} + C_1\dot{\tilde{\varepsilon}}; \quad \dot{\tilde{\varepsilon}} = c_0\tilde{\delta} + c_1\tilde{\sigma};$$

$$\chi_\sigma = \chi_\sigma(I_{1\varepsilon}, I_{2\varepsilon}); \quad C_0 = \frac{\partial \chi_\sigma}{\partial I_{1\varepsilon}}; \quad C_1 = \frac{\partial \chi_\sigma}{\partial I_{2\varepsilon}};$$

$$\chi_\varepsilon = \chi_\varepsilon(I_{1\sigma}, I_{2\sigma}); \quad c_0 = \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial I_{1\sigma}}; \quad c_1 = \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial I_{2\sigma}};$$

$$I_{1\varepsilon} = \dot{\tilde{\varepsilon}}\tilde{\delta}; \quad I_{2\varepsilon} = \dot{\tilde{\varepsilon}} \cdot \dot{\tilde{\varepsilon}}; \qquad I_{1\sigma} = \tilde{\sigma}\tilde{\delta}; \quad I_{2\sigma} = \tilde{\sigma} \cdot \tilde{\sigma};$$

явление затухания со временем (релаксации) однородной немеханической «обобщенной» силы $\tilde{X}_k$ в направлении устойчивого нулевого значения и пропорционально отклонению этой силы от положения равновесия и деформации тела (с заданным временем релаксации τ_i и коэффициентом взаимодействия γ_i)

$$\frac{d\tilde{X}_i}{dt} = -\tau_i \tilde{X}_i - \gamma_i \dot{\tilde{\varepsilon}};$$

линейные соотношения «стандартного тела» (Zener C., 1948):

$$M_\varepsilon \tilde{\varepsilon} + M_v \tau \dot{\tilde{\varepsilon}} = \tilde{\sigma} + \tau \dot{\tilde{\sigma}}; \quad M_\varepsilon(\tilde{\varepsilon} + \tau_v \dot{\tilde{\varepsilon}}) = \tilde{\sigma} + \tau \dot{\tilde{\sigma}};$$

$$\tau_v = \frac{M_v \tau}{M_\varepsilon} = \tau_\varepsilon\left(1 + \frac{\lambda_i \gamma_i}{M_\varepsilon}\right); \quad \tau = \tau_i; \quad M_v = 1 + \frac{\lambda_i \gamma_i}{M_\varepsilon};$$

сопротивление среды действию периодических сил и периодической деформации

$$\tilde{\sigma}(t) = \tilde{\sigma}_0 \exp\{i\omega t\}; \quad \to \quad \tilde{\varepsilon}(t) = \tilde{\varepsilon}_0 \exp\{i(\omega t + \delta)\};$$

$$tg\delta = \omega \frac{\tau_v - \tau}{1 + \omega^2 \tau_v \tau} = \frac{M_v - M_\varepsilon}{\bar{M}} \cdot \frac{\omega \bar{\tau}}{1 + \omega^2 \bar{\tau}^2}; \quad \bar{M} = \sqrt{M_\varepsilon M_v}; \quad \bar{\tau} = \sqrt{\tau \tau_v}$$

$$\tilde{s} = 2G(\tilde{e} + \tau_k \dot{\tilde{e}}); \quad \tilde{\sigma} = 2G\tilde{\varepsilon} + 2G\tau_k \dot{\tilde{\varepsilon}} + \tilde{\delta}[(K - \frac{2}{3}G)\tilde{\varepsilon}\tilde{\delta} - \frac{2}{3}G\tau_k \dot{\tilde{\varepsilon}}\tilde{\delta} - 3K\alpha T]; \tau_k = \frac{\eta_k}{G};$$

η_k - коэффициент вязкости при сдвиге.

6. Полная механическая энергия (кинетическая и потенциальная)

Первый интеграл уравнения движения

$$E_m = E_k + E_\varphi = const; \quad dE = 0; \tag{58}$$

полная энергия (механическая и тепловая - внутренняя) – закон сохранения полной энергии (удельная теплота и удельная работа)

$$E = E_m + U = const; \quad dE = 0; \quad dU = dQ + dW;$$
$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_u = \sigma_u; \quad du = dq + dw; \tag{59}$$

баланс энтропии

$$dS = d_t S + d_i S; \quad d_r S = \frac{d_r Q}{T} \geq 0; \quad S = \int_V \rho s dV; \quad \frac{d_r S}{dt} = -\oint_\Omega \vec{J}_s \cdot d\vec{\Omega}; \quad \frac{d_i S}{dt} = \int_V \sigma_s dV \geq 0$$

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_s = \sigma_s \geq 0; \quad \vec{J}_s = \vec{J}_s^{\,0} - \rho s \vec{v}; \quad du = Tds - pdV; \quad d_r Q = TdS; \quad dq = Tds;$$

$$du = \sum_{i=1}^{n} \Gamma_i \, da_i; \quad a_i = \{T, p-, ...\}; \quad \Gamma_i = \{s, ...\}; \quad ds = \frac{1}{T} du - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\Gamma_i}{T} da_i \tag{60}$$

Второй закон термодинамики (закон возрастания энтропии) – теорема Карно-Клаузиуса

$$d_r S = \frac{d_r Q}{T} \geq 0; \tag{61}$$

Сохранение энергии и баланс внутренней энергии:

$$e = e_m + u = \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} \theta \omega^2 + \varphi + u; \quad \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_e^{\,0} = \sigma_e;$$
$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{J}_u + \rho u v) = \sigma_u = -\vec{\vec{P}} : \vec{\nabla} \vec{v} + 2\vec{\omega} \cdot \vec{\vec{P}}^{av} \geq 0; \quad \vec{J}_u = \vec{J}_q \tag{62}$$

баланс энтропии и производство энтропии:

$$\rho \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_q}{T} = -\frac{\vec{\vec{P}} : \vec{\nabla} \vec{v} - 2\vec{\omega} \cdot \vec{\vec{P}}^{av}}{T}; \quad \rho \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_s = \sigma_s;$$

$$\sigma_s = \sum_{k=1}^{n} A_k J_k + \vec{J}_q \cdot \vec{X}_q + \sum_{k=1}^{n} \vec{J}_k \cdot \vec{X}_k + p^v X_v + \vec{\vec{P}}^{av} : \vec{X}_v^s + \vec{\vec{P}}_0^{va} : \vec{X}_v^{sa} \geq 0; \tag{63}$$

$$\vec{X}_q = \vec{\nabla}(\frac{1}{T}); \quad \vec{X}_k = \frac{\vec{F}_k}{T}; \quad \vec{X}_v = -\frac{1}{T} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}; \quad \vec{X}_v^s = -\frac{1}{T} (\vec{\nabla} \vec{v})^s; \quad \vec{X}_v^{sa} = -\frac{1}{T} (\vec{\nabla} \times \vec{v} - 2\vec{\omega}).$$

7. Модели вязкоупругих элементов. Дифференциальные полиномы.

7.1. Двухэлементная схема Максвелла

Последовательное соединение элемента Гука и Ньютона $M = H \cap N$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{E} \dot{\sigma} + \frac{1}{\eta} \sigma;$$

7.2. Двухэлементная схема Фойгта-Кельвина

Параллельное соединение элемента Гука и Ньютона $VK = H \cup N$

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \dot{\varepsilon};$$

7.3. Трехэлементные стандартные схемы

Состоят из последовательно соединенных элемента Гука и схемы Фойгта-Кельвина $Sp = H \cap (H \cap N)$ или параллельно соединенных элемента Гука и схемы Максвелла $St = H \cup (H \cap N)$

$$Sp \quad \Rightarrow \quad \dot{\sigma} + \frac{E_1 + E_2}{\eta_2}\sigma = E_1\dot{\varepsilon} + \frac{E_1 E_2}{\eta_2}\varepsilon;$$

$$St \quad \Rightarrow \quad \dot{\sigma} + \frac{E_1}{\eta_2}\sigma = (E_1 + E_2)\dot{\varepsilon} + \frac{E_1 E_2}{\eta_2}\varepsilon;$$

7.4. Трехэлементные нестандартные схемы

Состоят из последовательно соединенных элемента Ньютона и схемы Максвелла $Np = N \cap (H \cap N)$ или параллельно соединённых элемента Гука и схемы Фойгта-Кельвина $Nt = N \cup (H \cup N)$

$$\dot{\sigma} + \frac{1}{\tau_\sigma}\sigma = E(\ddot{\varepsilon} + \frac{1}{\tau_\varepsilon}\dot{\varepsilon});$$

7.5. Четырехэлементные $M \cap K = M_1 \cap M_2 = H \cap (N \cup M_2) = N \cap (H \cup M_2)$

эквивалентные схемы

$$\ddot{\sigma} + (\frac{E_1}{\eta_2} + \frac{E_1}{\eta_3} + \frac{E_3}{\eta_3})\dot{\sigma} + \frac{E_1 E_3}{\eta_2 \eta_3}\sigma = E_1\ddot{\varepsilon} + \frac{E_1 E_3}{\eta_3}\dot{\varepsilon};$$

7.6. Обобщенная схема Фойгта

Состоит их последовательно соединенных схемы Максвелла и множества схем Фойгта

$$\varepsilon = C(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{\eta_1})H(t) + C\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{E_n}[1 - \exp\{-\frac{E_n}{\eta_n}t\}]H(t)$$

7.7. Обобщенная схема Максвелла

Состоит из последовательно соединенных схемы Фойгта и множества схем Максвелла

$$\sigma = KE_1 H(t) + K\eta_1\delta(t) + K\sum_{n=2}^{N} E_n \exp\{-\frac{E_n}{\eta_n}t\}H(t)$$

7.8. Модель Пойтинга-Томсона (нормальное тело)

Параллельное соединение модели Максвелла и элемента Гука $P = H \cup (H \cap N)$

$$\sigma + \frac{\eta}{E_2}\dot{\sigma} = E_1\varepsilon + \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_2}\dot{\varepsilon};$$

7.9. Модель Кельвина

Последовательное соединение элемента Гука и модели Фойгта $K = H \cap (H \cup N)$

$$\varepsilon + \frac{\eta}{E_2}\dot{\varepsilon} = \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2}\sigma + \frac{\eta}{E_1 E_2}\dot{\sigma};$$

Периодическая нагрузка

Периодическому процессу деформации $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \exp\{i\varpi t\}$ соответствует напряжение $\sigma(t) = \sigma_0 \exp\{i(\omega y + \varphi)\}$ при этом работа:

$$A = \int_0^t \sigma\, d\varepsilon; \qquad (64)$$

состоит из двух частей: первая – периодическая функция времени, т.е. полностью обратимая, а вторая – пропорциональна времени, следовательно необратимая. Величина необратимой работы в единицу времени – мощность диссипации равна:

$$D = \frac{1}{2}\omega\sigma_0\varepsilon_0 \sin\varphi; \quad \sigma_0 = \varepsilon_0 |E| = \varepsilon_0\sqrt{E_c^2 + E_s^2}; \quad tg\varphi = \frac{E_c}{E_s};$$

Вынужденные колебания

$$\ddot{u} + \omega_0^2(1-\Gamma)u = \omega_0^2 \exp\{ipt\}; \quad u_0 = [(\frac{E_c}{E} - \frac{p^2}{\omega_0^2})^2 + (\frac{E_s}{E})^2]; \quad tg\varphi = \frac{E_s}{E_c - E\dfrac{p^2}{\omega^2}};$$

смещения при этом есть:

$$u = u_0 \exp\{-ht\}\sin\omega t; \quad \omega = \omega_0\sqrt{\frac{|E| + E_c}{2E}}; \quad h = \omega_0\sqrt{\frac{|E| - E_c}{2E}}; \quad E = E_c + iE_s;$$

а составляющие комлексного модуля, зависящие от частоты даются выражениями:

$$E_c = E\frac{1+K_c}{(1+K_c)^2 + K_s^2}; \quad E_s = E\frac{K_s}{(1+K_c)^2 + K_s^2};$$

Накопление энергии

$$\mathrm{W} = \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t G_{ijkl}(s-\tau)de_{ij}(s)de_{kl}(\tau) = \left\{G_{ijkl}(s-\tau) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty G_{ijkl}^c(\omega)\cos\omega(s-\tau)d\omega\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty G_{ijk}^c[A_{ij}A_{kl} + B_{ij}B_{kl}]d\omega; \quad A_{ij} = \int_0^t \cos\omega s\, de_{ij}(s), \quad B_{ij} = \int_0^t \sin\omega s\, de_{ij}(s), \quad G_{ijkl}^c A_{ij}A_{kl} > 0$$

Все материальные функции и константы определяются экспериментально из «стандартной» системы опытов, которая включает: опыт на релаксацию $\varepsilon(t) = const = \varepsilon_0 \quad \Rightarrow \sigma(t)$, опыт на ползучесть $\sigma(t) = const = \sigma_0 \quad \Rightarrow \varepsilon(t, \sigma_0)$, опыт линейные деформирование $\sigma(t) = \dot{\sigma}_0 t \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(t, \dot{\sigma}_0)$ и нагружение $\varepsilon(t) = \dot{\varepsilon}_0 t \quad \Rightarrow \quad \sigma(t, \dot{\varepsilon}_0)$, циклическое деформирование $\varepsilon(t) = \varepsilon_a \sin\omega t \quad \Rightarrow \sigma(t, \omega, \varepsilon_a)$ и циклическое нагружение $\sigma(t) = \sigma_a \sin\omega t \quad \Rightarrow \varepsilon(t, \omega, \sigma_a)$.

Литература

1. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций.-М: Наука.-1966.- 752 с.
2. Работнов Ю.Н. Механика твердого деформируемого тела. –М.: Наука, -1979. -744 с.
3. Ильюшин А.А.. Механика сплошной среды. –М.: Изд-во Моск. ун-та. -1990. 310 с..
4. Ильюшин А.А., Победря Б.Е**.** Основы математической теории термовязко-упругости. – М.: Наука. -1970. -280 с.
5. Ильюшин А.А. Труды. Т.3. Теория термоупругости. Составители: Ильюшина Е.А., Тунгускова В.Г. М.: ФИЗМАТЛИТ.-2007.-288 с.
6. Бленд Д., Теория линейной вязко-упругости. М.: Мир, -1965. -200 с.
7. Фрейденталь А., Гейрингер **Х.,** Математические теории неупругой сплошной среды. -М.: Наука, -1962.-432 с..
8. Король Е.З. Термодинамические потенциалы и некоторые соотношения анизотропных сплошных сред. / Сб. Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемого твёрдых тел, посвящённого девяностолетию со дня рождения А.А. Ильюшина. Москва. 22-23 января 2001 года. М.: Изд-во Московского университета. -2011. -454 с. (с. 93-99).
9. Король Е.З. Новые методы операторного интегрирования обобщённых эйлеровых и бесселевых уравнений ($\mathrm{N} + 2\mathrm{M}$)-ого порядка. Проблемы машиностроения и надёжности машин. № 6, 2003.-С.8-21.

10. Кубо Р. Термодинамика. М.: Мир. 1970.-274 с.
11. Дьяртмати И. Неравновесная термодинамика. М.: Мир.-1974.- 304 с.
12. Кравчук А.С., Майборода В.П., Уржумцев Ю.С. Механика полимерных композиционных материалов. М.: Наука.-1985.-342 с.
13. Бугаков И.И. Ползучесть полимерных материалов. М.: Наука. -1973.- 287 с.