

Аннотация. В данной работе представлены численные и аналитические решения задачи о плоском деформировании прямоугольных панелей, подкреплённых рёбрами жёсткости. Проведено параметрическое исследование влияния степени включения рёбер, механических свойств материалов и геометрических размеров пластины на распределение действующих напряжений. Установлены поля напряжений и деформаций в подкреплённой панели по разработанной упрощённой методике. Результаты апробированы сравнением с аналогичными результатами из различных источников.

Ключевые слова: *оребрённые панели, напряжения и деформации пластин, численные методы, разностная прогонка, конечные разности*

Панели, подкреплённые продольными рёбрами жёсткости, используются как основные несущие элементы в авиационных, судостроительных, автомобильных и строительных конструкциях. При этом доминирующей нагрузкой на эти панели является их растяжение и сдвиг. В данной работе разработана простейшая модель подкреплённой панели, которая адекватно учитывает важнейшие особенности её деформации и позволяет провести параметрическое исследование. Естественно, что использовать полную систему уравнений теории упругости сложно и нецелесообразно. Поэтому в предлагаемой модели подкреплённой панели функции растяжения воспринимаются только рёбрами, а сдвиг - только полотном панели. Поэтому основной задачей является получение зависимости между усилиями в рёбрах N_j и усилиями в полотне панели S_j между рёбрами. Такое разделение достигается рядом гипотез. В дальнейшем воспользуемся обозначениями, принятыми в теории упругости $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy} \equiv \gamma$ линейные и сдвиговые деформации; $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \equiv \tau$ нормальные и касательные напряжения; E, G модули упругости первого и второго рода; u, v перемещения в направлениях x и y соответственно.

На рисунке 1 представлена схема нагружения пластины.

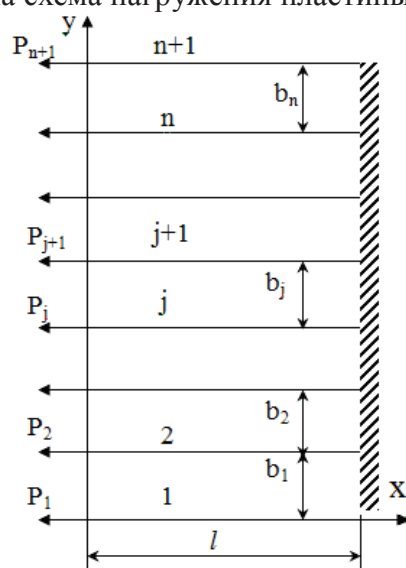


Рисунок 1. Схема нагружения

Здесь: $j = 1 \div n + 1$ - номера рёбер; участок пластины с номером j расположен между j и $j+1$ ребром; b_j, h_j - ширина и толщина пластины на j -ом участке; F_j - модуль упругости и

площадь поперечного сечения в j -ом ребре; P_j – произвольные продольные силы на концах рёбер.

Упомянутые выше гипотезы сводятся к следующему. Принимаем, что пластина не деформируется в поперечном направлении (вдоль оси y). В соответствии с этим:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

В связи с этим предполагаем также, что $v = 0$, т.е. рёбра при деформации не искривляются. Следующим шагом является предположение о том, что деформации сдвига полотна пластины γ не меняются по ширине на промежутке между двумя соседними рёбрами и являются только функциями продольной координаты x , т.е. $\gamma = \gamma(x)$.

Далее предполагается, что модуль упругости первого рода пластины равен нулю. И, наконец, считаем, что рёбра соединены с пластиной по своим центральным линиям.

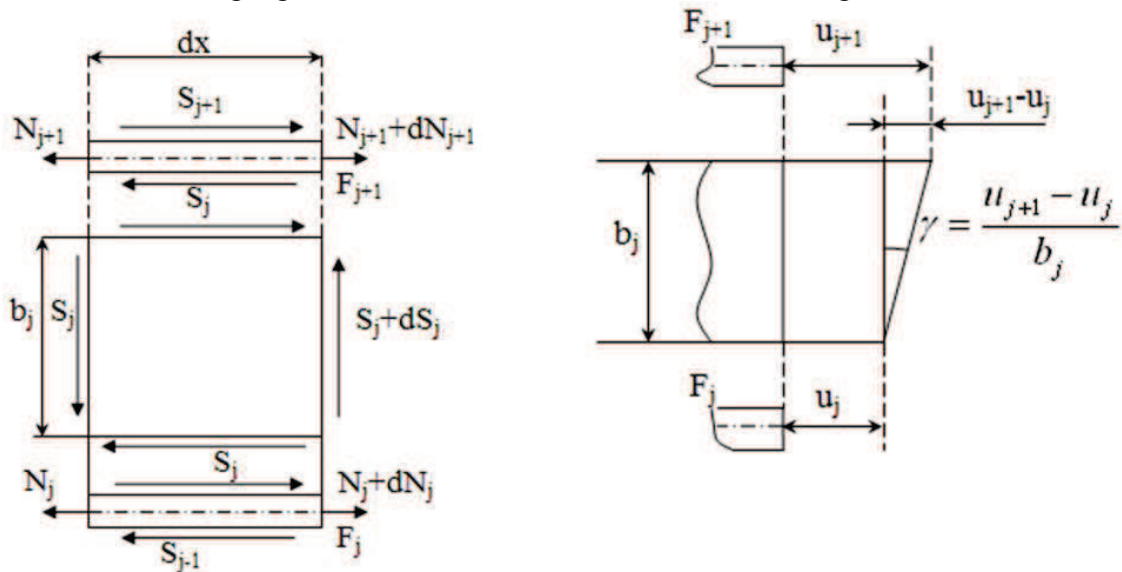


Рисунок 2. Расчётная схема

Схема силового взаимодействия пластины и рёбер при их совместной деформации представлена на рисунке 2.

На основании принятых гипотез соотношение Коши будет иметь вид:

$$\gamma(x) = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2)$$

Отсюда следует линейный закон распределения продольных перемещений и по ширине пластины между соседними рёбрами.

Интегрируя формулу (2) при неизменной деформации сдвига в произвольном поперечном сечении на j -том участке пластины, получим (рисунок 2):

$$\gamma_j(x) = \frac{u_{j+1} - u_j}{b_j} \quad (3)$$

Закон Гука для пластины и ребра, с учётом этой формулы, можно записать так:

$$S_j = G_j \gamma_j h_j = \frac{G_j h_j}{b_j} (u_{j+1} - u_j) ; j = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

$$N_j = E_j F_j \varepsilon_j = E_j F_j \frac{du_j}{dx} \quad (5)$$

где: S_j – погонные касательные усилия на j -ом участке пластины; N_j – продольные усилия в j -ом ребре; E_j – модуль упругости j -ого ребра; G_j – модуль сдвига на j -ом участке пластины; ϵ_{xj} – линейная деформация в j -ом ребре; γ_{xj} – угол сдвига на j -ом участке пластины.

Для вывода ключевых уравнений задачи используем принцип возможных перемещений Лагранжа. Согласно этому принципу вариация полной потенциальной энергии Π упругой системы должна быть равна нулю:

$$\delta\Pi = \delta U - \delta A = 0, \quad (6)$$

где: U , A – потенциалы деформации и внешних сил соответственно. Их вариации равны:

$$\delta A = -\sum_{j=1}^{n+1} P_j \delta u_j(0), \quad (7)$$

$$\delta U = \int_0^l \left\{ \sum_{j=1}^n \int_{y_j}^{y_{j+1}} S_j \delta \gamma_j dy + \sum_{j=1}^{n+1} N_j \delta \epsilon_j \right\} dx, \quad (8)$$

Вычисляя интегралы получаем:

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} S_j \delta \gamma_j dy = S_j \delta \gamma_j b_j = S_j (\delta u_{j+1} - \delta u_j), \quad (9)$$

$$\int_0^l N_j \delta \epsilon_j dx = \int_0^l N_j \delta \left(\frac{du_j}{dx} \right) dx = \int_0^l N_j \frac{d}{dx} (\delta u_j) dx = N_j \delta u_j \Big|_{x=0}^{x=l} - \int_0^l \frac{dN_j}{dx} \delta u_j dx. \quad (10)$$

Подставляя (9) и (10) в соотношение (8), а затем в (6), получаем:

$$\int_0^l \sum_{j=1}^{n+1} \left(-\frac{dN_j}{dx} - S_j + S_{j-1} \right) \delta u_j dx + \sum_{j=1}^{n+1} N_j(l) \delta u_j(l) + \sum_{j=1}^{n+1} [P_j - N_j(0)] \delta u_j(0) = 0, \quad (11)$$

где: $N_j(0)$, $N_j(l)$, $u_j(0)$, $u_j(l)$ – продольные усилия и перемещения на левом ($x=0$) и правом ($x=l$) конце j -го ребра.

После проведения всех необходимых операций окончательно получаем уравнения равновесия в виде:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dx} + S_1 = 0 \\ \frac{dN_j}{dx} = S_j - S_{j-1} \\ \frac{dN_{n+1}}{dx} - S_n = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Из внеинтегральных слагаемых уравнения (11) получаем граничные условия:

$$P_j - N_j(0) = 0; \quad u_j(l) = 0; \quad (j=1, 2, \dots, n+1), \quad (13)$$

Уравнение совместности деформаций в усилиях может быть записано следующим образом:

$$\frac{dS_j}{dx} = \frac{G_j h_j}{b_j} \left(\frac{N_{j+1}}{E_{j+1} F_{j+1}} - \frac{N_j}{E_j F_j} \right), \quad (j=1, 2, \dots, n). \quad (14)$$

После дифференцирования уравнений равновесия и подстановки в них уравнений совместности деформаций (14) получим ключевую систему уравнений в продольных усилиях:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{d^2 N_1}{dx^2} + \frac{G_1 h_1}{b_1} \left(\frac{N_2}{E_2 F_2} - \frac{N_1}{E_1 F_1} \right) = 0 \\ & \frac{d^2 N_j}{dx^2} + \frac{G_j h_j}{b_j} \left(\frac{N_{j+1}}{E_{j+1} F_{j+1}} - \frac{N_j}{E_j F_j} \right) - \frac{G_{j-1} h_{j-1}}{b_{j-1}} \left(\frac{N_j}{E_j F_j} - \frac{N_{j-1}}{E_{j-1} F_{j-1}} \right) = 0, \\ & \frac{d^2 N_{n+1}}{dx^2} - \frac{G_n h_n}{b_n} \left(\frac{N_{n+1}}{E_{n+1} F_{n+1}} - \frac{N_n}{E_n F_n} \right) = 0 \end{aligned} \right. \quad (15)$$

где: $j = 2, 3, \dots, n$

Граничные условия (13), выраженные через эти усилия, можно представить в следующем виде:

$$P_j - N_j(0) = 0, \quad \frac{dN_j}{dx} \Big|_{x=l} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n + 1). \quad (16)$$

В качестве тестовой задачи для апробации предложенной модели исследована простейшая ячейка панели, подкреплённой двумя рёбрами постоянного сечения (рисунок 3).

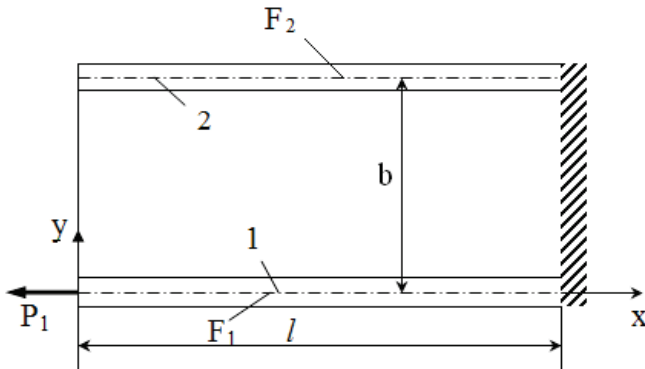


Рисунок 3. Расчётный пример

В этом простейшем случае усилия во втором ребре выражаются через усилия в первом алгебраически:

$$N_2 = P_1 - N_1. \quad (17)$$

С учётом этого система уравнений (15) сводится к единственному уравнению:

$$\frac{d^2 N_1}{dx^2} - \lambda^2 N_1 = -P \frac{Gh}{bE_2 F_2}; \quad (18)$$

где: $\lambda^2 = \frac{Gh}{b} \left(\frac{1}{E_1 F_1} + \frac{1}{E_2 F_2} \right).$

Это уравнение допускает как аналитическое, так и численное решение, причём последнее целесообразней всего применять в случае панели с рёбрами переменного сечения. Это решение позволяет получить нормальные и касательные усилия, а также напряжения от них.

Например, аналитическое решение при $E_1 = E_2$ может быть представлено в виде:

$$N_1 = P_1 \left(\frac{F_1}{F_1 + F_2} \right) \left[1 + \frac{F_2 ch\lambda(l-x)}{F_1 ch\lambda l} \right]; \quad N_2 = P_1 \left(\frac{F_1}{F_1 + F_2} \right) \left[1 - \frac{ch\lambda(l-x)}{ch\lambda l} \right]; \quad (19)$$

$$S_1 = P_1 \lambda \left(\frac{F_1}{F_1 + F_2} \right) \frac{sh\lambda(l-x)}{ch\lambda l}.$$

Напряжения будут выражаться так:

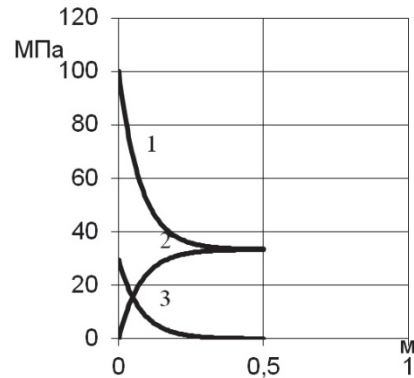


Рисунок 4

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1}, \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{F_2}, \quad \tau = \frac{S}{h}. \quad (20)$$

Для получения численного решения был применён метод конечных разностей.

На рисунке 4 представлены найденные функции нормальных напряжений (кривые 1, 2) в рёбрах и касательных напряжений (кривая 3) в пластине. Здесь материалы рёбер и пластины одинаковы, а площади поперечных сечений рёбер равны.

Параметрическое исследование этой элементарной ячейки показывает, что при варьировании геометрических размеров и механических характеристик рёбер и пластины принципиальных различий в характере распределения напряжений нет. Например, на рисунке 5 представлен расчётный случай с различными материалами рёбер, а на рисунке 6 – с различными сечениями.

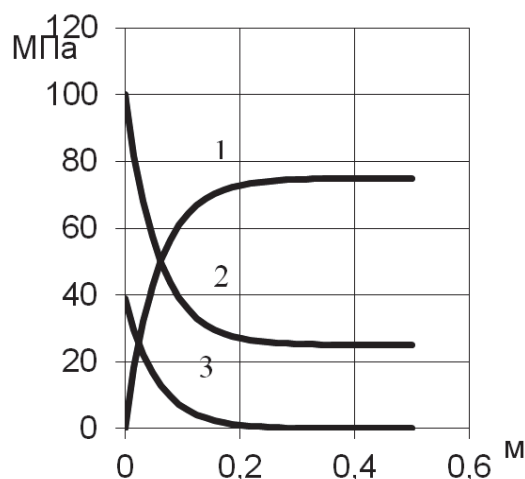


Рисунок 5

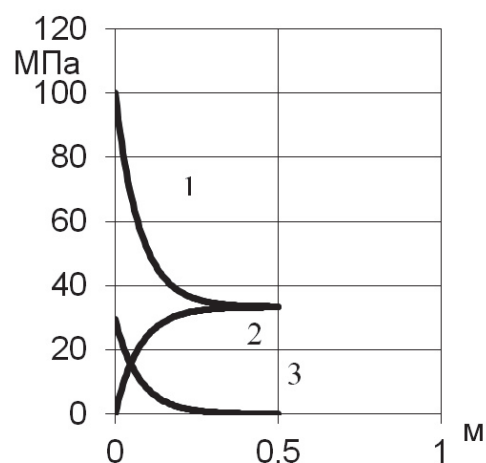


Рисунок 6

Рассмотрим один важный случай однородной пластины с двумя рёбрами из одинакового материала, площадь поперечного сечения которых изменяется по закону $F_1 = F_2 = (\alpha x + \beta)^2$, что соответствует линейному изменению поперечных размеров. В этом случае возможно аналитическое решение. Запишем дифференциальное уравнение усилий в нагруженном стрингере для этого случая.

$$\frac{d^2 N}{dx^2} - 2 \cdot \psi \cdot \frac{1}{(\alpha x + \beta)^2} \cdot N = \frac{-P \cdot \psi}{(\alpha x + \beta)^2}, \quad (21)$$

или

$$(\alpha x + \beta)^2 \frac{d^2 N}{dx^2} - 2 \cdot \psi \cdot N = -P \psi, \quad (22)$$

где: $\psi = \frac{G \cdot h}{E \cdot b}$.

Линейное уравнение (22) с переменными коэффициентами представляет собой уравнение Эйлера. Уравнение такого типа удаётся свести к уравнению с постоянными коэффициентами путём замены независимого переменного: $\alpha x + \beta = \exp(t)$ т.е. $t = \ln(\alpha x + \beta)$

Учитывая, что $(\alpha x + \beta)^2 \frac{d^2 N}{dx^2} = \alpha^2 \left(\frac{d^2 N}{dt^2} - \frac{dN}{dt} \right)$ после преобразований получим:

$$\frac{d^2 N}{dt^2} - \frac{dN}{dt} - 2\psi^* N = -P\psi^*, \quad (23)$$

где: $\Psi^* = \frac{\Psi}{\alpha^2}$;

Общее решение уравнения (23) можно записать в виде:

$$N(t) = \exp\left(\frac{t}{2}\right) (C_1 \exp(\omega t) + C_2 \exp(-\omega t)) + \frac{P}{2}; \quad \omega = \frac{\sqrt{8\Psi^* + 1}}{2}.$$

После обратной замены $t = \ln(\alpha x + \beta)$ получим:

$$N(x) = (\alpha x + \beta)^{\frac{1}{2}} (C_1 (\alpha x + \beta)^\omega + C_2 (\alpha x + \beta)^{-\omega}) + \frac{P}{2}. \quad (24)$$

Касательные усилия S в пластине найдём, продифференцировав выражение (24) по x :

$$S(x) = -(\alpha x + \beta)^{\frac{1}{2}} \left(\left(\frac{1}{2} + \omega \right) C_1 (\alpha x + \beta)^\omega + \left(\frac{1}{2} - \omega \right) C_2 (\alpha x + \beta)^{-\omega} \right). \quad (25)$$

Неопределённые константы интегрирования определяются из граничных условий. Например, для случая, изображённого на рисунке 7, граничные условия имеют вид:

$$N(0) = P, \quad \frac{dN(l)}{dx} = 0.$$

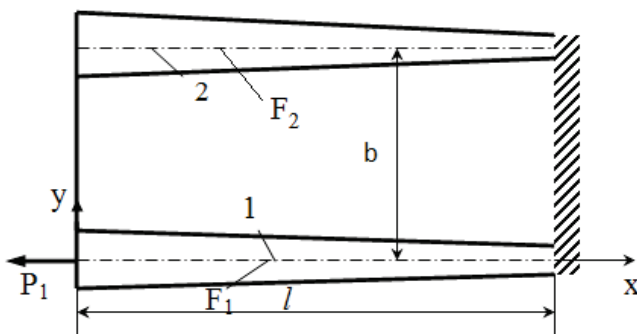


Рисунок 7

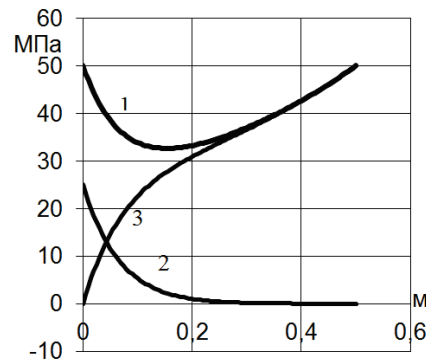


Рисунок 8

Соответствующее решение задачи представлено на рисунке 8.

Выводы

1. Установлены поля напряжений и деформаций в ребрённой панели по разработанной упрощённой модели. Результаты апробированы сравнением с аналогичными результатами из различных источников.
2. Исследованные в работе особенности напряжённо-деформированного состояния подкреплённых панелей способствует более чёткому представлению о распределении силовых функций между несущими элементами, а количественная оценка - правильному назначению жёсткостных параметров.
3. Полученные данные в результате проведенного расчета панели с пятью рёбрами позволяют обобщить характер распределения напряжения в элементарной ячейке на случай пластины со многими рёбрами.

Литература

1. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. - М.: Машиностроение 1980.
2. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. - М.: Наука 1967.