

Течение жидкости в цилиндрическом пористом каркасе с учетом интерактивных сил типа Дарси и фронтального напора

Фасхеев И.О.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
8-910-456-34-57, fiomsu@mail.ru

Аннотация. В статье приводятся постановка и численное решение задачи о стационарном протекании сжимаемой жидкости сквозь твердый деформируемый пористый цилиндрический слой из несжимаемого материала с учетом интерактивных сил типа Дарси и фронтального напора.

Ключевые слова: пористые наполненные среды, интерактивные силы, межфазные взаимодействия

Введение

В развитие классических моделей [1-3] предложена модель [4], учитывающая материальные межфазные взаимодействия [5] и различные режимы движения жидкости и каркаса [6]. На основании модели [4] в работе [7] была получена модель, учитывающая произвольные движения жидкости и малые перемещения точек твердого каркаса.

Постановка задачи

Рассмотрим плоскую осесимметричную задачу о стационарном течении сжимаемой жидкости в цилиндрическом пористом слое (с внутренним радиусом a и внешним радиусом b) при отсутствии внешних массовых сил. Жидкость поступает из внутреннего полого цилиндра в пористый слой и вытекает наружу; при этом будем считать, что мы умеем регулировать входную скорость жидкости v_{inc} . Будем считать, что внутренний цилиндр закреплен от перемещений. Введем стандартную цилиндрическую систему координат и будем считать, что в силу симметрии задачи все функции будут зависеть только от радиуса r (единственными нетривиальными компонентами вектора перемещений и вектора скорости будут компоненты $u = \mathbf{u}_r$ и $v = \mathbf{v}_r$ соответственно). Для описания движения воспользуемся моделью [7].

Примем ряд упрощений: отсутствие эффективных вязкостей жидкой фазы ($\lambda_f = 0, \mu_f = 0$); малость перемещений и градиентов перемещений каркаса; пористость m будем считать постоянной.

Также будем считать, что из интерактивных сил [6,7] действуют только сила типа Дарси и сила фронтального напора, взятые, соответственно, в виде $\mathbf{f}_D = d_0 \mathbf{v}_f$, и в виде $\mathbf{f}_f = c_0 |\mathbf{v}_f| \cdot \mathbf{v}_f$ (где d_0, c_0 — известные константы, \mathbf{v}_f — скорость жидкости). Связь между истинным давлением в порах p_p и истинной плотностью жидкости ρ_{fm} примем линейной.

С учетом этих предположений большинство скалярных уравнений модели [7] выполнится тождественно ($0 \equiv 0$). Остальные уравнения для рассматриваемого стационарного движения жидкости примут вид:

$$\frac{d\sigma_{rr}^s}{dr} + \frac{\sigma_{rr}^s - \sigma_{\theta\theta}^s}{r} + d_0 v + c_0 v^2 = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d\sigma_{rr}^f}{dr} - d_0 v - c_0 v^2 = \rho_{fm} m v \frac{dv}{dr}, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dr} (m \rho_{fm} r v) = 0, \quad (3)$$

$$\sigma_{rr}^s = -(1-m)p_p + \lambda_s \left(\frac{u}{r} + \frac{du}{dr} \right) + 2\mu_s \frac{du}{dr}, \quad (4)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^s = -(1-m)p_p + \lambda_s \left(\frac{u}{r} + \frac{du}{dr} \right) + 2\mu_s \frac{u}{r}, \quad (5)$$

$$\sigma_{zz}^s = -(1-m)p_p + \lambda_s \left(\frac{u}{r} + \frac{du}{dr} \right), \quad (6)$$

$$\sigma_{rr}^f = \sigma_{\theta\theta}^f = \sigma_{zz}^f = -mp_p, \quad (7)$$

$$p_p = p_0 + c_{fm}(\rho_{fm} - \rho_{fm0}), \quad (8)$$

где неизвестными функциями являются: компоненты эффективных тензоров напряжений каркаса и жидкости $\sigma_{rr}^s, \sigma_{\theta\theta}^s, \sigma_{zz}^s, \sigma_{rr}^f, \sigma_{\theta\theta}^f, \sigma_{zz}^f$; ненулевая компонента вектора скорости жидкости v , ненулевая компонента вектора перемещения точек каркаса u , истинное давление в порах p_p , истинная плотность жидкости ρ_{fm} .

Коэффициенты сил Дарси d_0 и силы фронтального напора c_0 , эффективные характеристики упругого каркаса λ_s, μ_s , пористость m , характеристики связи давления и истинной плотности жидкости p_0, ρ_{fm}, c_{fm} считаются известными константами.

Таким образом, получаем систему из десяти уравнений на десять неизвестных.

Примем следующие граничные условия:

$$u(a) = 0, \quad v(a) = \frac{v_{inc}}{m}, \quad \sigma_{rr}^s(b) = -(1-m)p_b, \quad p_p(b) = p_b. \quad (9)$$

Первое граничное условие означает закрепление внутренней (входной) границы каркаса, второе — увеличение входной скорости обратно пропорционально пористости каркаса; третье и четвертое — силовые условия на внешней (выходной) границе.

Выражая уравнения системы (1) - (8) через переменные u и v приходим к системе двух дифференциальных уравнений на три неизвестные u, v, c_1 :

$$c_1 c_{fm} \left(\frac{1}{rv^2} \frac{dv}{dr} + \frac{1}{r^2 v} \right) - d_0 v - c_0 v^2 = \frac{c_1}{r} \left(\frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} \right), \quad (10)$$

$$c_1 c_{fm} \frac{1-m}{m} \left(\frac{1}{rv^2} \frac{dv}{dr} + \frac{1}{r^2 v} \right) + \frac{2\mu_s}{r} \left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \right) + (\lambda_s + 2\mu_s) \left(\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} \right) + d_0 v + c_0 v^2 = 0. \quad (11)$$

Константа c_1 характеризует расход жидкости:

$$m \rho_{fm} v = \frac{c_1}{r}. \quad (12)$$

Для приведения системы (10) - (11) к безразмерному виду возьмем следующие величины:

$$[a] = m, \quad [\rho_{fm} a^3] = \kappa \rho, \quad \left[\frac{a}{v_{inc}} \right] = c. \quad (13)$$

Безразмерные аналоги соответствующих размерных величин будем помечать знаком тильда.

После приведения к безразмерному виду система (10) - (11) примет вид:

$$m \tilde{c}_1 \tilde{c}_{fm} \left(\frac{1}{\tilde{r} \tilde{v}^2} \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2 \tilde{v}} \right) - \tilde{d}_0 \tilde{v} - \tilde{c}_0 \tilde{v}^2 = \frac{\tilde{c}_1}{m \tilde{r}} \left(\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{r}} + \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}} \right), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{c}_1 \tilde{c}_{\text{fm}} (1-m) \left(\frac{1}{\tilde{r} \tilde{v}^2} \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2 \tilde{v}} \right) + \frac{2\tilde{\mu}_s}{\tilde{r}} \left(\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{r}} - \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}} \right) + \\ & + (\tilde{\lambda}_s + 2\tilde{\mu}_s) \left(\frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{r}} - \frac{1}{\tilde{r}^2} \tilde{u} \right) + \frac{\tilde{d}_0}{m} \tilde{v} + \frac{\tilde{c}_0}{m^2} \tilde{v}^2 = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Граничные условия примут вид:

$$\tilde{u}(1) = 0, \quad \tilde{v}(1) = \frac{\tilde{v}_{\text{inc}}}{m}, \quad \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{r}}(\tilde{b}) = 0, \quad \tilde{p}_p(\tilde{b}) = \tilde{p}_b. \quad (16)$$

Третье граничное условие (16) получено из третьего граничного условия в (9) и уравнения (4).

Четвертое граничное условие из (16) (при заданном втором условии) регулирует величину расхода жидкости. В ряде практических задач требуется обеспечить заданный расход жидкости. В этом случае вместо граничных условий (16) следует использовать условия:

$$\tilde{u}(1) = 0, \quad \tilde{v}(1) = \frac{\tilde{v}_{\text{inc}}}{m}, \quad \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{r}}(\tilde{b}) = 0, \quad \tilde{c}_1 = \tilde{c}_1^*. \quad (17)$$

Тем самым выходное давление в четвертом граничном условии (16) определится из решения задачи.

Решение задачи

Для численного решения системы (14)-(15) возьмем следующие размерные величины, качественно соответствующие протеканию воды сквозь песчаный каркас [8]:

$$\begin{aligned} c_{\text{fm}} &= 2.55 \cdot 10^6 \frac{\text{M}^2}{\text{c}^2}, \quad v_{\text{inc}} = 0.1 \frac{\text{M}}{\text{c}}, \quad m = \frac{1}{40}, \quad a = 1 \text{ M}, \quad b = 3 \text{ M}, \quad \rho_{\text{fm}0} = 1000 \frac{\text{KГ}}{\text{M}^3}, \\ \lambda_s + 2\mu_s &= 12 \cdot 10^9 \frac{\text{H}}{\text{M}^2}, \quad p_0 = 10^5 \frac{\text{H}}{\text{M}^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Для коэффициентов интерактивных сил возьмем последовательно две пары значений: $(\tilde{c}_0, \tilde{d}_0) = \{(10; 1), (10; 100)\}$.

Вязкость воды μ при нормальных условиях имеет порядок $10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$. За характерный размер пор d возьмем величину $d = \sqrt{\frac{\mu m}{d_0}}$ [2, 10]. Тогда для числа Рейнольдса $\text{Re} = \frac{\rho_{\text{fm}} v d}{\mu}$ получим оценку Re порядка $10 - 10^3$.

Согласно таблице влияния интерактивных сил [6] основной “силовой” вклад будут вносить силы типа Дарси и фронтального напора.

При помощи программного пакета Maple для параметров (18) численно решим систему (14)-(15) с условиями (17) (задав значение $\tilde{c}_1^* = 1.003$).

Графики основных величин (для двух пар значений (c_0, d_0)): скорости жидкости \tilde{v} , перемещения точек каркаса \tilde{u} , истинного давления в порах \tilde{p}_0 , истинного значения плотности жидкости $\tilde{\rho}_{\text{fm}}$ в зависимости от \tilde{r} представлены на рисунках 1 а)-г) (пунктирной линией построен график для случая (10, 100), а сплошной — для случая (10, 1)).

График 1а показывает, что скорость течения жидкости на границе проникновения в пористый каркас выше скорости на выходе (в силу постоянства расхода и увеличения площади поверхности цилиндра при увеличении радиуса).

График 1б показывает, что перемещения точек каркаса возрастают от входа к выходу (в силу наличия интерактивных сил), причем увеличение коэффициента силы Дарси влечет увеличение перепада. Также на рисунке видно, что в точке $\tilde{r} = \tilde{b}$ графики имеют нулевую производную по \tilde{r} , что согласуется с третьим граничным условием в (17).

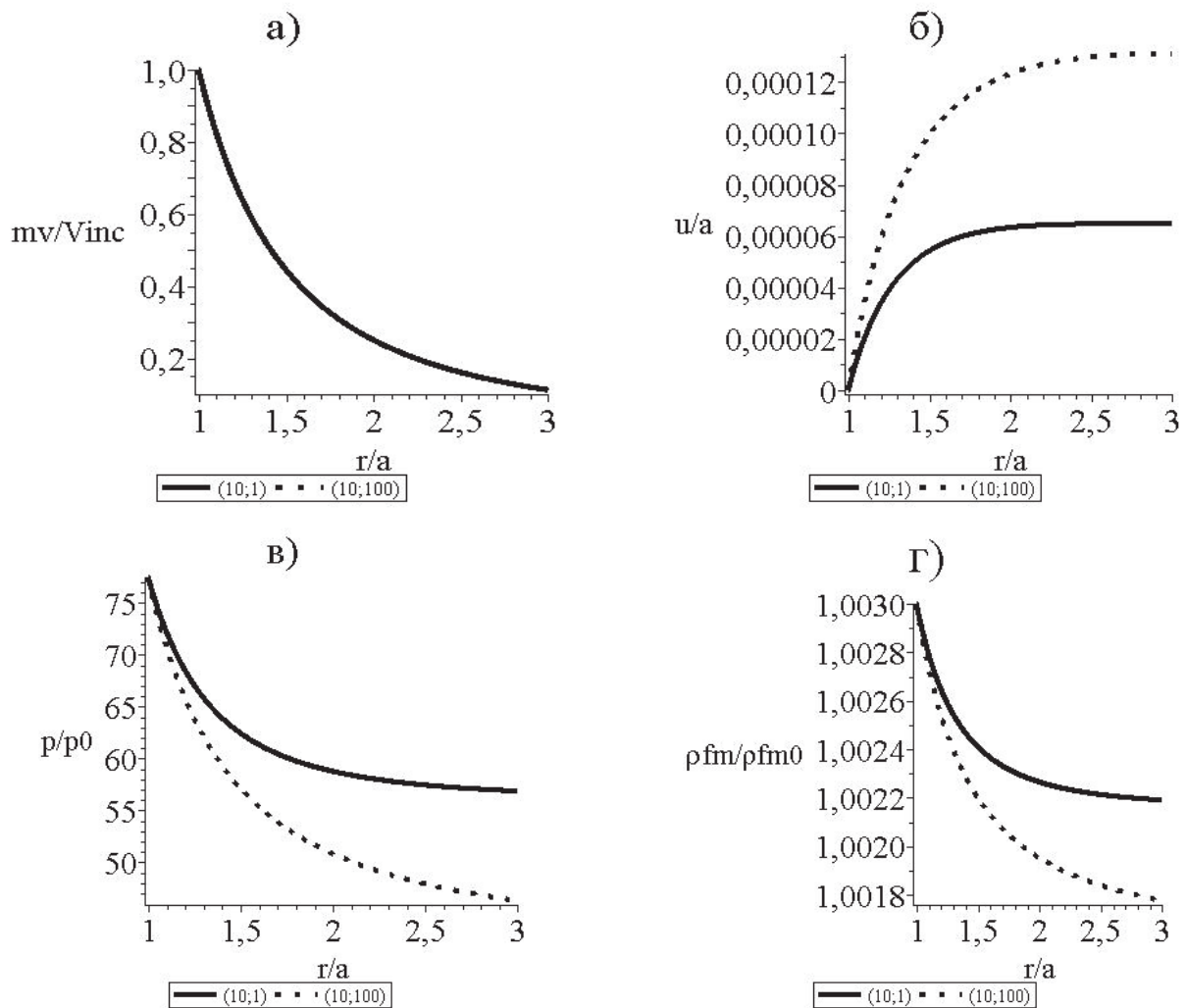


Рисунок 1. График (а) скорости течения жидкости; (б) перемещения точек каркаса; (в) истинного давления в порах; (г) истинной плотности жидкости

Истинное давление и истинная плотность жидкости на входе выше своих выходных значений (рисунки 1в и 1г, соответственно), причем увеличение коэффициента силы Дарси также влечет увеличение перепада величин.

Заключение

Полученные численные решения согласуются с механическим смыслом параметров, входящих в задачу. Как видно из входных и выходных значений всех величин, увеличение коэффициента Дарси вызывает увеличение перепада значений от входа к выходу, что соответствует его механическому смыслу (этот коэффициент характеризует “фильтрационные” свойства интерактивных сил).

Литература

1. Biot M.A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media // J. Appl. Phys. 1962. 33, N 4. 1482-1498.
2. Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы. М., 1964.
3. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970.
4. Бровко Г.Л. Модель неоднородной жидкогазонаполненной среды с деформируемым твердым каркасом // Вестник МГУ. Математика, механика. 1998. N 5. С 45-52.
5. Бровко Г.Л. Принцип материальной независимости от системы отсчета и структуры ин-

- терактивных взаимодействий в гетерогенных средах // Известия ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 2005. 11. Вып. 2. Механика. С 21-29.
6. Бровко Г.Л. Вопросы инвариантности в классических и неклассических моделях сплошных сред // Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 95-летию со дня рождения А.А. Ильюшина (Москва, 19-20 января 2006 года) / Под ред. И.А. Кийко, Р.А. Васина, Г.Л. Бровко. М.: ЛЕНАНД, 2006. С 110-123.
 7. Гришаев А.Г. К моделированию свойств наполненных пористых сред // Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 95-летию со дня рождения А.А. Ильюшина (Москва, 19-20 января 2006 года) / Под ред. И.А. Кийко, Р.А. Васина, Г.Л. Бровко. М.: ЛЕНАНД, 2006. 124-129.
 8. Coussy O. Poromechanics. Chichester, West Sussex: John Wiley and Sons Ltd, 2004.
 9. Фасхеев И.О. Одномерное течение жидкости сквозь пористый каркас с учетом интерактивных сил типа Дарси и фронтального напора. Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 2012. № 6. С 62-66.
 10. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах, 1984.