3. ГОСТ Р 50820-95. Оборудование газоочистное и пылеулавливающее. Метод определения запыленности газопылевых потоков.
4. Справочник по пыле- и золоулавливанию. Под общей ред. А.А.Русанова. М.: Энергоатомиздат, 1983 – 312 с.
5. Вальдберг А.Ю., Николайкина Н.Е. Процессы и аппараты защиты окружающей среды. Защита атмосферы. – М.: Дрофа, 2008. – 239 с.
6. Вальдберг А.Ю., Исянов Л.М., Яламов Ю.И.Теоретические основы охраны атмосферного воздуха от загрязнения промышленными аэрозолями.–С-Пб, МП «НИИОГАЗ-ФИЛЬТР» - СПб ГТУ РП, 1993. – 235с.
7. Вальдберг А.Ю., Голубева М.В., Хуторов Ю.Ф., Горецкий Р.С. Исследование элемента мультициклона // Химическое и нефтегазовое машиностроение, № 7, 2012. – С. 6.

Асимптотики решений дифференциального уравнения с вырождением

к. ф.-м. н. доцент Кузнецов В.В., к.ф.-м. н. доцент Кузнецова Н.А.*
НИУ «Высшая школа экономики»,
**Государственный университет по землеустройству*
kuznetsovanata@gmail.com

Аннотация. В статье рассматривается возможность применения асимптотического метода Вентцеля - Крамерса - Бриллюэна (ВКБ) решения обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной для построения и оценки решений одного класса вырождающихся обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих большой числовой параметр.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение, вырождение, асимптотические представления*

Исследование вырождающихся эллиптических уравнений приводит к необходимости изучения свойств решений обыкновенных вырождающихся дифференциальных уравнений с вещественными параметрами. Ряд свойств таких решений был установлен в работах [1,3]. Дальнейшее продвижение в указанном направлении требует более тонких методов для исследования свойств решений граничных задач вблизи поверхности вырождения. Основой такого подхода могут стать асимптотические методы. Целью настоящей работы является изучение свойств решений обыкновенного сильно вырождающегося дифференциального уравнения второго порядка, содержащего большой числовой параметр на основе не связанного со специфическими свойствами гильбертовых пространств подхода, в основу которого положен асимптотический метод ВКБ.

Рассмотрим вырождающееся обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\alpha^2(t)y''(t)-(-1)^j\big(b(t)+ikf(t)\alpha(t)\big)y'(t)-k^2c(t)y(t)=0, \quad j=0,1, \quad t\in(0,\delta), \tag{1}$$

содержащее большой числовой параметр $k\in R_1^+$.

Предположим, что коэффициенты уравнения удовлетворяют следующим условиям:

$$\alpha(t)\in C^4(0,\infty); \quad b(t),\ f(t)\in C^3(0,\infty); \quad c(t)\in C^2(0,\infty); \tag{2}$$

$$c(t)-\frac{1}{4}f^2(t)>0; \qquad b(0)=1; \tag{3}$$

$$\alpha(0)=\alpha'(0)=0, \quad \alpha(t)>0 \text{ при } t>0; \quad \alpha(t)=\alpha_0 \text{ при } t\ge\delta>0\,. \tag{4}$$

Предположим также, что существуют $t_0\in(0,\delta)$ и $N>1$ такие, что

$$\alpha(t)\in C^{N+1}(0,t_0), \quad \alpha^{(N)}(0)\ne 0. \tag{5}$$

Докажем, что при выполнении сформулированных условий, при $t\in(0,\delta)$ существует достаточно большое число $k_0>0$ такое, что при $k\ge k_0$ рассматриваемое уравнение имеет два линейно независимых решения $y_{n\,j}(t)$, $n=1{,}2$, $j=0{,}1$. Для этих решений и их производных первого порядка получим следующие асимптотические представления

$$y_{n\,j}(t)=y^0_{n\,j}(t,k)(1+\varepsilon_{n\,j}(t,k))\,. \tag{6}$$

$$y'_{n\,j}(t)=y^0_{n\,j}(t,k)P_{n\,j}(t,k)(1+\varepsilon^*_{n\,j}(t,k))\,. \tag{7}$$

где

$$y^0_{n\,j}(t,k)=Q_j^{-\frac{1}{4}}(\tau,k)\exp\left\{\int_0^\tau\left(\left(-1\right)^{j+1}\frac{1}{2}\beta_j(\tilde\tau,k)+\left(-1\right)^{n+1}\sqrt{Q_j(\tilde\tau,k)}\right)d\tilde\tau\right\}, \tag{8}$$

$$P_{nj}(t,k)=\alpha^{-1}(t)[(-1)^{j+1}\frac{1}{2}\beta_j(\tau,k)+(-1)^{n+1}Q_j^{\frac{1}{2}}(\tau,k)-\frac{1}{4}Q_j^{-1}(\tau,k)Q'_j(\tau,k)]\,. \tag{9}$$

$$\tau=\tau_\delta(t)=\int_\delta^t\alpha^{-1}(\rho)d\rho, \ \tau\in(-\infty,0). \tag{10}$$

Функции $\beta_j(\tau(t),k)$ и $Q_j(\tau(t),k)$ выражаются через коэффициенты исследуемого уравнения:

$$\beta_j(\tau(t),k)=\left(b(t)+ikf(t)\alpha(t)\right)\alpha^{-1}(t)-\left(-1\right)^j\alpha'(t), \tag{11}$$

$$Q_j(\tau(t),k)=\frac{1}{4}\beta_j^2(\tau,k)+k^2c(t)+\left(-1\right)^j\frac{1}{2}\beta'_{j\tau}(\tau,k). \tag{12}$$

Для функции $\varepsilon(t,k)$ и $\varepsilon^*(t,k)$, также получим асимптотические представления при $t\in(0,\delta)$ и достаточно большом k.

При доказательстве полученных асимптотических представлений и оценок использовался асимптотический метод ВКБ [2]. С целью обоснования применимости этого метода к вырождающемуся обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка (1) рассмотрим уравнение

$$z''(t)-Q(t)z(t)=0, \quad t\in(a,b). \tag{13}$$

Функция $Q(t)$ удовлетворяет условиям:

$$Q(t)\in C^2((a,b)), \qquad Q(t)\ne 0 \qquad \text{при} \quad t\in(a,b);. \tag{14}$$

$$Q^{\frac{1}{2}}(t) \in C^2((a,b)), \qquad \operatorname{Re} Q(t) \geq 0 \quad \text{при} \quad t \in (a,b). \tag{15}$$

$$\rho(h_n,t) = \left| \int_{h_n}^{t} |\alpha_1(t)| dt \right| < \infty \quad \text{при} \quad t \in (a,b), \quad h_n = \left[\begin{array}{ll} a, & n=1 \\ b, & n=2 \end{array} \right., \tag{16}$$

$$\text{где } \alpha_1(t) = \frac{1}{8} Q''_{tt}(t) Q^{\frac{-3}{2}}(t) - \frac{5}{32} (Q'_t(t))^2 Q^{\frac{-5}{2}}(t). \tag{17}$$

В [2] установлено существование и единственность решений $V_1^n(t)$ и $V_2^n(t)$, $n = 1,2,\ t \in (a,b)$, систем интегральных уравнений

$$\begin{cases} V_1^1(t) = 1 + \int_a^t \alpha_1(\xi)\left[V_1^1(\xi) + V_2^1(\xi)\right] d\xi, \\ V_2^1(t) = -\int_a^t \exp\left\{ 2\int_t^{\xi} Q^{\frac{1}{2}}(\zeta) d\zeta \right\} \alpha_1(\xi)\left[V_1^1(\xi) + V_2^1(\xi)\right] d\xi, \end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases} V_1^2(t) = -\int_t^b \exp\left\{ -2\int_t^{\xi} Q^{\frac{1}{2}}(\zeta) d\zeta \right\} \alpha_1(\xi)\left[V_1^2(\xi) + V_2^2(\xi)\right] d\xi, \\ V_2^2(t) = 1 - \int_t^b \alpha_1(\xi)\left[V_1^2(\xi) + V_2^2(\xi)\right] d\xi, \end{cases} \tag{19}$$

для которых справедливы оценки

$$\left|V_1^1(t) - 1\right| \leq \exp\{2\rho(a,t)\} - 1, \qquad \left|V_2^1(t)\right| \leq \exp\{2\rho(a,t)\} - 1, \tag{20}$$

$$\left|V_1^2(t)\right| \leq \exp\{2\rho(b,t)\} - 1, \qquad \left|V_2^2(t) - 1\right| \leq \exp\{2\rho(b,t)\} - 1, \tag{21}$$

$$\left|V_1^n(t) + V_2^n(t)\right| < \infty, \quad n = 1,2. \tag{22}$$

Лемма 1. При выполнении условий $(14)-(16)$ для решений $z_n(t)$, $n = 1,2$, уравнения (13) и их производных справедливы асимптотические представления

$$z_n(t) = z_n^0(t)(1 + \varepsilon_n(t)), \tag{23}$$

$$z_n'(t) = z_n^0(t)\left[(-1)^{n+1} Q^{\frac{1}{2}}(t) - \frac{1}{4} Q'(t) Q^{-1}(t) \right](1 + \varepsilon_n^0(t)), \tag{24}$$

$$z_n^0(t) = Q^{\frac{-1}{4}}(t) \exp\left\{ (-1)^{n+1} \int_{t_0}^{t} Q^{\frac{1}{2}}(\xi) d\xi \right\}, \quad t_0 \in (a,b) \tag{25}$$

$$\varepsilon_n(t) = V_1^n(t) + V_2^n(t) - 1, \tag{26}$$

$$\varepsilon_1^0(t) = A^{-1}(t)\left(Q^{\frac{1}{2}}(t)\left[V_1^1(t) - V_2^1(t) - 1\right] - \frac{1}{4}Q^{-1}(t)Q_t'(t)\left[V_1^1(t) + V_2^1(t) - 1\right]\right), \tag{27}$$

$$\varepsilon_2^0(t) = B^{-1}(1)\left(Q^{\frac{1}{2}}(t)\left[V_2^2(t) - V_1^2(t) - 1\right] + \frac{1}{4}Q^{-1}(t)Q_t'(t)\left[V_2^2(t) + V_1^2(t) - 1\right]\right), \tag{28}$$

где $A(t) = Q^{\frac{1}{2}}(t) - \frac{1}{4}Q^{-1}(t)Q_t'(t)$, $B(t) = Q^{\frac{1}{2}}(t) + \frac{1}{4}Q^{-1}(t)Q_t'(t)$, а функции $V_1^n(t)$ и $V_2^n(t)$, $n = 1{,}2$, являются решениями систем интегральных уравнений (18) и (19) соответственно.

Следствие 1. Для функций $\varepsilon_n(t)$ и $\varepsilon_n^0(t), n = 1{,}2,$ справедливы оценки

$$\left|\varepsilon_n(t)\right| \le c\left(\exp\left\{2\rho\left(h_n, t\right)\right\} - 1\right), \tag{29}$$

$$\left|\varepsilon_n^0(t)\right| \le c\left(\left|Q^{\frac{1}{2}}(t)M^{-1}(t)\right| + \left|\frac{1}{4}Q_t'(t)Q^{-1}(t)M^{-1}(t)\right|\right)\left(\exp\left\{2\rho\left(h_n, t\right)\right\} - 1\right), \tag{30}$$

где $M(t) = Q^{\frac{1}{2}}(t) + (-1)^n Q_t'(t)Q^{-1}(t)$.

Доказательство. Справедливость оценок (29) – (30) вытекает из представлений (26) – (28) и оценок (20) – (22).

Замена независимой переменой $t \in (0, \delta)$ по формуле:

$$\tau = \tau(t) = \int_\delta^t \alpha^{-1}(\rho)d\rho,\ \tau \in (-\infty, 0), \tag{31}$$

приводит уравнение (1) к виду:

$$x''(\tau) + (-1)^j \beta_j(\tau, k)x'(\tau) - k^2 c(\psi(\tau))x(\tau) = 0, \quad j = 0{,}1, \tag{32}$$

где $t = \psi(\tau)$ функция обратная к монотонной функции $\tau = \tau(t)$,

$$x(\tau) = y(\psi(\tau)), \tag{33}$$

$$\beta_j(\tau, k) == \alpha^{-1}(\psi(\tau))\left[b(\psi(\tau)) + ikf(\psi(\tau))\alpha(\psi(\tau))\right] - (-1)^{-j}\alpha_t'(\psi(\tau)). \tag{34}$$

Замена искомой функции $x(\tau)$ по формуле:

$$x(\tau) = \exp\left\{(-1)^{j+1}\frac{1}{2}\int_0^\tau \beta_j(\xi, k)d\xi\right\}z(\tau) \tag{35}$$

приводит уравнение (32) к виду:

$$z''(\tau) - Q_j(\tau, k)z(\tau) = 0, \quad \tau \in (-\infty, 0), \quad j = 0{,}1, \tag{36}$$

где

$$Q_j(\tau, k) = \frac{1}{4}\beta_j^2(\tau, k) + k^2 c(\psi(\tau)) + (-1)^j \frac{1}{2}\beta_{j\tau}'(\tau).. \tag{37}$$

Лемма 2. При выполнении условий (2)-(4) на коэффициенты уравнения (1) и $k \ge k_0 > 0$, k_0-достаточно велико, функция $Q_j(\tau, k)$, $j = 0{,}1$, $\tau \in (-\infty, 0)$, удовлетворяет требованиям (14)-(16).

Доказательство. Представление (37) с использованием выражения (34) преобразуем к виду:

$$Q_j(\tau,k)=k^2\left(c(\psi(\tau))-\frac{1}{4}f^2(\psi(\tau))\right)+\frac{1}{4}b^2(\psi(\tau))\alpha^{-2}(\psi(\tau))+$$
$$+O(\alpha^{-1}(\psi(\tau)))+i(k\alpha^{-1}(\psi(\tau))2b(\psi(\tau))f(\psi(\tau))+O(k)). \qquad (38)$$

Из полученного представления и условий (3) следует принадлежность функции $Q_j(\tau,k)$, $j=0,1$, пространству $C^2(-\infty,0)$, и отличие от нуля при $\tau\in(-\infty,0)$ и $k\ge k_0>0$, k_0 – достаточно велико. Таким образом, функция $Q_j(\tau,k)$, $j=0,1$, удовлетворяет условию (14).

В качестве ветви $Q_j^{\frac{1}{2}}(\tau,k)$ рассмотрим функцию $Q_j^{\frac{1}{2}}(\tau,k)=|Q_j(\tau,k)|^{\frac{1}{2}}\exp\left\{\frac{1}{2}\arg Q_j(\tau,k)\right\}$, $\arg Q_j(\tau,k)\in(-\pi,\pi)$. Из представления (38) вытекает, что при $k\ge k_0>0$, k_0 - достаточно велико, $\mathrm{Re}\,Q_j(\tau,k)>0$, $j=0,1$, и, следовательно, $\arg Q_j(\tau,k)\in\left(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, $j=0,1$. Поэтому $\arg Q_j^{\frac{1}{2}}(\tau,k)\in\left(\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$, $j=0,1$ и $\frac{\sqrt{2}}{2}<\mathrm{Re}\,Q_j^{\frac{1}{2}}(\tau,k)<1$, $j=0,1$, при $k\ge k_0>0$, что доказывает справедливость условия (15) для функции $Q_j(\tau,k)$.

Для доказательства условия (16) получим оценки функций, входящих в представление (17). Из условий (3) и представления (38) при $\tau\in(-\infty,0)$ и $k\ge k_0>0$, k_0 – достаточно велико, имеем

$$\left|\mathrm{Re}\,Q_j(\tau,k)\right|\le c\left|k^2\left[c(\psi(\tau))-\frac{1}{4}f^2(\psi(\tau))\right]+\alpha^{-2}(\psi(\tau))\right|\le\bar{c}\left(\alpha^{-1}(\psi(\tau))+k\right)^2, \qquad (39)$$

$$\left|\mathrm{Re}\,Q_j(\tau,k)\right|\ge c^{-1}\left|k^2\left[c(\psi(\tau))-\frac{1}{4}f^2(\psi(\tau))\right]+\alpha^{-2}(\psi(\tau))\right|\ge \underline{c}\left(\alpha^{-1}(\psi(\tau))+k\right)^2, \qquad (40)$$

$$\underline{c}\,k\alpha^{-1}(\psi(\tau))\le\left|\mathrm{Im}\,Q_j(\tau,k)\right|\le\bar{c}k\alpha^{-1}(\psi(\tau)), \qquad (41)$$

$$c_0^{-1}\left(\alpha^{-1}(\psi(\tau))+k\right)^2\le\left|\mathrm{Re}\,Q_j(\tau,k)\right|\le\left|Q_j(\tau,k)\right|\le\left|\mathrm{Re}\,Q_j(\tau,k)\right|+\left|\mathrm{Im}\,Q_j(\tau,k)\right|\le c_0\left(\alpha^{-1}(\psi(\tau))+k\right)^2 \qquad (42)$$

Следовательно, имеет место эквивалентность

$$\left|Q_j(\tau,k)\right|\sim\left(\alpha^{-1}(\psi(\tau))+k\right)^2. \qquad (43)$$

Из представления (34) с учетом условия (3) легко получить оценки на функцию $\beta_j(\tau,k)$ и ее производные при $\tau\in(-\infty,0)$ и $k\ge k_0>0$

$$\left|\beta_j(\tau,k)\right|\le c\left(\alpha^{-1}(\psi(\tau))+k\right), \qquad (44)$$

$$\left|\beta_j'(\tau,k)\right| \le c\left(\alpha^{\frac{-1}{2}}(\psi(\tau)) + k\alpha(\psi(\tau))\right) \le c\left(\alpha^{-1}(\psi(\tau)) + k\right), \tag{45}$$

$$\left|\beta_j''(\tau,k)\right| \le c\left(1 + k\alpha^{\frac{3}{2}}(\psi(\tau))\right). \tag{46}$$

Из условий (2) при $\tau \in (-\infty, 0)$ и $k \ge k_0 > 0$ следуют оценки

$$\left|c_\tau'(\psi(\tau))\right| = \left|c_t'(\psi(\tau))\alpha(\psi(\tau))\right| \le c\alpha(\psi(\tau)), \tag{47}$$

$$\left|c_{\tau\tau}''(\psi(\tau))\right| = \left|\left[c_{tt}''(\psi(\tau))\alpha(\psi(\tau)) + c_t'(\psi(\tau))\alpha_t'(\psi(\tau))\right]\alpha(\psi(\tau))\right| < c\alpha(\psi(\tau)). \tag{48}$$

Представление (37) и полученные оценки (44)-(48) позволяют оценить производные функции $Q_j(\tau,k)$

$$\begin{aligned} \left|Q_{j\tau}'(\tau,k)\right| &= \left|\frac{1}{2}\beta_j'(\tau,k)\beta_j(\tau,k) + k^2 c'(\psi(\tau)) + (-1)^j \frac{1}{2}\beta_j''(\tau,k)\right| \le \\ &\le c\left(\alpha^{\frac{-3}{2}}(\psi(\tau)) + k\alpha^{\frac{-1}{2}}(\psi(\tau)) + k^2\alpha(\psi(\tau))\right) \le c\left(\alpha^{-1}(\psi(\tau)) + k\right)^2 \alpha(\psi(\tau)), \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} \left|Q_{j\tau\tau}''(\tau,k)\right| &= \left|\frac{1}{2}\beta_j''(\tau,k)\beta_j(\tau,k) + \frac{1}{2}\left(\beta_j'(\tau,k)\right)^2 + k^2 c''(\psi(\tau)) + (-1)^j \beta_j'''(\tau,k)\right| \le \\ &\le c\left(\alpha^{-1}(\psi(\tau)) + k + k^2\alpha(\psi(\tau))\right) \le c\left(\alpha^{-1}(\psi(\tau)) + k\right)^2 \alpha(\psi(\tau)). \end{aligned} \tag{50}$$

Используя представления (17) при $Q(t) = Q_j(\tau,k)$ и оценки (49) и (50), оценим функцию $\alpha_{1j}(\tau)$ следующим образом:

$$\left|\alpha_{1j}(\tau)\right| = c\left|\frac{\alpha(\psi(\tau))(1 + \alpha(\psi(\tau)))}{\left(\alpha^{-1}(\psi(\tau)) + k\right)}\right| \le c\frac{\alpha(\psi(\tau))}{\alpha^{-1}(\psi(\tau)) + k}. \tag{51}$$

Полученная оценка позволяет проверить выполнение условия (16) при $\tau \in (-\infty, 0)$. Пусть $n = 1$, тогда $h_1 = -\infty$ и справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \rho(-\infty,\tau) &= \left|\int_{-\infty}^{\tau}\left|\alpha_{1j}(\xi)\right|d\xi\right| \le c\int_{-\infty}^{\tau}\frac{\alpha(\psi(\xi))}{\alpha^{-1}(\psi(\xi)) + k}d\xi = \frac{c}{k}\int_{-\infty}^{\tau}\frac{\alpha^2(\psi(\xi))}{k^{-1} + \alpha(\psi(\xi))}d\xi = \\ &= \frac{c}{k}\int_0^t \frac{\alpha(\xi)}{k^{-1} + \alpha(\xi)}d\xi\bigg|_{t=\psi(\tau)} \le \frac{c}{k}\int_0^t d\xi\bigg|_{t=\psi(\tau)} = ctk^{-1}\Big|_{t=\psi(\tau)} < \infty. \end{aligned} \tag{52}$$

При $n = 2$, $h = 0$ справедливы соотношения:

$$\rho(0,\tau) = \left|\int_0^{\tau}\left|\alpha_{1j}(\xi)\right|d\xi\right| \le \left|c\frac{1}{k}\int_t^{\delta}\frac{\alpha(\xi)d\xi}{k^{-1} + \alpha(\xi)}\right|\Bigg|_{t=\psi(\tau)} \le \frac{c}{k}\int_t^{\delta}d\xi\bigg|_{t=\psi(\tau)} = c(t-\delta)k^{-1}\Big|_{t=\psi(\tau)}. \tag{53}$$

Следствие 2. При выполнении условий (2)-(4), $\tau \in (-\infty, 0)$ и $k \ge k_0 > 0$, k_0 достаточно велико, уравнение (36) имеет два линейно независимых решения $z_{1j}(\tau)$ и $z_{2j}(\tau)$, $j=0,1$, для которых справедливы асимптотические представления:

$$z_{nj}(\tau)=z_{nj}^{0}(\tau)\left(1+\bar{\varepsilon}_{nj}(\tau,k)\right), \tag{54}$$

$$z_{nj}'(\tau)=z_{nj}^{0}(\tau,k)\left[(-1)^{n+1}Q_j^{\frac{1}{2}}(\tau,k)-\frac{1}{4}Q_j'(\tau,k)Q_j^{-1}(\tau,k)\right]\left(1+\varepsilon_{nj}^{0}(\tau,k)\right), \tag{55}$$

где

$$z_{nj}^{0}(\tau,k)=Q_j^{\frac{-1}{4}}(\tau,k)\exp\left\{(-1)^{n+1}\int_0^\tau Q_j^{\frac{1}{2}}(\xi,k)d\xi\right\}, \tag{56}$$

$$\bar{\varepsilon}_{nj}(\tau,k)=V_1^n(\tau)+V_2^n(\tau)-1, \tag{57}$$

$$\varepsilon_{1j}^{0}(\tau,k)=A_j^{-1}(\tau,k)\left(Q_j^{\frac{1}{2}}(\tau,k)\left[V_1^1(\tau)-V_2^1(\tau)-1\right]-\frac{1}{4}Q_j^{-1}(\tau,k)Q_{j\tau}'(\tau,k)\left[V_1^1(\tau)+V_2^1(\tau)-1\right]\right), \tag{58}$$

$$\varepsilon_{2j}^{0}(\tau,k)=B_j^{-1}(\tau,k)\left(Q_j^{\frac{1}{2}}(\tau,k)\left[V_2^2(\tau)-V_1^2(\tau)-1\right]+\frac{1}{4}Q_j^{-1}(\tau,k)Q_{j\tau}'(\tau,k)\left[V_2^2(\tau)+V_1^2(\tau)-1\right]\right), \tag{59}$$

$$A_j(\tau,k)=Q_j^{\frac{1}{2}}(\tau,k)-\frac{1}{4}Q_j^{-1}(\tau,k)Q_j'(\tau,k),\ B_j(\tau,k)=Q_j^{\frac{1}{2}}(\tau,k)+\frac{1}{4}Q_j^{-1}(\tau,k)Q_j'(\tau,k),$$

функции $V_1^n(\tau)$ и $V_2^n(\tau)$, $n=1,2$, являются решениями систем интегральных уравнений (18) при $a=-\infty$ и (19) при $b=0$ соответственно.

Теорема. Пусть выполнены условия (2)-(4), тогда при $t\in(0,\delta)$ и $k\ge k_0>0$, k_0 - достаточно велико, уравнение (1) имеет два линейно независимых решения $y_{nj}(t)$, $n=1,2$, $j=0,1$, для которых справедливы асимптотические представления (6) и (7), где

$$\varepsilon_{nj}(t,k)=V_1^n(\tau)+V_2^n(\tau)-1,\quad \tau=\tau_\delta(t), \tag{60}$$

$$\varepsilon_{1j}^{*}(t,k)=\left[V_1^1(\tau)+V_2^1(\tau)-1-G_{1j}(\tau,k)V_2^1(\tau)\right]_{\tau=\tau_\delta(t)}, \tag{61}$$

$$\varepsilon_{2j}^{*}(t,k)=\left[V_1^2(\tau)+V_2^2(\tau)-1-G_{2j}(\tau,k)V_1^2(\tau)\right]_{\tau=\tau_\delta(t)}, \tag{62}$$

$$G_{nj}(\tau,k)=2Q_j^{\frac{1}{2}}(\tau,k)\Big/\left((-1)^{j+1}\frac{1}{2}\beta_j(\tau,k)+(-1)^{n+1}Q_j^{\frac{1}{2}}(\tau,k)-\frac{1}{4}Q_j^{-1}(\tau,k)Q_j'(\tau,k)\right). \tag{63}$$

Доказательство. Асимптотическое представление (6) непосредственно следует из (33), (35) и (54). Действительно,

$$y_{nj}(t)=x_{nj}(\tau(t))=\exp\left\{(-1)^{j+1}\frac{1}{2}\int_0^\tau\beta_j(\xi,k)d\xi\right\}z_{nj}(\tau)\Big|_{\tau=\tau(t)}= \tag{64}$$

$$= \exp\left\{(-1)^{j+1}\frac{1}{2}\int_0^\tau \beta_j(\xi,k)d\xi\right\} z_{nj}^0(\tau,k)\left(1+\bar{\varepsilon}_{nj}(\tau,k)\right)\Big|_{\tau=\tau(t)} =$$
$$= y_{nj}^0(t,k)\left(1+\varepsilon_{nj}(t,k)\right),$$

где

$$\varepsilon_{nj}(t,k) = \bar{\varepsilon}_{nj}(\tau(t),k) = \bar{\varepsilon}_{nj}(\tau,k) = V_1^n(\tau) + V_2^n(\tau) - 1,$$

а функции $y_{nj}^0(t,k)$, $n = 1{,}2$, $j = 0{,}1$, определены в (8).

Дифференцирование выражения (33) с учетом (8), (54), (55), (58), (59) приводит к следующим представлениям функций: $y'_{1j}(t)$ и $y'_{2j}(t)$, $j = 0{,}1$,

$$y'_{1j}(t) = \frac{\partial y_{1j}}{\partial t} = \frac{\partial x_{1j}}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial \tau}{\partial t} =$$
$$= \alpha^{-1}(t)\exp\left\{(-1)^{j+1}\frac{1}{2}\int_0^\tau \beta_j(\xi,k)d\xi\right\}\left((-1)^{j+1}\frac{1}{2}\beta_j(\tau,k)z_{1j}(\tau) + z'_{1j}(\tau)\right)\Big|_{\tau=\tau(t)} =$$
$$= \alpha^{-1}(t)\exp\left\{(-1)^{j+1}\frac{1}{2}\int_0^\tau \beta_j(\xi,k)d\xi\right\}\left\{(-1)^{j+1}\frac{1}{2}\beta_j(\tau,k)z_{1j}^0(\tau,k)\left(1+\bar{\varepsilon}_{1j}(\tau,k)\right)\right.$$
$$\left. + z_{1j}^0(\tau,k)\left(Q_j^{\frac{1}{2}}(\tau,k) - \frac{1}{4}Q_j^{-1}(\tau,k)Q'_j(\tau,k)\right)\left(1+\varepsilon_{1j}^0(\tau,k)\right)\right\}\Big|_{\tau=\tau(t)} =$$
$$= \alpha^{-1}(t)y_{1j}^0(t,k)\left\{(-1)^{j+1}\frac{1}{2}\beta_j(\tau,k)\left(V_1^1(\tau)+V_2^1(\tau)\right) + \left(Q_j^{\frac{1}{2}}(\tau,k) - \frac{1}{4}Q_j^{-1}(\tau,k)Q'_j(\tau,k\right) + \right. \tag{65}$$
$$\left. + \left(Q_j^{\frac{1}{2}}(\tau,k)\left(V_1^1(\tau)-1-V_2^1(\tau)\right) - \frac{1}{4}Q_j^{-1}(\tau,k)Q'_j(\tau,k)\left(V_1^1(\tau)-1+V_2^1(\tau)\right)\right)\right\}\Big|_{\tau=\tau(t)} =$$
$$= \alpha^{-1}(t)y_{1j}^0(t,k)\left\{\left((-1)^{j+1}\frac{1}{2}\beta_j(\tau,k) + Q_j^{\frac{1}{2}}(\tau,k) - \frac{1}{4}Q_j^{-1}(\tau,k)Q'_j(\tau,k)\right)\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left(1+\left(V_1^1(\tau)-1+V_2^1(\tau)\right) - G_{1j}(\tau,k)V_2^1(\tau)\right)\right\}\Big|_{\tau=\tau(t)}$$

Далее используются представления (9), (10), (61), (63) позволяющие преобразовать полученное выражение к следующему виду:

$$y'_{1j}(t) = y_{1j}^0(t,k)P_{1j}(t,k)\left(1+\left(V_1^1(\tau)-1+V_2^1(\tau)\right) - G_{1j}(\tau,k)V_2^1(\tau)\right)\Big|_{\tau=\tau(t)} =$$
$$= y_{1j}^0(t,k)P_{1j}(t,k)(1+\varepsilon_{1j}^*(t,k)) \tag{66}$$

Аналогичным образом выводится представление производной $y'_{2j}(t)$

$$y'_{2j}(t) = y_{2j}^0(t,k)P_{2j}(t,k)\left(1+\left(V_1^2(\tau)+V_2^2(\tau)-1\right) - G_{2j}(\tau,k)V_1^2(\tau)\right)\Big|_{\tau=\tau(t)} =$$
$$= y_{2j}^0(t,k)P_{2j}(t,k)(1+\varepsilon_{2j}^*(t,k)). \tag{67}$$

Полученные представления (64), (66), (67) доказывают утверждения теоремы.

Выводы. В статье доказана возможность использования асимптотического метода ВКБ для исследования вырождающегося дифференциального уравнения второго порядка, получены асимптотические представления решений и их производных первого порядка.

Литература

1. Глушко В. П. Оценка в L2 и разрешимость общих граничных задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка // Тр. Моск. Мат. о-ва. -1970. — Т. 187, 23. — С. 113—178.
2. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1980. -352с.
3. Кузнецов В.В., Кузнецова Н.А. Существование и априорная оценка решения задачи Дирихле для вырождающегося уравнения с параметром //Ученые записки Российского государственного социального университета, 2012. Т.103. №3. С. 170-174.

Программно-алгоритмический комплекс для обучения управлению процессами синтеза фуллереновой сажи

Петров Д.Н., д.т.н. проф. Чистякова Т.Б., д.х.н. проф. Чарыков Н.А.
Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет)
8(812)494-92-25

Аннотация. В работе рассматривается синтез обучающей системы, позволяющей повысить эффективность обучения операторов процессов производства наноструктурированных углеродных материалов, представлены результаты научных исследований процессов синтеза фуллереновой сажи, на базе которых разработана модель функционирования реактора фуллереновой сажи, структура библиотеки математических моделей, разработан программный комплекс тренажёра процесса синтеза фуллереновой сажи для обучения операторов управлению процессами производства фуллеренов.

Ключевые слова: Автоматизированное обучение, процесс синтеза фуллереновой сажи, библиотека математических моделей, наноиндустрия

К факторам, оказывающим влияние на характеристики целевого компонента наряду с технологическими, организационными, относится человеческий фактор. От уровня подготовки, опыта, квалификации специалиста зависит степень риска поломки оборудования, порчи сырья, а также качество целевого компонента. Чтобы на ход сложного технологического процесса человеческий фактор оказывал минимальное влияние, операторы, специалисты, следящие за состоянием оборудования, качеством целевого компонента, режимами работы установок, проходят курс обучения, скомпонованный под требования конкретного предприятия по производству наноструктурированных углеродных материалов. В итоге человек обретает знания, полученные из электронных учебных пособий, лекций, видеоматериалов, презентаций в теоретическом курсе обучения и первоначальный опыт по управлению высокотехнологичным сложным процессом с использованием модели процесса синтеза фуллереновой сажи и тренажёра, созданного программными средствами.

Предлагаемый вид обучения исключает риск поломки функционирующего реактора, порчи сырьевых компонентов [1]. Обучающие системы подобного рода вводятся на процессах, которые характеризуются высокими требованиями к качеству целевых продуктов, сложностью в управлении.

Фуллерены – аллотропная модификация углерода. Уникальные физико-химические свойства, такие как оптическая нелинейность, малая ширина запрещённой зоны (~1.5 эВ), поляризуемость, позволяют использовать соединения фуллерена в радиотехнической промышленности для производства фоторезисторов, оптических затворов [2, 3]. Различные производные фуллеренов показали себя эффективными средствами в лечении вируса иммунодефицита человека: белок, ответственный за проникновение вируса в кровяные клетки –