Гораздо эффективнее использование градирни, в которой охлаждаемая вода непосредственно контактирует с воздухом, увлажняя его и охлаждаясь не только за счет передачи теплоты воздуху, но и за счет частичного испарения. Воздух в градирню подают с помощью вентиляторов. Унос воды составляет примерно 0,001 от ее расхода. Температура охлаждаемой воды на выходе из градирни оказывается в зависимости от влажности воздуха на 4-5 градусов ниже температуры воздуха, входящего в систему. Это увеличивает температурный перепад на предыдущей ступени, где вода является охлаждающим агентом.

Мощность вентиляторов при использовании градирен по данным изготовителей составляет примерно 0,01 от тепловой нагрузки и с ростом q возрастает линейно. Для контакта с воздухом в градирне нельзя использовать воду, прошедшую химводоочистку или дистиллированную воду в силу их дороговизны, так как эту воду приходится постоянно пополнять из-за уноса.

Выводы

При расчете теплообменных систем нужно учитывать условия их термодинамической реализуемости и выбирать водяные эквиваленты и гидравлические сопротивления для каждого из потоков с учетом затрат энергии на их реализацию. Системы охлаждения суперкомпьютеров требуют значительных затрат мощности на последней ступени передачи теплоты окружающему воздуху. Экономия может быть достигнута только за счет перехода к «влажному» охлаждению.

Другим способом, позволяющим резко сократить затраты энергии на охлаждение, является переход на второй ступени от воздушного охлаждения к водяному, используя холодную воду из артезианской скважины или водоема больших размеров.

Литература

1. Кухлинг Х. Справочник по физике.: Пер. с нем. 2-е изд. – М.: Мир, 1985. - 520с., ил., с. 466-468.
2. Цирлин А.М. Необратимые оценки предельных возможностей термодинамических и микроэкономических систем. М.; Наука, 2003. 349с.
3. Цирлин А.М., Ахременков А.А., Григоревский И.Н. Минимальная необратимость, оптимальное распределение поверхности и тепловой нагрузки теплообменных систем // Теоретические основы химической технологии, т.42, №1, 2008, с.1—8.
4. Кухлинг Х. Справочник по физике.: Пер. С нем. 2-е изд. – М.: Мир, 1985. - 520с., ил., с. 466—468.
5. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям./ под ред.М.О. Штейнберга – М.: машиностроение, 1992.
6. Пригожин И., Кондепуди Д. Современная термодинамика. М.: Мир, 2002.

Параметрический синтез оптимального регулятора на основе вариационного исчисления для общей математической модели объекта

к.т.н. доц. Полянский В.П.
Университет машиностроения
8(499)267-07-82

Аннотация. В статье рассматривается параметрический синтез оптимального регулятора на основе вариационного исчисления при условии, что математическая модель объекта представляется дифференциальным уравнением в в операторной форме с левой и правой частями в виде алгебраических полиномов относительной переменной $p = d/dt$. В такой же форме представляется математическая модель регулятора. На этой основе получена система уравнений Эйлера-

Пуассона для экстремальной вариационной задачи. После приравнивания коэффициентов полиномов оптимальной задачи и полиномов, полученных из исходных уравнений объекта и регулятора, получим настройки заданной структуры регулятора.

Ключевые слова: оптимизация, математическая модель, уравнение Эйлера, функция Лагранжа, параметры настроек регулятора.

Пусть математическая модель объекта регулирования описывается дифференциальным уравнением в операторной форме с правой частью, заданной номиналом переменной $p = \frac{d}{dt}$

$$\overbrace{\left(p^n + d_{n-1}p^{n-1} + ... + d_1 p + d_0\right)}^{d(p)} y = \overbrace{\left(b_x p^x + b^{x-1} + ... + b_1 p + b0\right)}^{b(p)} \quad (1)$$

при этом n>x; $d(p)y = b(p)u$;

Математическую модель регулятора также возьмем в общем виде следующим образом.

$$\overbrace{\left(g_{x-1}p^{x-1} + ... + g_1 p + g_0\right)}^{g(p)} u = \overbrace{\left(r_1 + r_2 p + ... + r_n p^{n-1}\right)}^{r(p)} \quad (2)$$

$$g(p)u = r(p)y$$

В качестве функционала качества примем интегрально-квадратический критерий в обобщенном виде с учетом ограничения на затраты энергии на управления в виде

$$J = \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^{\gamma} q_{ii} y^{(i-1)2} + u^2 \right) dt \quad (3)$$

Требуется определить такую структуру регулятора (2) и такие настройки r_j, что функционал (3) принял минимальное значение.

Структура регулятора задана значениями r_j не равными нулю или нулевыми значениями или близкими значениями к нулю.

Для решения задачи оптимизации [1] т.е. нахождения переходного процесса от возмущения в виде неравенства нулю начальных условий $y(0) = y_{10}$; $y`(0) = y_{20}$; … $y^{(n)}(0) = y_{n0}$, с учетом краевых условий характеризующих асимптотическую устойчивость.

$$y(t \to \infty) = y`(t \to \infty) = ... = y^{(n)}(t \to \infty) = 0$$

Далее введем в рассмотрение функции Лагранжа [2]. Поскольку ограничения в данном случае представляет собой дифференциальное уравнение: $d(p)y = b(p)u$, то вместо множителя Лагранжа λ в функцию Лагранжа должна входить переменная Лагранжа $\lambda(t)$. Тогда функция Лагранжа выглядит следующим образом:

$$L = \sum_{i=1}^{\gamma} q_{ii} y^{(i-1)2} + u^2 + \lambda(t)\left[d(p)^y - b(p)^u\right] \quad (4)$$

Составим уравнение Эйлера-Пуассона для функционала L(y,u) от двух функций y(t) и u(t) и получим систему двух уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y`} + ... + (-1)^\beta \frac{d}{dt^\beta}\frac{\partial L}{\partial y^{(\beta)}} = d(-p)\lambda + 2q(p^2)y = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial u`} + ... + (-1)^\alpha \frac{d}{dt^\alpha}\frac{\partial L}{\partial u^{(\alpha)}} = 2u - b(-p)\lambda = 0$$

где $q(p^2)=\sum_{i=1}^{\gamma} q_{ii} p^{(i-1)2}(-1)^{i-1}$.

Исключая из этих уравнений переменные u и λ, получаем уравнение для экстремалей вариационной задачи.

$$\left[d(p)d(-p)+b(p)b(-p)q(p^2)\right]y=0 \tag{5}$$

Характеристический полином

$$\Delta(p)=d(p)d(-p)+b(p)b(-p)q(p^2), \tag{6}$$

является уравнением степени 2β, $\beta=\max n,\{(\gamma+x-1)\}$.

Пусть для простоты $x+\gamma-1\le n$. Это полином четных степеней P и его можно представить в факторизованном виде:

$$\Delta(p)=\overline{\delta(p)}\,\overline{\delta(-p)}, \tag{7}$$

где $\overline{\delta(p)}$ – полином степени β, содержащий корни полинома $\Delta(p)$ с отрицательной вещественной частью.

С другой стороны характеристический полином замкнутой АСР имеет вид:

$$D(p)=d(p)q(p)+b(p)r(p)\,. \tag{8}$$

Составляем тождества $\overline{\delta(p)}=D(p)$ и сравниваем в этом тождестве коэффициенты при одинаковых степенях P получаем уравнения для определения искомых настроек регулятора.

Пример:

Модель объекта регулирования.

$$(p^2+a_1p+d_0)y=(b_0+b_1p)u\,. \tag{9}$$

Модель регулятора

$$(g_1p+g_0)u=(r_1+r_2p)y\,. \tag{10}$$

Критерий оптимальности

$$J=\int_0^{\infty}\left(q_{11}y^2+u^2\right)dt$$

Составим функцию Лагранжа

$$L=q_{11}y^2+u^2+\lambda(t)\left[\left(p_2-d_1p+d_0\right)y-\left(b_0+b_1p\right)u\right]$$

или

$$L=q_{11}y^2+u^2+\lambda(t)\left(y``+d_1y`+d_0y-b_0u-b_1u`\right)$$

Составим уравнение Эйлера-Пуассона

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial y}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial y`},+\dfrac{d^2}{dt^2}\dfrac{\partial L}{\partial y``}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial y``}=0\end{cases} \tag{11}$$

Запишем функцию Лагранжа в критерии оптимизации:

$$J = \int_0^\infty \left[q_{11} y^2 + u^2 + \lambda(t)\left(y`` + d_1 y` + d_0 y - b_0 u - b_1 u \right) \right] dt \tag{12}$$

В соответствии с уравнениями Эйлера-Пуассона построим производные:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial y} = 2q_{11} y + \lambda(t) d_0 \\ &\frac{\partial L}{\partial y`} = \lambda(t) d_1 \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y`} = \lambda`(t) d_1 \\ &\frac{\partial L}{\partial y`} = \lambda(t) \\ &\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial y``} = \lambda``(t) \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial u} = 2u - b_0 \lambda_0(t) \\ &\frac{\partial L}{\partial u`} = -b_1 \lambda(t) \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial u`} = -b_1 \lambda`(t) \end{aligned} \tag{14}$$

Подставив производные (13) и (14) в уравнение (11), получим:

$$\begin{cases} 2q_{11} y(t) + \lambda(t) d_0 - \lambda`(t) d_1 + \lambda``(t) = 0 \\ 2u - b_0 \lambda(t) + b_1 \lambda`(t) = 0 \end{cases} \tag{15}$$

Преобразуем систему уравнений к операторному виду с переменной $p = \frac{d}{dt}$. В результате найдем:

$$\begin{cases} (p^2 - d_1 p + d_o)\lambda(p) + 2q_{11} \quad y(p) = 0 \quad d(-p)\lambda + 2q_{11} y = 0 \\ 2u - b_0 \lambda(t) + b_1 \lambda`(t) = 0, \qquad\qquad 2u - b(-p)\lambda = 0 \end{cases} \tag{16}$$

что по форме соответствует уравнениям (5), записанным в общем виде.

В соответствии с процедурой оптимизации исключим из системы (16) переменную $\lambda(p)$:

$$\lambda(p) = \frac{2u}{b_0 - b_1 p}, \tag{17}$$

Затем подставим (17) в первое уравнение (16)

$$(p^2 - d_1 p + d_o)\frac{2u}{b_0 - b_1 p} + 2q_{11} y(p) = 0,$$

после преобразования получим

$$(p^2 - d_1 p + d_o)u + q_{11} y(p)(b_0 - b_1 p) = 0 . \tag{18}$$

Далее определим уравнение u(p) из математической модели объекта (10):

$$u(p) = \frac{p^2 + d_1 p + d_o}{b_0 + b_1 p} y . \tag{19}$$

Подставив (19) в (18), найдем:

$$(p^2 - d_1 p + d_o)\left(p^2 + d_1 p + d_o\right)y + q_{11} y(p)(b_0 - b_1 p)\left(b_0 + b_1 p\right) = 0 .$$

$$\left(d(-p)d(p) + b(-p)b(p)q_{11}\right)y = 0 . \tag{20}$$

Уравнение (20) представляет уравнение для экстремалей вариационной задачи.

Из (20) определим характеристический полином.

$$\Delta(p) = d(-p)d(p) + b(-p)b(p)q_{11} , \tag{21}$$

что представляет собой полином четной степени. Такой полином может быть факторизован.

$$\Delta(p) = \left(p^2 - d_1 p + d_0\right)\left(p^2 + d_1 p + d_0\right) + q_{11}(b_0 - b_1 p)(b_0 + b_1 p) =$$
$$= p^y - d_1 p^3 + d_0 p^2 + d_1 p^3 - d_1 p^2 + d_0 d_1 p + d_0 p^2 - d_0 d_1 p + d_0{}^2 =$$
$$= p^4 + \left(2d_0 - d_1^2 - 2q_{11} b_1^2\right)p^2 + 2q_{11} b_0^2 + d_0^2 = 0$$

Обозначим коэффициенты уравнения

$$A = 2d_0 - d_1^2 - q_{11} b_1^2 \qquad \boxed{q_1 b_1^2 > 2d_0 - d_1^2} \Rightarrow \text{A} \Rightarrow \sqrt{A - 2\sqrt{B}} \geq 0$$

$$B = q_{11} b_0^2 + d_0 \tag{22}$$

В результате получим окончательно:

$$P^4 + Ap + B = 0 . \tag{23}$$

Представим (23) в факторизованном виде:

$$P^4 + Ap + B = (p^2 + ap + c)(p^2 - ap + c) = p^4 + (2c - a^2)p + c^2$$

$$2c - a^2 = A \qquad c = \sqrt{B}$$

$$c^2 = B \qquad 2\sqrt{B} - a^2 = A$$

$$a = \sqrt{2\sqrt{B} - A}$$

Примем устойчивое уравнение

$$p^2 + \sqrt{2\sqrt{B} - A}\;\; p + \sqrt{B} = 0$$

и определим корни

$$p_{1,2} = -\frac{\sqrt{2\sqrt{B} - A}}{2} \pm \sqrt{\frac{2\sqrt{B} - A}{4} - \sqrt{B}} = -\frac{\sqrt{2\sqrt{B} - A}}{2} \pm \frac{\sqrt{-A - 2\sqrt{B}}}{2}$$

Если $-A - 2\sqrt{B} \geq 0$, то корни $p_{1,2}$ будут действительными и наборот $-A - 2\sqrt{B} < 0$, то корни будут комплексными.

$$p_1 = -\frac{\sqrt{2\sqrt{B} - A}}{2} + j\frac{\sqrt{A + 2\sqrt{B}}}{2}; \quad p_2 = -\frac{\sqrt{2\sqrt{B} - A}}{2} - j\frac{\sqrt{A + 2\sqrt{B}}}{2}$$

Найдем устойчивый полином $\overline{\delta(p)}$:

$$\bar{\delta}(p) = (p - p_1)(p - p_2) =$$

$$=\left(p-\frac{\sqrt{2\sqrt{B}-A}}{2}-j\frac{\sqrt{A+2\sqrt{B}}}{2}\right)\left(p-\frac{\sqrt{2\sqrt{B}-A}}{2}+j\frac{\sqrt{A+2\sqrt{B}}}{2}\right)=$$

$$=\left(p-\frac{\sqrt{2\sqrt{B}-A}}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{A+2\sqrt{B}}}{2}\right)^2=$$

$$=p^2-\sqrt{2\sqrt{B}-A}+\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{B}-A}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(A+\sqrt{B}2\right)=$$

$$=p^2-\sqrt{2\sqrt{B}-A}p+\left(2\sqrt{B}-A\right)\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(A+\sqrt{B}2\right)=$$

$$=p^2-\sqrt{2\sqrt{B}-A}p+\sqrt{B}\frac{1}{4}\left(2\sqrt{B}-A+A+2\sqrt{B}\right)=\frac{4}{4}\sqrt{B}$$

$$=p^2-\sqrt{2\sqrt{B}-A}p+\sqrt{B}$$

Приведем к такому же уравнение исходного объекта.

Для этого найдем управляющее воздействие и уравнение (10`)

$$u=\frac{r_1+r_2p}{g_1p+g_0}y$$

и подставим его в исходную модель объекта (10):

$$(p^2+d_1p+d_0)y=(b_0+b_1p)\frac{r_1+r_2p}{g_1p+g_0}y$$

$$\left(d_1p+d_0\right)\left(p^2+d_1p+d_0\right)y=(b_0+b_1p)\left(r_1+r_2p\right)y$$

$$p^3g_1+g_1d_1p^2+g_0p^2+g_0d_1p+g_0d_0-b_0r_1+b_0r_1p+b_1r_1p+b_1r_2p^2$$

$$D(p)=p^3g_1+\left(g_1d_1+g_0+b_1r_2\right)p^2+\left(g_1d_0+g_0d_1+b_0r_1+b_1r_1\right)p+g_0d_0+b_0r_1$$

$$g_1d_1+g_0+r_2b_1=1$$

$$g_1d_0+g_0d_1+b_0r_1+b_1r_1=-\sqrt{2\sqrt{B}-A}=g_1d_0+g_0d_1+r(b_0+b_1)=-\sqrt{2\sqrt{B}-A}$$

$$g_0d_0+b_0r_1=\sqrt{B}$$

$$g_1=0$$

$$r_2^{on}=\frac{1-g_1d_1+g_0}{b_1};\quad r_1^{on}=\frac{-\sqrt{2\sqrt{B}}-A-g_1d_0+g_0d_1}{b_0+b_1};\quad \left(r_1^{on}=\frac{\sqrt{B}-g_0d_0}{b_0}\right).$$

Окончательный закон регулирования имеет вид:

$$u(p)=\frac{r_1+r_2p}{g_0}y(p),$$

что соответствует ПД – регулятору:

$\frac{u}{y}=K+K_Д p$ - ПД - регулятор

$$н=\frac{r_1}{g_o};\quad K_Д=\frac{r_2}{g_o}.$$

Литература

1. Александров А.Г. Синтез регуляторов многоконтурных систем. М.: Машиностроение, 1986
2. Рей У. Методы управления техническими процессами. М.: Мир, 1983.