

зов при функционировании по причине потери устойчивости и разрушения.

### Литература

1. Лясников А.В., Агеев Н.П., Кузнецов Д.П., Данилин Г.А., Дриго А.В. и др. Сопротивление материалов пластическому деформированию в приложениях к процессам обработки металлов давлением. СПб.: «Внешторгиздат-Петербург», 1995. 527 с.
2. Агеев Н.П., Данилин Г.А., Огородников В.П. Технология производства патронов стрелкового оружия. Ч.2. Процессы штамповки. СПб.: Балт. гос. техн. ун-т., 2006. 533 с.
3. Попов Е.А., Основы теории листовой штамповки. М.:Машиностроение, 1968. 283 с.

## **Феноменологический подход к определению показателя напряженного состояния для диаграммы пластичности**

к.т.н. доц. Грушко А.В.

*Винницкий национальный технический университет, Украина*  
+38-0432-59-84-65, [grushko@svitonline.com](mailto:grushko@svitonline.com)

*Аннотация.* Предложен параметр напряженного состояния в виде суммы относительных главных напряжений с коэффициентами их влияния. Коэффициенты влияния являются механическими свойствами материала. Диаграмму пластичности при помощи данного показателя предлагается аппроксимировать экспоненциальной функцией. Проверка для различных материалов показала достаточную близость опытных точек к диаграмме пластичности. Даны рекомендации по определению коэффициентов при произвольных видах испытаний. Минимальное количество испытаний – 4.

*Ключевые слова:* параметр напряженного состояния, диаграмма пластичности, механические свойства материала, разрушение

### Введение

Пластичность металлов зависит от ряда факторов, среди которых, кроме природы самого материала, основными являются термомеханические параметры процесса: вид напряженного состояния, температура, история деформирования и пр. Наибольшее распространение получил показатель вида напряженного состояния, характеризующий пластичность, определяется показателем жесткости напряженного состояния (относительным гидростатическим давлением) по В.А. Бабичкову в виде  $\eta = c \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_i}$ , где  $\sigma_i$  - интенсивность нормальных напряжений (напряжение Мизеса),  $c$  - нормировочный коэффициент;  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  - главные нормальные напряжения [1-3].

Считается, что пластичность металла достаточно хорошо описывается показателем  $\eta$  при его отрицательных значениях. Однако в положительной области для пластичных материалов наблюдается немонотонность зависимости пластичности от  $\eta$ , что вносит неопределенность при аппроксимации и экстраполяции экспериментальных данных. Поиск удобного показателя и функции диаграммы пластичности, отвечающие условиям монотонности, нулевой пластичности при равномерном трехосном растяжении и удовлетворительной корреляции с экспериментальными данными до сих пор является дискуссионным вопросом. Не исключено, что универсальный показатель напряженного состояния, инвариантный по отношению к механическим свойствам материала, может вообще не существовать, и для каждого материала, вообще говоря, может быть свой параметр, от которого монотонно зависит его пластичность [3, 4].

Целью работы является обоснование показателя вида напряженного состояния с учетом свойств материала при аппроксимации диаграммы пластичности монотонной функцией, поиск его констант и проверка для различных материалов и критериев деформируемости.

**Исследование. Результаты**

Основываясь на феноменологическом подходе, предположим, что пластичность зависит от величины

$$\zeta = \frac{k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + k_3\sigma_3}{\sigma_i} = a_1 + \bar{k}_2 a_2 + \bar{k}_3 a_3, \quad (1)$$

где  $a_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_i}$ ,  $a_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_i}$ ,  $a_3 = \frac{\sigma_3}{\sigma_i}$  - относительные главные напряжения,  $k_1, k_2, k_3$  - ко-

эффициенты влияния относительных главных напряжений на пластичность металла – являются механическими характеристиками материала, могут быть как положительными так и отрицательными, а также равными нулю. В дальнейшем показатель (1) нормирован к единице по величине  $k_1 = 1$ , тогда  $\bar{k}_2 = \frac{k_2}{k_1}$ ,  $\bar{k}_3 = \frac{k_3}{k_1}$ , т. е. при одноосном растяжении  $\zeta_1 = k_1 = 1$ .

Если  $k_1 = k_2 = k_3 = 1$  – влияние всех относительных главных напряжений равносильно, то получим  $\zeta = \eta$ . Отметим также, что практически все известные показатели можно выразить через величины  $a_1, a_2, a_3$  с учетом  $k_1, k_2, k_3$  что дает возможность ставить в соответствие различные показатели через соответствующие формулы перерасчета [1-5, 8]. Однако однозначное соответствие корректно лишь при плоском напряженном состоянии или частных случаях осесимметричного или плоского деформированного состояний.

Удачно подобранная аппроксимирующая функция дает возможность строить последнюю по результатам испытаний с минимальным числом опытов и возможностью экстраполяции.

Отметим удобную для практических расчетов аппроксимацию диаграммы пластичности по В.А. Огородникову [1, 2]

$$e_p = e_{p0} \exp(-\lambda\eta), \quad (2)$$

где  $e_{p0}$  - пластичность металла при сдвиге,

$\lambda$  - чувствительность пластичности металла к изменению схемы напряженного состояния.

В областях положительных и отрицательных гидростатических давлений предполагается различная чувствительность пластичности металла  $\lambda$ . Функция (2) дает необходимую точность при  $\eta \leq 0$  и сильно зависящую от вида металла при  $\eta \geq 0$  [8].

В результате анализа ряда литературных данных [5-7] (алюминий, сталь), а также проведенных экспериментов для сталей У8, У12, титанового сплава ВТ6 установлено, что диаграмма пластичности и для показателя  $\zeta$  достаточно точно описывается экспоненциальной функцией

$$e_p = d \cdot \exp(-q \cdot \zeta); \quad e_p = d \cdot \exp(-q \cdot (a_1 + \bar{k}_2 a_2 + \bar{k}_3 a_3)), \quad (3)$$

где  $d, q$  - константы диаграммы пластичности, определяемой показателем  $\zeta$ .

Выбор такой функции связан также с тем, что при трехосном растяжении пластичность равна нулю, при трехосном сжатии – бесконечности. Очевидно, что должно выполняться условие: при  $q \geq 0$ ,  $1 + \bar{k}_2 + \bar{k}_3 \geq 0$ ; при  $q \leq 0$ ,  $1 + \bar{k}_2 + \bar{k}_3 \leq 0$ , иначе при трехосном растяжении пластичность металла будет равна бесконечности.

Если  $\zeta = 1$ , то выражение  $d \cdot \exp(-q)$  определяет пластичность при растяжении  $e_{p1}$ ; если положить  $\bar{k}_2 = \bar{k}_3 = 1$  и обозначить  $q = \lambda$ ,  $d = e_{p0}$  то получим зависимость (2). Тогда, по аналогии с  $\lambda$ ,  $q$  есть чувствительность пластичности металла к изменению схемы напря-

женного состояния, определяемой показателем  $\zeta$ . Когда  $\bar{k}_2 = \bar{k}_3 \neq 1$ , коэффициенты  $q$ ,  $d$  теряют ясный физический смысл. В частности, параметр  $d$  есть условная пластичность металла, когда комплекс  $\sigma_1 + \bar{k}_2\sigma_2 + \bar{k}_3\sigma_3$  равен нулю (или  $\zeta = 0$ ).

Аппроксимация (3) содержит 4 неизвестных величины, следовательно, необходимо по крайней мере 4 экспериментальные точки для определения диаграммы пластичности. Наибольший интерес представляет область положительного гидростатического давления ( $\sigma \geq 0$ ), поскольку именно здесь наблюдается немонотонность зависимости пластичности от  $\eta$ . Таким образом, ограничиваясь областью  $\sigma \geq 0$  для калибровки модели выделим 4 характерные точки – испытанием образцов на растяжение, сдвиг, плоское деформированное состояние и равномерное двухосное растяжение. Если количество экспериментальных точек для построения диаграммы пластичности превышает 4, то следует искать параметры модели (3) методом наименьших квадратов.

Проверку предложенной модели выполним на основе ряда литературных данных [5-8]. Так, на рисунке 1 показаны диаграммы пластичности алюминиевого сплава 6061-T6 (лист 2 мм) [6], построенные в зависимости от показателей напряженного состояния  $\eta$  и  $\zeta$ . Диаграмма пластичности в координатах  $\eta$ - $e_p$  имеет сильную нелинейность и характерные экстремальные зоны, а диаграмма пластичности в координатах  $\zeta$ - $e_p$  имеет свойство гладкости и тесную корреляционную связь с экспериментом. Ее функция имеет вид:

$$e_p = 2578 \cdot \exp(-8,124 \cdot \zeta) = \exp(7,85 - 8,124 \cdot \zeta), \quad (4)$$

$$\text{где } \zeta = \frac{\sigma_1 - 0,063 \cdot \sigma_2 - 0,761 \cdot \sigma_3}{\sigma_i}$$

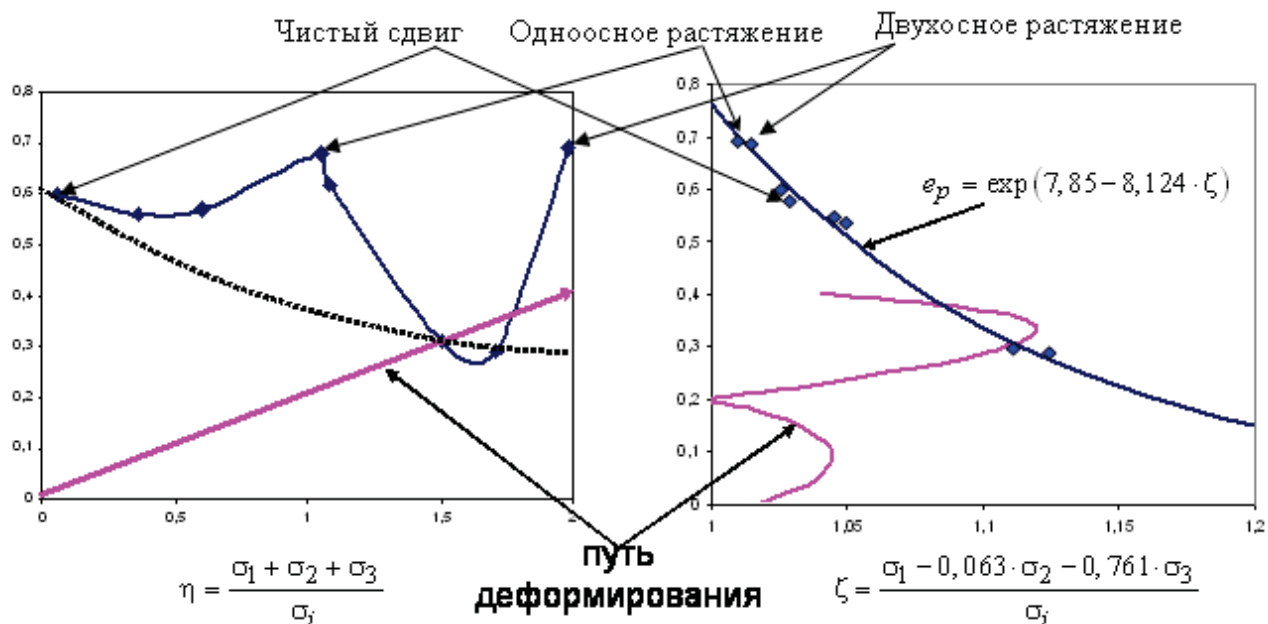


Рисунок 1 – Диаграммы пластичности алюминиевого сплава 6061-T6 (лист 2 мм)

Аналогичные результаты дала обработка экспериментов, изложенных в [5-8]. Для дальнейшей проверки исследовалась пластичность высокоуглеродистых сталей У8 и У12 (состояние поставки) и титанового сплава ВТ6 (отжиг). Для получения расчетных точек испытывались плоские образцы в условиях сдвига, с выкружками, в условиях плоского изгиба и на двухосное растяжение по пробе Эриксона. Параметры напряженного состояния и величины предельных деформаций рассчитывались по методу сеток. В таблице 1 приведены коэффициенты аппроксимации (3).

Неудобство использования параметра напряженного состояния  $\zeta$  состоит в его уникальности для каждого материала. Можно предположить, что для определенной группы ме-

таллов некоторые константы, входящие в показатель, будут иметь определенные корреляционные связи. Однако данное предположение требует глубокой экспериментальной проверки.

Следует отметить высокую степень корреляции рассчитанных диаграмм с экспериментом, а также слабую зависимость коэффициента  $k_3$  от свойств исследуемых материалов (-0,75...-0,82).

Таблица 1

**Коэффициенты аппроксимации, согласно (3)**

Материал	d	q	$\bar{k}_2$	$\bar{k}_3$
алюминиевый сплав 2025-T351 [5]	58130	11,81	-0,108	-0,786
алюминиевый сплав 6061-T6 (лист 2 мм) [6]	2578	8,124	-0,063	-0,761
сталь WBP [7]	202	-0,134	0,028	-0,822
титановый сплав BT6	38,4	5,09	0,2	-0,75
сталь У12	23,33	3,63	0,02	-0,79
сталь У8	11,24	3,153	0,08	-0,78

Использование предложенного показателя напряженного состояния  $\zeta$  и соответствующих аппроксимаций (3) в моделях разрушения состоит в том, что вместо традиционной функции диаграммы пластичности  $e_p(\eta)$  следует применять функцию диаграммы разрушения  $e_p(\zeta)$ , поскольку физический смысл накопления повреждений введенный показатель  $\zeta$  не изменяет. Область применения того или иного критерия остается в соответствие с рекомендациями его использования в зависимости от вида процесса и истории нагружения.

Таким образом, аналитические зависимости расчета степени использования запаса пластичности и деформационные критерии разрушения запишем с учетом  $e_p(\zeta)$ . Например, критерий В. Л. Колмогорова [9]

$$\Psi = \int_0^{e_i^*} \frac{de_i}{e_p(\zeta)} < 1. \quad (5)$$

Тензорный критерий Г. Д. Деля [4]

$$d\psi_{ij} = \sqrt{\frac{2}{3}}(1-a+2a\phi) \frac{d\varepsilon_{ij}^p}{e_p(\zeta)}, \quad \psi = \frac{a-1 + \sqrt{(1-a)^2 + 4a\sqrt{\psi_{ij}\psi_{ij}}}}{2a} < 1. \quad (6)$$

Направляющий тензор скоростей деформаций  $\beta_{ij}$  также следует поставить в зависимость от параметра  $\zeta$

$$\beta_{ij} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{d\varepsilon_{ij}}{de_i} = f_{ij}(\zeta), \quad (7)$$

где  $f_{ij}(\zeta)$  – функция, связывающая историю нагружения в виде направления с параметром  $\zeta$ .  $f_{ij}(\zeta)$ , может быть рассчитана с использованием ЭВМ по напряженно-деформированному состоянию.

Рассмотрим процесс, характеризующийся линейностью пути деформирования в координатах  $\eta$ - $e_p$ . В координатах  $\zeta$ - $e_p$  для алюминиевого сплава 6061-T6 (лист 2 мм) тот же путь деформирования будет иметь достаточно сложную форму (см. рисунок 1). Для примера расчета степени использования запаса пластичности (СИЗП) применим (5):

$$\psi = \int_0^{e_i^*} \frac{de_i}{e_p(\zeta)} = 0,87, \quad \psi = \int_0^{e_i^*} \frac{de_i}{e_p(\eta)} = 1,1. \quad (8)$$

Погрешность расчета СИЗП составила  $\Delta = 26\%$ , что существенно при оценке деформируемости, поскольку с использованием менее точной модели разрушение должно наступить, а по предложенной – имеется достаточный запас.

Предложенную аппроксимацию можно расширить до области одноосного сжатия, т.е. для области  $-1 \leq \eta \leq 2$ , в которой реализуются большинство процессов штамповки. В этом случае диаграмму разрушения описывает одна аналитическая функция, что удобно при моделировании процессов разрушения. Следует отметить, что для проверки и калибровки модели использовались преимущественно данные для плоского и частично для осесимметричного напряженного состояния. При объемном напряженном состоянии проверка требует постановки экспериментов в камере высокого давления [1, 3].

### Выводы

Использование параметров напряженного состояния, с учетом свойств материала, позволяет аппроксимировать диаграммы пластичности монотонными функциями с существенно меньшим отклонением от опытных данных, чем с использованием параметра  $\eta$ . Одним из таких параметров может быть  $\zeta$  - сумма относительных главных напряжений с весовыми коэффициентами их влияния на пластичность в виде (3). Больше всего влияет на пластичность  $a_1 = \sigma_1/\sigma_i$ , второе по силе влияния –  $a_3 = \sigma_3/\sigma_i$  ( $\bar{k}_1 > |\bar{k}_3| > |\bar{k}_2|$ ). Установлено, что коэффициент  $\bar{k}_3$  для исследованных алюминиевых сплавов равен -0,76...-0,79, углеродистых сталей, титанового сплава ВТ6 -0,82...-0,85. Для получения диаграммы разрушения необходимо провести 4 испытания для разных схем напряженного состояния. С учетом постоянства коэффициента  $\bar{k}_3$  - три. Точность диаграммы разрушения в области положительных растягивающих напряжений существенно выше, чем диаграммы пластичности  $e_p(\eta)$  при проведении такого же количества опытов. Использование диаграммы разрушения  $e_p(\zeta)$  в известных деформационных критериях для процессов, протекающих в области положительных гидростатических давлений, может существенно уточнить значение СИЗП до 2-х раз.

### Литература

1. Огородников В. А. Оценка деформируемости металлов при обработке давлением. – К.: Выща шк., 1983. – 175 с.
2. Огородников В. А. Энергия. Деформации. Разрушение (задачи автотехнической экспертизы). / В. А. Огородников, В. Б. Киселев, И. О. Сивак – Винница: Универсум–Винница, 2005. – 204 с.
3. Дель Г.Д. Технологическая механика. – М.: Машиностроение, 1978. – 174 с.
4. Dell, H. CrachFEM A Comprehensive Approach For The Prediction Of Sheet Metal Failure / Dell, H.; Gese, H. and Oberhofer, G. // NUMIFORM '07, Materials Processing and Design: Modeling, Simulation and Applications, Porto, 18 - 21 June 2007, American Institute of Physics, CP908, pp. 165-170.
5. Wierzbicki, T. Calibration and evaluation of seven fracture models / Wierzbicki, T.; Bao, Y.; Lee, Y.-W.; Bai, Y. // International Journal of mechanical Sciences, 47 (2005) pp. 719-743.
6. Luo, M. Ductile Fracture Calibration and Validation of Anisotropic Aluminum Sheets / M. Luo, T. Wierzbicki, // By Massachusetts Institute of Technology Conference: 2009 SEM Annual Conference & Exposition on Experimental & Applied Mechanics Proceedings, June 1-4, 2009.
7. Kolleck, R. Failure prediction method for hydro forming simulation of thick walled tubes / Kolleck, Ralf; Auer, Peter; Auer, Gerfried // The 14th International Esaform Conference On Material Forming: ESAFORM 2011. AIP Conference Proceedings, Volume 1353, 2011. – pp. 295-300.
8. Грушко А. В. Параметр напряженного состояния, учитывающий свойства материала, и его влияние на пластичность / А. В. Грушко // Вісник Національного технічного університету України "КПІ". Серія: "Машиностроение". – 2012. – №64. – С. 220-226. – ISSN 2305-9001.
9. Колмогоров В.Л. Напряжения, деформации, разрушение. – М.: Металлургия, 1970. – 229 с.