

веществ этими двигателями. – Введ. 2008.01.01. – Издание офиц. М.: Стандарт информ,-2005. –108 с.

5. Мирзоев Вагиф, Пущик Евгений. Европейский рынок добавок к бензинам: этанол, МТБЭ и ЭТБЭ // Проблемы местного самоуправления. – 2010.- № 41
6. Автомобильное топливо с биоэтанолом/ Карпов С.А., Капустин В.М., Старков А.К. – М.: КолосС, 2007 – 216 с. : ил.

Моделирование случайного микропрофиля дорожной поверхности методом формирующего фильтра

к.т.н. доц. Чабунин И.С.

Университет машиностроения

8(495)223-05-23 (доб. 1457), tchabunin@rambler.ru

Аннотация. В статье рассматривается вопрос моделирования случайного микропрофиля дорожной поверхности методом формирующего фильтра. Получены дифференциальные уравнения формирующего фильтра для различных корреляционных функций.

Ключевые слова: микропрофиль дорожной поверхности, формирующий фильтр, случайный процесс

В настоящее время для исследования колебательных процессов, протекающих в транспортном средстве, широко используются методы статистической динамики, которые в сочетании с современными мощными ЭВМ дают возможность получить реакцию машины практически на любое случайное воздействие, конечно, при условии наличия адекватной расчетной схемы.

Поверхность дороги, даже очень хорошего качества, не является идеально ровной. В общем случае аналитически такую поверхность можно выразить как функцию двух переменных (рисунок 1):

$$q = q(x, y),$$

где: x и y – координаты некоторой (обычно срединной) плоскости, относительно которой измеряют высоту q неровностей поверхности дороги.

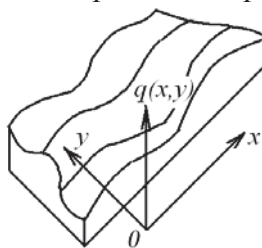


Рисунок 1. Микропрофиль поверхности дороги как функция двух переменных

Для однородного по типу и степени его износа покрытия участка дороги микропрофиль можно рассматривать как случайную стационарную, нормально распределенную, эргодическую функцию $q(x, y)$ высот q микронеровностей от координат x, y с нулевым средним значением. Тогда исчерпывающей вероятностной характеристикой является ее двумерная корреляционная функция:

$$R_q(x_1, y_1, x_2, y_2) = \langle q(x_1, y_1) \cdot q(x_2, y_2) \rangle, \quad (1)$$

где: $\langle \dots \rangle$ – символ осреднения;

$q(x_1, y_1), q(x_2, y_2)$ – значения функции $q(x, y)$ для «путевых» координат x_1, y_1 и x_2, y_2 .

Для стационарных случайных функций начало отсчета x_1, y_1 можно принять произвольным. Тогда если ввести переменные $x_s = x_2 - x_1$ и $y_s = y_2 - y_1$, то корреляционная функция станет функцией двух переменных:

$$R_q(x_s, y_s) = \langle q(x, y) \cdot q(x + x_s, y + y_s) \rangle. \quad (2)$$

Однако проведение замеров микропрофиля сечений дорожного покрытия и последующее построение двумерной корреляционной функции – задача исключительно сложная и трудоемкая. Поэтому обычно ее упрощают.

При движении автомобиля неровности дорожной поверхности вызывают его колебания преимущественно в продольной и поперечной плоскостях. Следовательно, рационально определить те вероятностные характеристики дорожной поверхности, которые их вызывают.

При использовании плоской модели автомобиля, т.е. когда микропрофили под правыми и левыми колесами являются точными копиями друг друга, нас интересует микропрофиль дорожной поверхности только в продольном направлении по одной колее.

Если поверхность дороги рассматривать как случайную функцию только одного переменного x , то ее статистической характеристикой будет корреляционная функция микропрофиля сечения вдоль дороги. При среднем значении (математическом ожидании), равном нулю, корреляционная функция будет иметь вид:

$$R_q(x_s) = \langle q(x) \cdot q(x + x_s) \rangle. \quad (3)$$

Полученную по экспериментальным данным корреляционную функцию для расчетов обычно аппроксимируют соответствующим аналитическим выражением. В общем случае ее аппроксимируют зависимостью:

$$R_q(x_s) = \sigma_q^2 \cdot \left(A_1 \cdot e^{-\alpha_1|x_s|} + A_2 \cdot e^{-\alpha_2|x_s|} \cdot \cos \beta_1 x_s \right), \quad (4)$$

где: A_1, A_2 – весовые коэффициенты ($A_1 + A_2 = 1$);

α_i – параметры, характеризующие быстроту затухания корреляционной связи ординат микропрофиля;

β_1 – параметр, характеризующий гармоническую составляющую микропрофиля;

$\sigma_q^2 = R_q(0)$ – дисперсия.

Для некоторых типов дорог, например с цементобетонным покрытием или булыжным в удовлетворительном состоянии, можно ограничиться первым слагаемым, т.е.

$$R_q(x_s) = \sigma_q^2 \cdot e^{-\alpha_1|x_s|}. \quad (5)$$

Для асфальтового покрытия и булыжных дорог можно использовать только второе слагаемое:

$$R_q(x_s) = \sigma_q^2 \cdot e^{-\alpha_2|x_s|} \cdot \cos \beta_2 |x_s|. \quad (6)$$

Численные значения параметров A_i, α_i, β_i определяют, например, по методу наименьших квадратов, исходя из построенного по результатам замеров реального микропрофиля корреляционной функции.

Микропрофили автомобильных дорог с твердым покрытием могут различаться между собой в зависимости от категории, степени изношенности и других факторов, но в любом случае должны соответствовать определенным дорожным стандартам. Поэтому с той или иной степенью погрешности они могут быть описаны приведенными выше зависимостями.

В теоретических исследованиях значения $q(x)$ могут быть комплексными, поэтому наряду с функцией (3) рассматривают комплексно-сопряженную. При этом в окончательных расчетах используют только действительную часть получаемых комплексных выражений, а оператор вычисления действительной части этих выражений, как правило, не указывают. В этом случае вместо соотношения (3) применяют выражение

$$R_q(x_s) = \langle q^*(x) \cdot y(x + x_s) \rangle, \quad (7)$$

где: «*» – знак комплексно-сопряженной величины.

Наряду с корреляционной функцией достаточной характеристикой стационарной случайной функции является ее спектральная функция $S_q(\theta)$, где: θ – «путевая» частота

($\theta = \frac{2\pi}{s}$, где: s – длина неровности). Функции $R_q(x_s)$ и $S_q(\theta)$ связаны между собой преобразованием Фурье (формулы Винера-Хинчина):

$$R_q(x_s) = \int_{-\infty}^{\infty} S_q(\theta) \cdot e^{i\theta x_s} \cdot d\theta, \quad (8)$$

$$S_q(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_q(x_s) \cdot e^{-i\theta x_s} \cdot dx_s. \quad (9)$$

В технических приложениях спектральные плотности определяются только для положительных частот. Для их обозначения введем волнистую черту сверху. Тогда:

$$\tilde{S}_q(\theta) = 2 \cdot S_q(\theta), \quad (10)$$

$$R_q(x_s) = \int_{-\infty}^{\infty} S_q(\theta) \cdot e^{i\theta x_s} \cdot d\theta = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \tilde{S}_q(\theta) \cdot e^{i\theta x_s} \cdot d\theta = \int_0^{\infty} \tilde{S}_q(\theta) \cdot e^{i\theta x_s} \cdot d\theta, \quad (11)$$

$$\tilde{S}_q(\theta) = 2 \cdot S_q(\theta) = 2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_q(x_s) \cdot e^{-i\theta x_s} \cdot dx_s \right) = \quad (12)$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot \int_0^{\infty} R_q(x_s) \cdot e^{-i\theta x_s} \cdot dx_s \right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_q(x_s) \cdot e^{-i\theta x_s} \cdot dx_s.$$

Соответствующие корреляционным функциям (4) – (6) выражения для спектральных плотностей имеют вид:

$$\tilde{S}_q(\theta) = 2 \cdot \sigma_q^2 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \left(A_1 \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \theta^2} + A_2 \cdot \frac{\alpha_2^2 + \beta_1^2 + \theta^2}{(\theta^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2)^2 + 4\alpha_2^2\theta^2} \right), \quad (13)$$

$$\tilde{S}_q(\theta) = 2 \cdot \sigma_q^2 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\alpha_3}{(\alpha_3^2 + \theta^2)}, \quad (14)$$

$$\tilde{S}_q(\theta) = 2 \cdot \sigma_q^2 \cdot \frac{\alpha_4}{\pi} \cdot \frac{\alpha_4^2 + \beta_2^2 + \theta^2}{(\theta^2 - \alpha_4^2 - \beta_2^2)^2 + 4\alpha_4^2\theta^2}. \quad (15)$$

Для ряда дорог параметры A_i , α_i , β_i , σ_{qi} приведены в таблице 1 [2].

Таблица 1

Дорожная поверхность	$\sigma_q, м$	A_1	A_2	$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4, м^{-1}$	$\alpha_3, м^{-1}$	$\beta_1 = \beta_2, м^{-1}$
Цементобетонное	0,005 – 0,012	1	0	0	0,15	0
Асфальтированное	0,008 – 0,012	0,85	0,15	0,20	0,05	0,60
Ровное булыжное	0,013 – 0,022	1	0	0	0,45	0
Разбитое булыжное	0,025 – 0,033	0	1	0,10	0	0,238
Изношенное бетонное	0,013 – 0,025	0,85	0,15	0,50	0,20	2,0
Разбитая грунтовая дорога	0,100 – 0,140	0,55	0,45	0,085	0,08	0,235

При исследовании случайных колебательных процессов автомобиля, вызванных действием на автомобиль случайного микропрофиля дороги, в качестве аргумента обычно принимается время t . В этом случае случайные функции называются случайными процессами. Если принять скорость движения транспортного средства v постоянной, то $x = v \cdot t$. При $v = 1 м/с$ $x = t$ и случайная функция $q(x)$ перейдет в случайный процесс $q(t)$ при единичной скорости.

Для случайных процессов аргументом в формулах (4) – (6) является время t . Сдвигу x_s будет соответствовать временной сдвиг τ .

Методы моделирования случайных процессов можно разделить на точные (рекуррент-

ные алгоритмы типа авторегрессии – скользящее среднее) и приближенные (метод формирующего фильтра, скользящего суммирования, канонических и неканонических представлений) [3].

Точный метод моделирования основан на уравнении типа авторегрессии – скользящее среднее [3]:

$$q_k = \sum_{j=0}^l a_j \varepsilon_{k-j} - \sum_{j=0}^m b_j q_{k-j}, \quad k = m, m+1, \dots, \quad (16)$$

где: l, m, a_j, b_j – параметры, определяемые по корреляционной функции $R_q(\tau)$ процесса $q(t)$, которые могут быть найдены методом факторизации.

Метод лишен методической ошибки, но подготовительные работы, заключающиеся в расчете коэффициентов a_j, b_j , чрезвычайно трудоемки.

Приближенные методы моделирования имеют методическую ошибку. Среди них наиболее простым и распространенным является метод формирующего фильтра. Величина методической ошибки стремится к нулю при стремлении к нулю шага интегрирования дифференциального уравнения формирующего фильтра. Ошибка будет уменьшаться существенно быстрее при использовании двойной точности проведения расчетов.

Формирующим фильтром называют динамическую систему, преобразующую случайный процесс $q_0(t)$ вида белого шума в случайный процесс $q(t)$ с заданными статистическими характеристиками [3].

Корреляционная функция гауссовского случайного процесса с нулевым средним, называемого белым шумом, имеющего бесконечную дисперсию и постоянную спектральную плотность $\frac{1}{2\pi}$, будет иметь вид:

$$R_{q_0}(\tau) = \delta(\tau), \quad (17)$$

где: $\delta(\tau)$ – дельта-функция Дирака, определяемая соотношениями:

$$\delta(\tau) = \begin{cases} \infty & \text{при } \tau = 0; \\ 0 & \text{при } \tau \neq 0; \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = \int_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon} \delta(\tau) d\tau = 1,$$

ε – сколь угодно малая величина.

Задача моделирования микропрофиля формулируется следующим образом. По известным характеристикам случайного процесса требуется построить вычислительный алгоритм, позволяющий получать на ЭВМ реализации случайных процессов $q(t)$ или последовательностей q_k ($k = 0, 1, 2, \dots$). В случае гауссовского стационарного случайного процесса эта задача является полностью определенной.

Рассмотрим получение дискретных значений микропрофиля в отдельные чередующиеся друг за другом моменты времени, соответствующие шагу дискретизации, методом формирующего фильтра. Смоделируем случайный процесс $q(t)$ с заданной спектральной плотностью $S_q(\omega)$ по случайному процессу $q_0(t)$ со спектральной плотностью $S_0(\omega)$. Будем считать, что процесс $q(t)$ может быть описан спектральной плотностью в виде дробно-рациональной функции, а процесс $q_0(t)$ будем считать «белым шумом» со спектральной плотностью $\tilde{S}_0(\omega) = \frac{1}{\pi} = const$.

Для решения поставленной задачи рассмотрим систему, описываемую уравнением [1]

$$L_1 \{q(t)\} = L_2 \{q_0(t)\}, \quad (18)$$

где: линейные дифференциальные операторы L_1 и L_2 определяются соотношениями:

$$L_1 = a_0 \frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{d}{dt} + a_n, \quad (19)$$

$$L_2 = b_0 \frac{d^m}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{d}{dt} + b_m, \quad (20)$$

($m, n \geq 0; m \leq n-1$).

Спектральные плотности процессов $q(t)$ и $q_0(t)$ связаны соотношением:

$$\tilde{S}_q(\omega) = \frac{|b_0(i\omega)^m + b_1(i\omega)^{m-1} + \dots + b_{m-1}(i\omega) + b_m|^2}{|a_0(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(i\omega) + a_n|^2} \cdot \tilde{S}_0(\omega). \quad (21)$$

Из (21) следует, что поставленная задача может быть решена соответствующим подбором коэффициентов a_i и b_j ($i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m$).

Пусть, например, требуется сформировать случайный процесс со спектральной плотностью (14) и соответствующей ей корреляционной функцией (5).

Приравниваем правые части выражений (21) и (14) с заменой θ на ω :

$$\frac{|b_0(i\omega)^m + b_1(i\omega)^{m-1} + \dots + b_{m-1}(i\omega) + b_m|^2}{|a_0(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(i\omega) + a_n|^2} \cdot \tilde{S}_0(\omega) = 2 \cdot \sigma_q^2 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\alpha_3}{(\alpha_3^2 + \omega^2)}.$$

Так как $\tilde{S}_0(\omega) = \frac{1}{\pi}$, то для числителей получим выражение:

$$|b_0(i\omega)^m + b_1(i\omega)^{m-1} + \dots + b_{m-1}(i\omega) + b_m|^2 = 2 \cdot \sigma_q^2 \cdot \alpha_3.$$

Отсюда $m = 0; b_0 = \sigma_q \cdot \sqrt{2\alpha_3}$.

Аналогично для знаменателей:

$$|a_0(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(i\omega) + a_n|^2 = \omega^2 + \alpha_3^2.$$

Отсюда $n = 1; a_0 = 1; a_1 = \alpha_3$.

Согласно выражениям (19), (20):

$$L_1 = \dot{q} + \alpha_3 q; L_2 = \sigma_q \cdot \sqrt{2\alpha_3} \cdot q_0.$$

Уравнение (18) примет вид:

$$\dot{q} + \alpha_3 \cdot q = \sigma_q \cdot \sqrt{2\alpha_3} \cdot q_0.$$

Дифференциальное уравнение фильтра:

$$\dot{q} = -\alpha_3 \cdot q + \sigma_q \cdot \sqrt{2\alpha_3} \cdot q_0. \quad (22)$$

Теперь сформируем случайный процесс со спектральной плотностью (15) и соответствующей ей корреляционной функцией (6).

Приравниваем правые части выражений (21) и (15). Учтя, что $\tilde{S}_0(\omega) = \frac{1}{\pi}$, после приве-

дения подобных слагаемых получим:

$$|b_0(i\omega)^m + b_1(i\omega)^{m-1} + \dots + b_m|^2 = 2 \cdot \sigma_q^2 \cdot \alpha_4 \cdot \omega^2 + 2 \cdot \sigma_q^2 \cdot \alpha_4 \cdot (\alpha_4^2 + \beta_2^2).$$

Отсюда $m = 1; b_0 = \sigma_q \cdot \sqrt{2\alpha_4}; b_1 = \sigma_q \cdot \sqrt{2\alpha_4 \cdot (\alpha_4^2 + \beta_2^2)}$.

$$|a_0(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \dots + a_n|^2 = \omega^4 + (2\alpha_4^2 - 2\beta_2^2) \cdot \omega^2 + (\alpha_4^2 + \beta_2^2)^2.$$

Отсюда $n = 2; a_0 = 1; a_1 = 2\alpha_4; a_2 = \alpha_4^2 + \beta_2^2$.

Согласно выражениям (19), (20):

$$L_1 = \ddot{q} + 2\alpha_4 \dot{q} + (\alpha_4^2 + \beta_2^2) \cdot q; L_2 = \sigma_q \cdot \sqrt{2\alpha_4} \cdot \dot{q}_0 + \sigma_q \cdot \sqrt{2\alpha_4 \cdot (\alpha_4^2 + \beta_2^2)} \cdot q_0.$$

Уравнение (18) примет вид:

$$\ddot{q} + 2\alpha_4 \dot{q} + (\alpha_4^2 + \beta_2^2) \cdot q = \sigma_q \cdot \sqrt{2\alpha_4} \cdot \dot{q}_0 + \sigma_q \cdot \sqrt{2\alpha_4 \cdot (\alpha_4^2 + \beta_2^2)} \cdot q_0.$$

Преобразуем полученное выражение:

$$\ddot{q} - \sigma_q \cdot \sqrt{2\alpha_4} \cdot \dot{q}_0 = -2\alpha_4 \dot{q} - (\alpha_4^2 + \beta_2^2) \cdot q + \sigma_q \cdot \sqrt{2\alpha_4 \cdot (\alpha_4^2 + \beta_2^2)} \cdot q_0. \quad (23)$$

Обозначим $\ddot{q} - \sigma_q \cdot \sqrt{2\alpha_4} \cdot \dot{q}_0 = \dot{q}_1$.

После интегрирования получим:

$$\dot{q} - \sigma_q \cdot \sqrt{2\alpha_4} \cdot q_0 = q_1.$$

Выразим \dot{q} и подставим в выражение (23):

$$\begin{aligned} \dot{q} &= q_1 + \sigma_q \cdot \sqrt{2\alpha_4} \cdot q_0; \\ \dot{q}_1 &= -2\alpha_4 \cdot q_1 - 2\sigma_q \cdot \alpha_4 \cdot \sqrt{2\alpha_4} \cdot q_0 - (\alpha_4^2 + \beta_2^2) \cdot q + \sigma_q \cdot \sqrt{2\alpha_4 \cdot (\alpha_4^2 + \beta_2^2)} \cdot q_0. \end{aligned}$$

Тогда уравнениями формирующего фильтра будут:

$$\begin{cases} \dot{q} = q_1 + \sigma_q \cdot \sqrt{2\alpha_4} \cdot q_0; \\ \dot{q}_1 = -2\alpha_4 \cdot q_1 - (\alpha_4^2 + \beta_2^2) \cdot q + \sigma_q \cdot (\sqrt{\alpha_4^2 + \beta_2^2} - 2\alpha_4) \cdot \sqrt{2\alpha_4} \cdot q_0. \end{cases} \quad (24)$$

Для получения уравнений фильтра в случае спектральной плотности вида (13) нельзя сложить полученные уравнения (22) и (24), умножив их на соответствующие коэффициенты A_i , так как принцип суперпозиции не применим. Приравниваем правые части выражений (21) и (13):

$$\frac{|b_0(i\omega)^m + b_1(i\omega)^{m-1} + \dots + b_{m-1}(i\omega) + b_m|^2}{|a_0(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(i\omega) + a_n|^2} \cdot \tilde{S}_0(\omega) = 2 \cdot \sigma_q^2 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \left(A_1 \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \omega^2} + A_2 \cdot \frac{\alpha_2^2 + \beta_1^2 + \omega^2}{(\omega^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2)^2 + 4\alpha_2^2 \omega^2} \right). \quad (25)$$

В этом случае также $\tilde{S}_0(\omega) = \frac{1}{\pi}$. Дальнейшие преобразования оказываются слишком

громоздкими, поэтому приведем правую часть уравнения (25) к общему знаменателю и зададимся конкретными численными значениями. Пусть $A_1 = 0,85$; $A_2 = 0,15$; $\sigma_q = 0,008 м$; $\alpha_1 = 0,2 с^{-1}$; $\alpha_2 = 0,05 с^{-1}$; $\beta_1 = 0,6 с^{-1}$. Тогда получим два выражения:

$$\begin{aligned} |b_0(i\omega)^m + b_1(i\omega)^{m-1} + \dots + b_m|^2 &= 2,272 \cdot 10^{-5} \cdot \omega^4 - 1,5172 \cdot 10^{-5} \cdot \omega^2 + 2,8733 \cdot 10^{-6}, \\ |a_0(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \dots + a_n|^2 &= \omega^6 - 0,675 \cdot \omega^4 + 0,1028 \cdot \omega^2 + 5,2563, \end{aligned}$$

из которых $m = 2$; $b_0 = 4,767 \cdot 10^{-3}$; $b_1 = 9,937 \cdot 10^{-3}$; $b_2 = 1,695 \cdot 10^{-3}$; $n = 3$; $a_0 = 1$; $a_1 = 0,3$; $a_2 = 0,382$; $a_3 = 0,073$.

Опуская промежуточные математические преобразования, запишем уравнения фильтра в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{q} = q_1 + \frac{b_0}{a_0} q_0; \\ \dot{q}_1 = q_2 + \frac{a_0 b_1 + a_1 b_0}{a_0^2} q_0; \\ \dot{q}_2 = -\frac{a_1}{a_0} q_2 - \frac{a_2}{a_0} q_1 - \frac{a_3}{a_0} q + \left(\frac{b_2}{a_0} - \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_0^2} - \frac{a_2 b_0}{a_0^2} \right) q_0. \end{cases} \quad (26)$$

На рисунках 2 а, б, в приведены случайные функции микропрофиля дорог, смоделированные с помощью уравнений фильтра (22), (24), (26), для соответствующих корреляционных функций (4), (5), (6). Для сравнения на рисунках 3 а, б, в приведены графики корреляционных функций, построенные по смоделированным микропрофилям (сплошные линии) и по аппроксимирующим формулам (4), (5), (6) (штриховые линии). Из сравнения графиков видно

достаточно хорошее совпадение корреляционных функций.

Таким образом, по описанной методике можно смоделировать случайный процесс по любой спектральной плотности в виде дробно-рациональной функции.

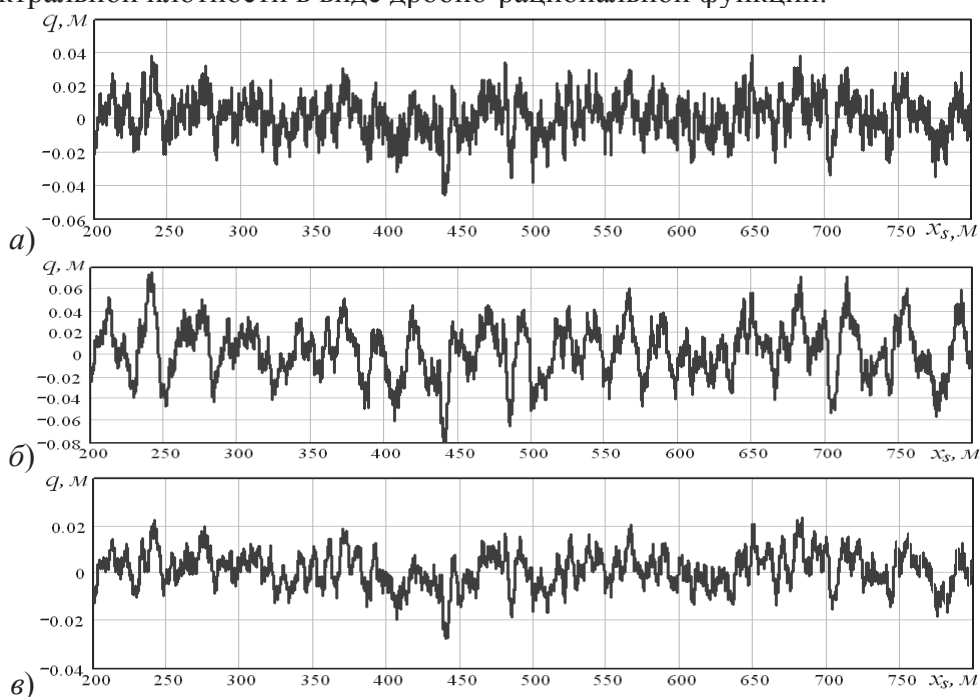


Рисунок 2. Смоделированные микропрофили дорог

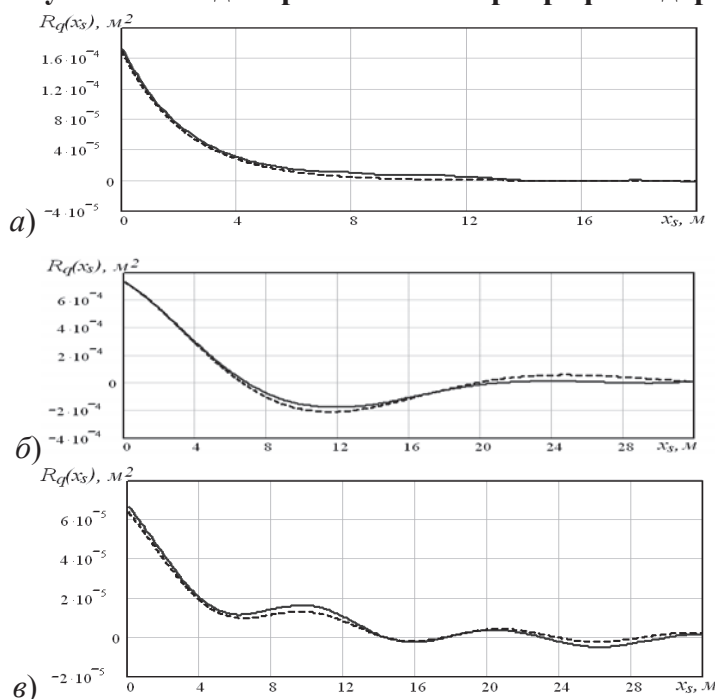


Рисунок 3. Корреляционные функции микропрофилей

Литература

1. Надежность механических систем и конструкций при случайных воздействиях. / А.С. Гусев, А.Л. Карунин, Н.А. Крамской, С.А. Стародубцева. Под ред. А.Л. Карунина. – МГТУ «МАМИ», 2001. – 284 с.
2. Тарасик В.П. Теория движения автомобиля: учебные для вузов. / В.П. Тарасик. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 478 с.
3. Шалыгин А.С. Прикладные методы статистического моделирования. / А.С. Шалыгин, Ю.И. Палагин. – Л.: Машиностроение. Ленингр. отд., 1986. – 320 с.