Об особенностях стационарного распределения температуры расплава полимера в экструдере, вызванных теплообменом

к.т.н. доц. Хаметова М.Г.
Университет машиностроения
8 (499) 267-12-02, chametova@msuie.ru

Аннотация. Рассмотрены особенности стационарного распределения температуры неньютоновского течения расплава полимера по высоте прямоугольного канала одношнекового экструдера, вызванные теплообменом.

Ключевые слова: *экструдер, расплав полимера, теплообмен, шнек, канал, распределение, температура, граничные условия, уравнение.*

Введение

Статья посвящена описанию особенностей стационарного распределения температуры неньютоновского течения расплава полимера по высоте прямоугольного канала шнека одношнекового экструдера, вызванных теплообменом между нижней стенкой канала и расплавом вблизи нижней стенки канала.

В работах [1-5] рассматривалась эта проблема. Однако описанные в них методики расчета не учитывают теплообмен, который, как правило, возникает между нижний стенкой канала и расплавом вблизи этой стенки. Так в [1, 2] приведены результаты численных расчетов, проведенных с помощью ЭВМ, распределения температуры по высоте канала неизотермического течения расплава полимера в следующих предположениях: температура нижней и верхней стенок канала постоянна, высота канала много меньше его ширины, расплав полимера имеет степенной реологический закон, при этом вязкость имеет экспоненциальную зависимость от температуры. В [3, 4] в тех же предположениях, что и в работах [1, 2] было построено аналитическое решение этой задачи для чисто вынужденного течения. В [3] решена задача нахождения распределения температуры по высоте канала для вынужденного течения, когда шнек адиабатический, а цилиндр экструдера изотермический. В [5] автором была решена задача нахождения распределения температуры по высоте канала шнека, при этом учитывалось наличие противотока, что не рассматривалось в [3] .

В отличие от выше приведенных работ в статье впервые дается качественное описание свойств распределения температуры неньютоновского течения расплава полимера, которое учитывает наличие теплообмена между нижний стенкой канала и расплавом полимера вблизи этой стенки.

Постановка задачи

Пусть $z \in R^+$ положительное направление оси канала шнека, а $y \in [0, H]$, где H – высота прямоугольного канала шнека экструдера, η – вязкость расплава полимера, υ_z – скорость течения расплава вдоль оси z, $\frac{\partial \upsilon_z}{\partial y}$ – скорость сдвига, λ – коэффициент теплопроводности, $T(y)$ – значение температуры расплава полимера в точке $y \in [0, H]$.

Предположим, что вязкость расплава полимера $\eta(y)$ описывается выражением:

$$\eta(y) = \eta_0 \cdot b \cdot \left(\frac{\partial \upsilon_z}{\partial y}(y) \right)^{n-1} \cdot e^{-a(T(y)-T(H))}, \qquad (1)$$

где: a, b – некоторые константы, n – индекс течения, который мы считаем постоянным, η_0 – начальная вязкость.

Пусть выполнены условия упрощенной теории потока, которые подробно описаны в [2]. Тогда скорость сдвига $\frac{\partial \upsilon_z}{\partial y}$ и температура $T(y)$ удовлетворяют следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{d}{dy}\left(\eta(y)\cdot\dfrac{\partial \upsilon_z}{\partial y}(y)\right) & (2) \\ \lambda\cdot\dfrac{d^2T}{dy^2} + \eta(y)\cdot\left(\dfrac{\partial \upsilon_z}{\partial y}(y)\right)^2 = 0 & (3) \end{cases},$$

где: $\dfrac{\partial P}{\partial z}$ – производная от давления по оси z, которая считается постоянной.

Сформулируем теперь граничные условия для системы уравнений (2) и (3):

$$\left.\frac{\partial \upsilon_z}{\partial y}(y)\right|_{y=0} = \dot{\gamma}_{\text{ст}},\ \upsilon_z(y)\big|_{y=H} = V_z, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}(y)\right|_{y=0} = -\frac{\alpha}{\lambda}\cdot\left(T(0)-T_1\right),\ T(y)\big|_{y=H} = T(H), \tag{5}$$

где: V_z — скорость движения верхней стенки канала экструдера, α — коэффициент теплопередачи, T_1 — температура нижней стенки канала экструдера.

Отметим, что условие (4) означает следующее: а) скорость сдвига течения у нижней стенки канала постоянна и равна $\dot{\gamma}_{\text{ст}}$, б) верхняя стенка канала движется с постоянной скоростью V_z. Из граничного условия (5) следует, что, во-первых, происходит теплообмен между нижней стенкой канала, имеющей температуру $T_1(0)$, и расплавом, а во-вторых, температура верхней стенки фиксирована, то есть осуществляется ее термостатирование.

Вывод уравнения и краевых условий, описывающих распределение обезразмеренной температуры расплава по обезразмеренной высоте канала

Сначала перейдем к новой системе координат.

$$\xi(y) = \frac{(y+y_0)^{\frac{3n+1}{2n}} - y_0^{\frac{3n+1}{2n}}}{(H+y_0)^{\frac{3n+1}{2n}} - y_0^{\frac{3n+1}{2n}}}, \tag{6}$$

где y_0 – параметр.

Очевидно, что у функции $\xi(y)$ существует обратная функция, т.е. $y(\xi)$:

$$y(\xi) = y_0 + \left(\xi\cdot(H+y_0)^{\frac{3n+1}{2n}} + y_0^{\frac{3n+1}{2n}}\cdot(1-\xi)\right)^{\frac{2n}{3n+1}}, \tag{7}$$

Очевидно, что:

1) $\xi(y)\big|_{y=0} = 0$, $\xi(y)\big|_{y=H} = 1$ и $\dfrac{d\xi}{dy}(y) > 0$ для любого $y\in[0,H]$,

2) $y(\xi)\big|_{\xi=0} = 0$, $y(\xi)\big|_{\xi=1} = H$ и $\dfrac{dy}{d\xi}(\xi) > 0$ для любого $\xi\in[0,1]$.

Таким образом, между ξ и y существует взаимнооднозначное соответствие.

Перейдем к безразмерной температуре. Обозначим:

$$\theta(y)\overset{\Delta}{=}\frac{a}{n}\cdot\left(T(y)-T(H)\right). \tag{8}$$

Тогда $\theta(y)$ с учетом (1) и (3) будет удовлетворять уравнению:

$$\frac{d^2\theta(y)}{dy^2}=-\frac{a}{n}\cdot\frac{\eta(y)}{\lambda}\cdot\left(\frac{\partial\upsilon_z}{\partial y}(y)\right)^2=-\frac{a}{n}\cdot\eta_0\cdot b\cdot\left(\frac{\partial\upsilon_z}{\partial y}(y)\right)^{n+1}\cdot e^{n\cdot\theta(y)}. \tag{9}$$

Рассмотрим уравнение (2). Из него следует, что для любого $y\in[0,H]$:

$$P_z(y+y_0)=\eta_0\cdot b\cdot\left(\frac{\partial\upsilon_z}{\partial y}(y)\right)^n\cdot e^{-n\cdot\theta(y)}. \tag{10}$$

Из (10) следует, что скорость сдвига $\frac{\partial\upsilon_z}{\partial y}(y)$ по определению всегда положительна и допускает представление:

$$\frac{d\upsilon_z}{dy}(y)=\left(\frac{P_z(y+y_0)}{\eta_0\cdot b}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot e^{-\theta(y)}. \tag{11}$$

Заметим, что из (11) следует:

1) в силу (4), имеем:

$$\dot{\gamma}_{\text{ст}}=\left(\frac{P\cdot y_0}{\eta_0\cdot b}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot e^{\theta(0)}, \tag{12}$$

2) $$\left.\frac{d\upsilon_z}{dy}(y)\right|_{y=H}=\left(\frac{P_z\cdot(H+y_0)}{\eta_0\cdot b}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{13}$$

Подставив (11) в (9), получим:

$$\frac{d^2\theta(y)}{dy^2}+\frac{a}{n}\cdot\eta_0\cdot b\cdot\left(\frac{P_z\cdot(y+y_0)}{\eta_0\cdot b}\right)^{\frac{n+1}{n}}\cdot e^{-\theta(y)}=0. \tag{14}$$

Теперь в (14) проведем замену переменных $\theta(y)=\theta_1(\xi(y))$, где функция $\xi(y)$ имеет вид (6). Тогда, учитывая, что

$$\frac{d\xi(y)}{dy}\cdot\frac{1}{(y+y_0)^{\frac{n+1}{2n}}}=1, \tag{15}$$

$$\xi_\Gamma\overset{\Delta}{=}\frac{2n}{3n+1}\cdot\left((H+y_0)^{\frac{3n+1}{2n}}-y_0^{\frac{3n+1}{2n}}\right), \tag{16}$$

получаем уравнение:

$$\frac{d^2\theta(\xi)}{d\xi^2}+\beta\cdot e^{\theta_1(\xi)}=0, \tag{17}$$

где:

$$\beta = \frac{a}{n \cdot \lambda} \cdot \frac{P_z^{\frac{n+1}{n}}}{\left(\eta_0 \cdot b\right)^{\frac{1}{n}}} \cdot \xi_\Gamma . \qquad (18)$$

Найдем граничные условия для уравнения (17). Заметим, что

$$\left. \frac{d\theta_1\left(\xi\left(y\right)\right)}{dy} \right|_{y=0} = \left. \frac{d\theta_1}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dy} \right|_{y=0}, \qquad (19)$$

которое с учетом (15) примет вид:

$$\left. \frac{d\theta_1\left(\xi\left(y\right)\right)}{dy} \right|_{y=0} = \left. \frac{d\theta_1}{d\xi}\left(\xi\right) \right|_{\xi=0} \cdot \frac{y_0^{\frac{n+1}{2n}}}{\xi_\Gamma}. \qquad (20)$$

Рассмотрим первое граничное условие в (5). Из (5) и (8) имеем:

$$\left. \frac{d\theta_1}{dy}\left(y\right) \right|_{y=0} = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{a}{n} \cdot \left. \left(T\left(y\right) - T_1\right) \right|_{y=0} = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{a}{n} \cdot \left. \left[\left(T\left(y\right) - T\left(H\right)\right) - \left(T_1 - T\left(H\right)\right) \right] \right|_{y=0} = , \qquad (21)$$
$$= -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \left. \left(\theta_1\left(y\right) - \tilde{\theta}_1\right) \right|_{y=0}$$

где: $\tilde{\theta}_1 \overset{\Delta}{=} \frac{a}{n} \cdot \left(T_1 - T\left(H\right)\right)$ – нормированная температура нижней стенки.

Из (20) и (21) следует, что:

$$\left. \frac{d\theta_1\left(\xi\left(y\right)\right)}{dy} \right|_{y=0} = \frac{d\theta_1}{d\xi}\left(0\right) \cdot y_0^{\frac{n+1}{2n}} = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \left(\theta_1\left(0\right) - \tilde{\theta}_1\right).$$

Отсюда граничное условие на нижней стенке канала имеет вид:

$$\left. \frac{d\theta_1}{d\xi}\left(\xi\right) \right|_{\xi=0} = -\mathrm{Nu} \cdot \left(\theta_1\left(0\right) - \tilde{\theta}_1\right), \qquad (22)$$

где: $\mathrm{Nu} \overset{\Delta}{=} \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{\xi_\Gamma}{y_0^{\frac{n+1}{2n}}}$ – число Нуссельта.

Рассмотрим теперь второе граничное условие (5). Очевидно, что оно имеет вид:

$$\left. \theta_1\left(\xi\right) \right|_{\xi=1} = 0. \qquad (23)$$

Таким образом, мы пришли к краевой задаче (22), (23) для обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (17).

Проведем понижение порядка уравнения (17). Для этого умножаем левую и правую часть (17) на $\frac{d\theta}{d\xi}\left(\xi\right)$, имеем:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\theta_1}{d\xi}\left(\xi\right) \right)^2 = -\beta \cdot \frac{d}{d\xi} e^{\theta_1\left(\xi\right)}. \qquad (24)$$

Проинтегрируем (24) в пределах от 0 до $\xi \in \left[0, H\right]$, имеем:

$$\left(\frac{d\theta_1}{d\xi}(\xi)\right)^2 = \left(\frac{d\theta_1}{d\xi}(\xi)\right)^2\Bigg|_{\xi=0} + 2\beta\cdot\left(e^{\theta_1(0)} - e^{\theta_1(\xi)}\right). \tag{25}$$

Из (25) следует, что левая часть равенства больше нуля, поэтому и его правая часть тоже больше нуля. Поэтому для любого $\xi \in [0,1]$ выполняется неравенство

$$\left(\frac{d\theta}{d\xi}(0)\right)^2 + 2\beta\cdot e^{\theta_1(0)} \geq 2\beta\cdot e^{\theta_1(\xi)}. \tag{26}$$

Из (26) следует, что (25) можно переписать в виде

$$\frac{d\theta}{d\xi}(\xi) = \pm\sqrt{\left(\frac{d\theta}{d\xi}(0)\right)^2 + 2\beta\cdot\left(e^{\theta_1(0)} - e^{\theta_1(\xi)}\right)}. \tag{27}$$

Теперь нужно выбрать знак, стоящий перед корнем в правой части (27).

Для этого рассмотрим уравнение (17) и граничное условие (22). Проинтегрируем (17) в пределах от нуля до $\xi \in [0,1]$, имеем

$$\frac{d\theta_1}{d\xi}(\xi) = \frac{d\theta_1}{d\xi}(0) - \beta\cdot\int_0^{\xi} e^{\theta_1(0)}du. \tag{28}$$

Исследуем правую часть (28). Здесь возможны два случая:

$$1)\ \frac{d\theta_1}{d\xi}(\xi) \leq 0, \qquad 2)\ \frac{d\theta_1}{d\xi}(\xi) > 0.$$

Рассмотрим первый случай. Из (28) и (22) следует, что для любых $\xi \in [0,1]$ выполняется неравенство

$$\frac{d\theta_1}{d\xi}(\xi) = -\mathrm{Nu}\cdot\left(\theta_1(0) - \tilde{\theta}_1\right) - \beta\cdot\int_0^{\xi} e^{\theta_1(0)}du \leq 0. \tag{29}$$

Очевидно, что если $\theta_1(0) \geq \tilde{\theta}_1$, то есть температура расплава полимера у нижней стенки больше температуры самой нижней стенки канала шнека экструдера, то (29) будет выполнено для любого $\xi \in [0,1]$. В этом случае $\theta_1(\xi)$ является убывающей функцией $\xi \in [0,1]$. При этом свои экстремальные значения она принимает в точках $\xi = 0$ и $\xi = \xi_1$, т.е.

$$\max_{\xi\in[0,1]} \theta_1(\xi) = \theta_1(0), \tag{30}$$

$$\min_{\xi\in[0,1]} \theta_1(\xi) = \theta_1(1). \tag{31}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\theta_1(0) < \tilde{\theta}_1$ и для любого $\xi \in [0,1]$ выполняется неравенство:

$$\theta_1(0) + \frac{\beta}{\mathrm{Nu}}\cdot\int_0^{\xi} e^{\theta(u)}du \geq \tilde{\theta}_1. \tag{32}$$

Очевидно, что в силу непрерывности функции $\theta(u)$ найдется такое $\xi^* \in [0,1]$, что выполняется равенство $\theta_1(0) + \frac{\beta}{\mathrm{Nu}}\cdot\int_0^{\xi^*} e^{\theta(u)}du = \tilde{\theta}_1$. Следовательно, для всех $\xi \in (0,\xi^*]$

имеем $\dfrac{d\theta}{d\xi}(\xi) = -\mathrm{Nu}\cdot\left(\theta_1(0)-\tilde{\theta}_1\right)-\beta\cdot\int_0^{\xi} e^{\theta_1(u)}du \ge 0$, где $\dfrac{d\theta}{d\xi}(\xi^*)=0$, а для $\xi\in\left(\xi^*,1\right]$ имеем $\dfrac{d\theta}{d\xi}(\xi)\le 0$.

В этом случае $\theta(\xi)$ является вогнутой функцией, поскольку из уравнения (17) следует, что для любого $\xi\in(0,1)$ $\dfrac{d^2\theta}{d\xi^2}(\xi)\le 0$. Следовательно, $\max\limits_{\xi\in[0,1]}\theta(\xi)=\theta(\xi^*)$, $\min\limits_{\xi\in[0,1]}\theta(\xi)=\min\left(\theta(0),\theta(H)\right)$.

Из (29) следует, что надо выбирать знак “–” в выражении, стоящем в правой части.

Рассмотрим теперь второй случай. Из (28) и (22) следует, что для любого $\xi\in(0,1)$ справедливо неравенство

$$\frac{d\theta_1}{d\xi}(\xi) = -\mathrm{Nu}\cdot\left(\theta_1(0)-\tilde{\theta}_1\right)-\beta\cdot\int_0^{\xi} e^{\theta(u)}du > 0. \tag{33}$$

Из (33) следует, что для любого $\xi\in(0,1)$ неравенство получает вид:

$$\tilde{\theta}_1 > \theta_1(0)+\frac{\beta}{\mathrm{Nu}}\cdot\int_0^{\xi} e^{\theta(u)}du. \tag{33a}$$

Следовательно, в силу произвольности ξ, имеем неравенство $\tilde{\theta}_1 > \theta_1(0)+\dfrac{\beta}{\mathrm{Nu}}\cdot\int_0^{1} e^{\theta(u)}du$. Значит $\tilde{\theta}_1>\theta_1(0)$ и $\tilde{\theta}_1\ge\dfrac{\beta}{\mathrm{Nu}}\cdot\int_0^{\xi} e^{\theta(u)}du$.

Из (33) также следует, что $\theta_1(\xi)$ является возрастающей функцией ξ. Поэтому в силу граничного условия (23) имеем

$$\max_{\xi\in[0,1]}\theta_1(\xi)=\theta_1(1)=0, \tag{34}$$

$$\min_{\xi\in[0,1]}\theta_1(\xi)=\theta(0)\le 0. \tag{35}$$

Следовательно, в этом случае в правой части (27) надо выбирать знак “+”. Рассмотрим (27). Так как $\theta_1(0)<\theta_1(\xi)$, то имеем для любого ξ

$$0<\frac{d\theta_1}{d\xi}(\xi)=\sqrt{\left(\frac{d\theta_1}{d\xi}(0)\right)^2+2\beta\left(e^{\theta_1(0)}-e^{\theta(\xi)}\right)}<\frac{d\theta_1}{d\xi}(0).$$

Отсюда следует

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{d\theta_1}{d\xi}(\xi)=\frac{d\theta_1}{d\xi}(0)<\frac{d\theta_1}{d\xi}(0).$$

Мы пришли к противоречию. Значит, второй случай невозможен.

Выводы

1) В правой части (27) надо выбрать знак “–”, поэтому уравнение (27) будет иметь вид:

$$\frac{d\theta_1}{d\xi}(\xi)=-\sqrt{\mathrm{Nu}^2\cdot\left(\theta_1(0)-\tilde{\theta}_1\right)^2+2\beta\cdot\left(e^{\theta_1(0)}-e^{\theta_1(\xi)}\right)}, \tag{36}$$

причем $\theta_1(0) \geq \theta_1(\xi)$ для любого $\xi \in [0,1]$.

2) Температура расплава полимера $\theta_1(\xi)$ является убывающей вогнутой функцией $\xi \in (0,1)$, поэтому $\max\limits_{\xi\in[0,1]} \theta(\xi) = \theta(0)$, а $\min\limits_{\xi\in[0,1]} \theta(\xi) = \theta(1)$.

3) Если температура нижний стенки $\tilde{\theta}_1$ не равна температуре расплава полимера у нижний стенки канала экструдера, то имеет место скачок температуры, равный $\tilde{\theta}_1 - \theta_1(0)$. Если этот скачок умножить на коэффициент конвективной теплопередачи, то получившаяся величина определяет поток теплообмена между нижний стенкой канала и расплавом у стенки канала, а также его направление.

Литература

1. Colwell R. E., Nicholls K.R. Ind. Eng. Chem., 1959. 51, 841 P.
2. Мак-Келви Д.М. Переработка полимеров. М.: Химия, 1965. 444 с.
3. Раувендааль К. Экструзия полимеров. С-Пб.: Профессия, 2008. 762 с.
4. Gavis J., Laurence R.L. Ind. Eng. Chem. Fundam., 1968. 7, 232-239, 525-527 P.
5. Хаметова М.Г. Стационарное распределение температуры расплава полимера по высоте канала одношнекового экструдера. Пластические массы, 2012. № 6, с. 41-42.

Исследование работы фильтров обезжелезивания

к.т.н. доц. Веригина Е.Л., Ефременко Т.Б., Суродеева Л.С., Щибро Е.О.
Университет машиностроения
84992671970

Аннотация. Целью исследовательской работы явился выбор оптимальной фильтрующей загрузки для напорных фильтров на станции обезжелезивания воды артезианских скважин. При увеличении производительности станции за счет повышения скорости фильтрования происходит увеличение потерь напора и снижение продолжительности фильтроцикла. Означенная проблема явилась причиной изучения фильтрующей загрузки альтернативной, кварцевому песку.

Ключевые слова: дефферизация воды, скорость фильтрования, продолжительность фильтроцикла, безреагентное обезжелезивание, двухвалентное железо, дробленый керамзит.

Введение

В подземных водах Подмосковья железо обычно находится в форме бикарбоната закисного железа, это восстановленное железо является растворимым и иногда образует устойчивые комплексы. Для деферризации воды используются физико-химические и биологические методы обработки.

Технология безреагентного обезжелезивания – (аэрация+фильтрация) предназначена для обработки подземных вод с максимальным содержанием двухвалентного железа, не превышающим 7 мг/л, предельно допустимым содержанием марганца, гуминовых кислот, аммония и умеренной карбонатной агрессивностью [1].

Первая стадия обработки основана на окислении двухвалентного железа кислородом воздуха.

$$4Fe^{+2} + O_2 + 8OH^- + 2H_2O \rightarrow \underline{4Fe(OH)_3} \qquad (1)$$

Кинетика окисления двухвалентного железа выражается уравнением:

$$\frac{-d(Fe^{+2})}{dt} = k(Fe^{+2})(OH^-)^2 P_{O_2}, \qquad (2)$$

где: k – константа, зависящая от температуры и буферной емкости воды;