

**К вопросу моделирования микропрофиля дороги по колеям**

к.т.н. доц. Чабунин И.С.

Университет машиностроения

8(495)223-05-23 (доб. 1457), tchabunin@rambler.ru

*Аннотация.* В статье рассматривается вопрос моделирования случайного микропрофиля дорожной поверхности по различным колеям методом формирующего фильтра. Получены дифференциальные уравнения формирующего фильтра для экспоненциальной корреляционной функции.

*Ключевые слова:* микропрофиль дорожной поверхности, формирующий фильтр, случайный процесс

Как правило, микропрофиль дорожной поверхности рассматривается как случайная функция только одного переменного  $x$  – координаты некоторой (обычно срединной) плоскости, относительно которой измеряют высоту  $q$  неровностей поверхности дороги. Тогда ее исчерпывающей статистической характеристикой будет корреляционная функция микропрофиля сечения вдоль дороги. При среднем значении (математическом ожидании), равном нулю, корреляционная функция будет иметь вид:

$$R_q(x_s) = \langle q(x) \cdot q(x + x_s) \rangle, \quad (1)$$

где:  $\langle \dots \rangle$  – символ осреднения.

Для расчетов полученные по экспериментальным данным корреляционные функции обычно аппроксимируют соответствующими аналитическими выражениями:

$$R_q(x_s) = \sigma_q^2 \cdot \left( A_1 \cdot e^{-\alpha_1 |x_s|} + A_2 \cdot e^{-\alpha_2 |x_s|} \cdot \cos \beta_1 x_s \right), \quad (2)$$

$$R_q(x_s) = \sigma_q^2 \cdot e^{-\alpha_3 |x_s|}, \quad (3)$$

$$R_q(x_s) = \sigma_q^2 \cdot e^{-\alpha_4 |x_s|} \cdot \cos \beta_2 |x_s|, \quad (4)$$

где:  $A_1, A_2$  – весовые коэффициенты ( $A_1 + A_2 = 1$ );

$\alpha_i$  – параметры, характеризующие быстроту затухания корреляционной связи ординат микропрофиля;

$\beta_1$  – параметр, характеризующий гармоническую составляющую микропрофиля;

$\sigma_q^2 = R_q(0)$  – дисперсия

Численные значения параметров  $A_i, \alpha_i, \beta_i$  определяют, например, по методу наименьших квадратов, исходя из построенного по результатам замеров реального микропрофиля корреляционной функции.

В теоретических исследованиях значения  $q(x)$  могут быть комплексными, поэтому наряду с функцией (1) рассматривают комплексно-сопряженную. При этом в окончательных расчетах используют только действительную часть получаемых комплексных выражений, а оператор вычисления действительной части этих выражений, как правило, не указывают. В этом случае вместо соотношения (1) применяют выражение

$$R_q(x_s) = \langle q^*(x) \cdot y(x + x_s) \rangle, \quad (5)$$

где: «\*» – знак комплексно-сопряженной величины.

Наряду с корреляционной функцией достаточной характеристикой стационарной случайной функции является ее спектральная функция  $S_q(\theta)$ , где:  $\theta$  – «путевая» частота ( $\theta = \frac{2\pi}{s}$ ,  $s$  – длина неровности). Функции  $R_q(x_s)$  и  $S_q(\theta)$  связаны между собой преобразованием Фурье (формулы Винера-Хинчина):

$$R_q(x_s) = \int_{-\infty}^{\infty} S_q(\theta) \cdot e^{i\theta x_s} \cdot d\theta, \quad (6)$$

$$S_q(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_q(x_s) \cdot e^{-i\theta x_s} \cdot dx_s. \quad (7)$$

В технических приложениях спектральные плотности определяются только для положительных частот. Для их обозначения введем волнистую черту сверху. Тогда:

$$\tilde{S}_q(\theta) = 2 \cdot S_q(\theta), \quad (8)$$

$$R_q(x_s) = \int_{-\infty}^{\infty} S_q(\theta) \cdot e^{i\theta x_s} \cdot d\theta = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \tilde{S}_q(\theta) \cdot e^{i\theta x_s} \cdot d\theta = \int_0^{\infty} \tilde{S}_q(\theta) \cdot e^{i\theta x_s} \cdot d\theta, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_q(\theta) &= 2 \cdot S_q(\theta) = 2 \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_q(x_s) \cdot e^{-i\theta x_s} \cdot dx_s \right) = \\ &= 2 \left( \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot \int_0^{\infty} R_q(x_s) \cdot e^{-i\theta x_s} \cdot dx_s \right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_q(x_s) \cdot e^{-i\theta x_s} \cdot dx_s. \end{aligned} \quad (10)$$

Соответствующие корреляционным функциям (2) – (4) выражения для спектральных плотностей имеют вид:

$$\tilde{S}_q(\theta) = 2 \cdot \sigma_q^2 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \left( A_1 \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \theta^2} + A_2 \cdot \frac{\alpha_2^2 + \beta_1^2 + \theta^2}{(\theta^2 - \alpha_2^2 - \beta_1^2)^2 + 4\alpha_2^2\theta^2} \right), \quad (11)$$

$$\tilde{S}_q(\theta) = 2 \cdot \sigma_q^2 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\alpha_3}{(\alpha_3^2 + \theta^2)}, \quad (12)$$

$$\tilde{S}_q(\theta) = 2 \cdot \sigma_q^2 \cdot \frac{\alpha_4}{\pi} \cdot \frac{\alpha_4^2 + \beta_2^2 + \theta^2}{(\theta^2 - \alpha_4^2 - \beta_2^2)^2 + 4\alpha_4^2\theta^2}. \quad (13)$$

При исследовании случайных колебательных процессов в автомобиле, вызванных действием случайного микропрофиля дороги, в качестве аргумента обычно принимается время  $t$ . Если принять скорость движения транспортного средства  $v$  постоянной, то  $x = v \cdot t$ . При  $v = 1$  м/с  $x = t$  и случайная функция  $q(x)$  перейдет в случайный процесс  $q(t)$  при единичной скорости.

Однако при рассмотрении вопроса колебаний автомобиля в поперечной плоскости невозможно ограничиться микропрофилем только по одной колее. Неровности дороги, по которым движутся левые и правые колеса, в каждый момент времени не совпадают друг с другом. Кроме того, при несовпадении колес различных осей неровности дороги только под левыми и только под правыми колесами также будут различными. Поэтому модели дорожных неровностей в функциях одной координаты оказывается недостаточно. В общем случае дорожные возмущения должны быть охарактеризованы под каждым колесом транспортного средства. Воспользоваться процедурой численного моделирования продольного микропрофиля дважды (для левой и правой колее) или четырежды также не представляется возможным, так как можно получить совершенно нелепые результаты. Отсюда следует, что в случае исследования пространственного колебательного процесса автомобиля микропрофиль дорожного покрытия должен быть представлен в виде функции от двух координат, например  $q(x, y)$  (рисунок 1). При этом обычных корреляционных функций (2) – (4) оказывается недостаточно. Микропрофиль дороги представляется в этом случае двумерным случайным полем.

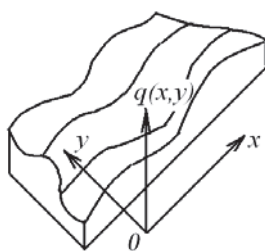
Рассмотрим микропрофиль дорожной поверхности по двум колеем, показанным на рисунке 2, расстояние между которыми равно  $B$ . Получим корреляционную функцию  $R_{\Delta_{mn}}(\tau)$  превышения ординат, например, правой колее над ординатами левой  $\Delta_{mn}$ :

$$\Delta_{mn}(t) = q_n(t) - q_l(t), \quad R_{\Delta_{mn}}(\tau) = \langle (q_n(t) - q_l(t)) \cdot (q_n(t + \tau) - q_l(t + \tau)) \rangle.$$

Раскрывая скобки, получим:

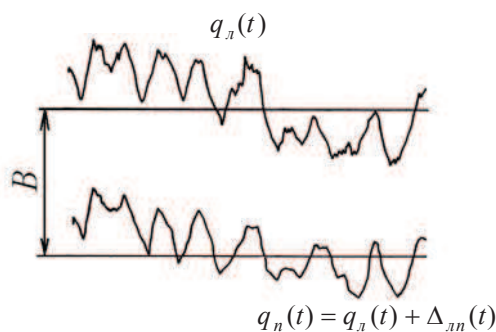
$$R_{\Delta_{ln}}(\tau) = \langle q_n(t) \cdot q_n(t + \tau) - 2 \cdot q_n(t) \cdot q_n(t + \tau) + q_n(t) \cdot q_n(t + \tau) \rangle = R_{q_n}(\tau) - 2R_{q_{ln}}(\tau) + R_{q_n}(\tau),$$

где:  $R_{q_{ln}}(\tau)$  – взаимная корреляционная функция ординат правой и левой колеи дороги.



**Рисунок 1. Микропрофиль поверхности дороги как функция двух переменных**

Так как статистические характеристики микропрофиля дороги для правой и левой колеи практически одинаковы, то одинаковы будут и их корреляционные функции, т.е.  $R_{q_l}(\tau) = R_{q_n}(\tau)$ . Значит,  $R_{\Delta_{ln}}(\tau) = 2R_{q_n}(\tau) - 2R_{q_{ln}}(\tau)$ .



**Рисунок 2. Микропрофили дорожной поверхности по двум колеям**

Возможен и другой подход. Так как по левой и правой колеям спектральные плотности микропрофиля дорожной поверхности практически совпадают, то можно принять, что модель микропрофиля, построенная для одной колеи, статистически соответствует модели случайной функции, описывающей полусумму текущих ординат микропрофиля под левым и правым колесами. Следовательно, если имеются спектральная плотность какого-то одного сечения  $S_q(\omega)$  и коэффициент корреляции  $\rho(\omega)$ , то спектральные плотности полусуммы  $S_{0,5(q_l+q_n)}(\omega)$  и полуразности  $S_{0,5(q_l-q_n)}(\omega)$  ординат могут быть определены по следующим выражениям [1]:

$$S_{0,5(q_l+q_n)}(\omega) = S_q(\omega) \frac{1 + \rho(\omega)}{2}, \quad (14)$$

$$S_{0,5(q_l-q_n)}(\omega) = S_q(\omega) \frac{1 - \rho(\omega)}{2}, \quad (15)$$

где:  $\rho(\omega) = \left[ 1 + \left( \frac{B\omega}{n} \right)^2 \right]^{-1}; \quad (16)$

$B$  – ширина колеи;

$n$  – коэффициент, зависящий от вида спектральной плотности.

Численные значения коэффициента  $n$  для различных дорог приведены в [1].

Рассмотрим получение дискретных значений микропрофиля при единичной скорости в отдельные чередующиеся друг за другом моменты времени, соответствующие шагу дискретизации, методом формирующего фильтра. Для этого рассмотрим систему, описываемую уравнением [2]:

$$L_1 \{q(t)\} = L_2 \{q_0(t)\}, \quad (17)$$

где линейные дифференциальные операторы  $L_1$  и  $L_2$  определяются соотношениями:

$$L_1 = a_0 \frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{d}{dt} + a_n, \quad (18)$$

$$L_2 = b_0 \frac{d^m}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{d}{dt} + b_m, \quad (19)$$

( $m, n \geq 0; m \leq n-1$ ).

В этих выражениях  $q(t)$  – моделируемый случайный процесс с заданной спектральной плотностью в виде дробно-рациональной функции,  $q_0(t)$  – так называемый «белый шум» [3]

со спектральной плотностью  $\tilde{S}_0(\omega) = \frac{1}{\pi} = const$ .

Спектральные плотности процессов  $q(t)$  и  $q_0(t)$  связаны соотношением:

$$\tilde{S}_q(\omega) = \frac{|b_0(i\omega)^m + b_1(i\omega)^{m-1} + \dots + b_{m-1}(i\omega) + b_m|^2}{|a_0(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(i\omega) + a_n|^2} \cdot \tilde{S}_0(\omega). \quad (20)$$

Из (20) следует, что поставленная задача может быть решена соответствующим подбором коэффициентов  $a_i$  и  $b_j$  ( $i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m$ ).

Сформируем микропрофиль со спектральной плотностью, например (12). Тогда согласно (14) – (16):

$$\tilde{S}_{0,5(q_r+q_n)}(\omega) = 2 \cdot \sigma_q^2 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\alpha_3}{(\alpha_3^2 + \omega^2)} \cdot \frac{1 + \frac{1}{\xi\omega^2}}{2} = \sigma_q^2 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\alpha_3\xi\omega^2 + 2\alpha_3}{\xi\omega^4 + (\alpha_3^2\xi + 1)\omega^2 + \alpha_3^2}, \quad (21)$$

$$\tilde{S}_{0,5(q_r-q_n)}(\omega) = 2 \cdot \sigma_q^2 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\alpha_3}{(\alpha_3^2 + \omega^2)} \cdot \frac{1 - \frac{1}{\xi\omega^2}}{2} = \sigma_q^2 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\alpha_3\xi\omega^2}{\xi\omega^4 + (\alpha_3^2\xi + 1)\omega^2 + \alpha_3^2}, \quad (22)$$

где:  $\xi = \left(\frac{B}{n}\right)^2$ .

Приравниваем правые части выражений (20) и (21):

$$\frac{|b_0(i\omega)^m + b_1(i\omega)^{m-1} + \dots + b_{m-1}(i\omega) + b_m|^2}{|a_0(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(i\omega) + a_n|^2} \cdot \tilde{S}_0(\omega) = \sigma_q^2 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\alpha_3\xi\omega^2 + 2\alpha_3}{\xi\omega^4 + (\alpha_3^2\xi + 1)\omega^2 + \alpha_3^2}.$$

Тогда, так как  $\tilde{S}_0(\omega) = \frac{1}{\pi}$ , то  $m = 1$ ;  $b_0 = \sigma_q\sqrt{\xi\alpha_3}$ ;  $b_1 = \sigma_q\sqrt{2\alpha_3}$ ;  $n = 1$ ;  $a_0 = \sqrt{\xi}$ ;

$a_1 = \alpha_3\sqrt{\xi} + 1$ ;  $a_2 = \alpha_3$ .

По зависимостям (18), (19) определяем  $L_1$  и  $L_2$  и подставляем их в выражение (17):

$$\sqrt{\xi}\ddot{q} + (\alpha_3\sqrt{\xi} + 1)\dot{q} + \alpha_3q = \sigma_q\sqrt{\xi\alpha_3}\dot{q}_0 + \sigma_q\sqrt{2\alpha_3}q_0.$$

Тогда

$$\ddot{q} + \left(\alpha_3 + \frac{1}{\sqrt{\xi}}\right)\dot{q} + \frac{\alpha_3}{\sqrt{\xi}}q = \sigma_q\sqrt{\alpha_3}\dot{q}_0 + \sigma_q\sqrt{\frac{2\alpha_3}{\xi}}q_0. \quad (23)$$

Обозначим  $\ddot{q} - \sigma_q\sqrt{\alpha_3}\dot{q}_0 = \dot{q}_1$ . После интегрирования получим:

$$\dot{q} - \sigma_q\sqrt{\alpha_3}q_0 = q_1.$$

Выражаем  $\dot{q} = \sigma_q\sqrt{\alpha_3}q_0 + q_1$  и подставляем в выражение (23). Таким образом, от дифференциального уравнения второго порядка (23) переходим к системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{q} = q_1 + \sigma_q\sqrt{\alpha_3}q_0; \\ \dot{q}_1 = -\left(\alpha_3 + \frac{1}{\sqrt{\xi}}\right)q_1 - \frac{\alpha_3}{\sqrt{\xi}}q + \sigma_q\sqrt{\alpha_3}\left(-\alpha_3 + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{\xi}}\right)q_0. \end{cases} \quad (24)$$

Теперь приравниваем правые части выражений (20) и (22):

$$\frac{|b_0(i\omega)^m + b_1(i\omega)^{m-1} + \dots + b_{m-1}(i\omega) + b_m|^2}{|a_0(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(i\omega) + a_n|^2} \cdot \tilde{S}_0(\omega) = \sigma_q^2 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\alpha_3\xi\omega^2}{\xi\omega^4 + (\alpha_3^2\xi + 1)\omega^2 + \alpha_3^2}.$$

Тогда  $\tilde{S}_0(\omega) = \frac{1}{\pi}$ ;  $m = 1$ ;  $b_0 = \sigma_q \sqrt{\xi \alpha_3}$ ;  $b_1 = 0$ ;  $n = 1$ ;  $a_0 = \sqrt{\xi}$ ;  $a_1 = \alpha_3 \sqrt{\xi} + 1$ ;  $a_2 = \alpha_3$ .

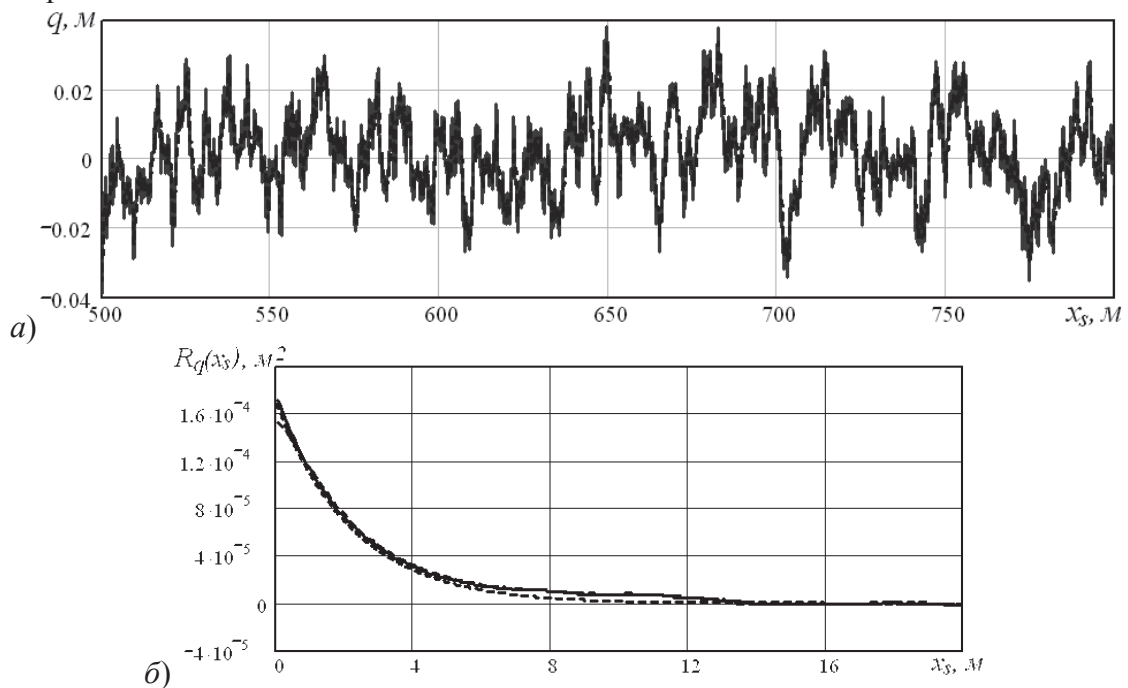
По зависимостям (18), (19) определяем  $L_1$  и  $L_2$  и подставляем их в выражение (17):

$$\sqrt{\xi} \ddot{q} + (\alpha_3 \sqrt{\xi} + 1) \dot{q} + \alpha_3 q = \sigma_q \sqrt{\xi \alpha_3} \dot{q}_0.$$

Опять переходим к системе дифференциальных уравнений первого порядка – уравнениям формирующего фильтра:

$$\begin{cases} \dot{q} = q_1 + \sigma_q \sqrt{\alpha_3} q_0; \\ \dot{q}_1 = -\left(\alpha_3 + \frac{1}{\sqrt{\xi}}\right) q_1 - \frac{\alpha_3}{\sqrt{\xi}} q - \sigma_q \sqrt{\alpha_3} \left(\alpha_3 + \frac{1}{\sqrt{\xi}}\right) q_0. \end{cases} \quad (25)$$

При помощи полученных уравнений сформируем микропрофили дорожной поверхности при следующих исходных данных:  $\sigma_q = 0,013 м$ ;  $\alpha_3 = 0,45 с^{-1}$ ;  $B = 1,8 м$ ;  $n = 4,5$ . Они приведены на рисунке 3а. Для проверки адекватности математической модели на рисунке 3б приведены графики корреляционных функций, построенные для смоделированных профилей по левой (сплошная линия), правой (штрих-пунктирная линия) колеям, а также график исходной корреляционной функции (штриховая линия). Как видно из рисунка 3б, они достаточно хорошо совпадают.



**Рисунок 5. Смоделированные микропрофили дорожной поверхности по двум колеям и соответствующие корреляционные функции**

Аналогичным образом по изложенной методике можно смоделировать микропрофили дорожных поверхностей, описываемых дробно-рациональными функциями спектральных плотностей.

### Литература

1. Динамика системы дорога-шина-автомобиль-водитель. / А.А. Хачатуров, В.Л. Афанасьев, В.С. Васильев и др. Под ред. А.А. Хачатурова. – М.: Машиностроение, 1976. – 535 с.
2. Надежность механических систем и конструкций при случайных воздействиях. / А.С. Гусев, А.Л. Карунин, Н.А. Крамской, С.А. Стародубцева. Под ред. А.Л. Карунина. – МГТУ «МАМИ», 2001. – 284 с.
3. Шалыгин А.С. Прикладные методы статистического моделирования. / А.С. Шалыгин, Ю.И. Палагин. – Л.: Машиностроение. Ленингр. отд., 1986. – 320 с.