

предполагаемого качества изделий, разработанных на стадии РД, вносят в документацию необходимые изменения благодаря чему значительно сокращается трудоемкость и себестоимость получения качественных изделий на последующих стадиях производства.

### Литература

1. Артоболевский А.А. Механизмы в современной технике. Справочник в семи томах, издание второе, М., изд. «Наука», 1980 г.
2. Крайнев А.Ф. Идеология конструирования. М., изд. «Машиностроение», 2003 г.
3. Орлов П.И. Основы конструирования. Справочник в 2-х томах. М., изд. «Машиностроение», 1988г.
4. Зайцев С.А. и др. Метрология, стандартизация и сертификация в машиностроении. М., изд. «Академия», 2009г., 280 стр.
5. Метрология. Учебник. Под общей редакцией Зайцева С.А. М., Изд. «Форум», 2009г., 460 стр.

### **Математическая модель электроэрозионного резания и задачи управления процессом обработки**

к.т.н., доц., Овсянников Б.Л.

МИЭМ НИУ ВШЭ

8(499)-235-20-87, [obl\\_d@mail.ru](mailto:obl_d@mail.ru)

*Аннотация:* Разработана математическая модель процесса электроэрозионного резания, аккумулирующая имеющиеся опытные данные о течении процесса и позволяющая синтезировать системы управления методами теории автоматического управления. Исследована проблема устойчивости процесса обработки на предельных режимах.

*Ключевые слова:* электроэрозионная обработка, резание, инструмент, жёсткость, динамика, управление, математическая модель, устойчивость

### **Задачи управления процессом электроэрозионного резания и динамика системы электродов**

Современный уровень развития электроэрозионной обработки требует совершенствования систем управления на основе развития научных представлений о динамических свойствах процесса обработки [1,2] Задача управления процессом электроэрозионного резания, или вырезной электроэрозионной обработки (ВЭЭО) сводится к двум подзадачам:

- управление перемещением проволочного электрода-инструмента (ПЭИ) в пространстве по заданной траектории;
- управление скоростью перемещения ПЭИ.

Данная работа посвящена исследованию взаимосвязи динамики величины межэлектродного промежутка (МЭП) с задачами управления процессом ВЭЭО.

Как известно, в процессе ЭЭО в МЭП возникают силы, создаваемые электрическими разрядами, направленные на электроды и стремящиеся увеличить межэлектродное расстояние [3]. Влияние этого явления на точность ВЭЭО исследовалось в разных аспектах [4,5]. В частности, в [4] указывается на то, что прогиб ПЭИ оказывает влияние на точность воспроизведения формы детали, особенно при изменении направления резания и при обработке элементов контура детали с большой кривизной. Это явление влияет также и на процесс управления скоростью перемещения проволочного электрода-инструмента. Для теоретически обоснованного решения задачи управления процессом ВЭЭО необходимо наличие адекватной и в то же время логически простой математической модели, аккумулирующей имеющиеся опытные данные о динамике процесса, приведённые в [3]. Как известно, наиболее эффективным описанием динамики объекта в целях построения системы управления является дифференциальная математическая модель в пространстве переменных состояния.

Процесс ЭЭО обладает способностью к саморегулированию [6]. Это связано с тем, что

линейная скорость резания возрастает с уменьшением МЭП в некотором диапазоне межэлектродных расстояний, и в результате флуктуации величины МЭП, скорости эрозии или подачи компенсируются так называемой «внутренней» отрицательной обратной связью. Для целей управления процессом обработки желательно исследовать это явление как для случая жёстких электродов, так и для электродов с ограниченной жёсткостью, однако в последнем случае математическая модель оказывается сложнее. Поэтому сначала приведём описание динамики обработки для случая жёстких электродов.

### Дифференциальная модель процесса ЭЭО для жёстких электродов

Выберем в качестве переменной состояния, отражающей течение процесса обработки величину МЭП. От величины МЭП при прочих равных условиях зависит интенсивность процесса. Величина МЭП может изменяться как под действием процесса ЭЭО, так и с помощью привода подачи – является управляемой. Величина МЭП также является косвенно наблюдаемой по различным электрическим сигналам, таким как амплитуда напряжения пробоя, амплитуда импульсов тока, по наличию импульсов короткого замыкания и холостого хода и прочих сигналов, связанных с указанными.

Для разработки модели процесса сделаем допущения:

- электрод деталь (ЭД) разрушается равномерно по всей поверхности взаимодействия;
- электрод инструмент (ЭИ) не разрушается (восстанавливается в результате перемотки при ВЭЭ);
- площадь обработки постоянна.

При сделанных допущениях можно рассматривать только линейную скорость разрушения заготовки как функцию величины МЭП. Большинство исследователей отмечают экстремальный характер зависимости скорости эрозии от величины МЭП [6,7]. Конкретный вид кривой зависит от типа генератора импульсов, условий эвакуации продуктов эрозии и других факторов. На рисунке 1 приведена некоторая гипотетическая зависимость скорости эрозии от величины МЭП  $\dot{d}(d)$  – кривая а). Данная кривая получена путём сопоставления скорости подачи ЭД -  $V_{\text{п}}$ , совпадающей при стационарном течении процесса со скоростью эрозии, с величиной МЭП по методике, изложенной в [6]. В верхней части рисунка показаны различные положения ЭД по отношению к ЭИ при различных скоростях подачи: 1 -  $V_{\text{п}} = 0$ ;  $d = d_m$ ; 2 -  $V_{\text{п}} = 0,8V_{\text{эм}}$ ;  $d \in [d_0, d_{\text{эм}}]$ ; 3 -  $V_{\text{п}} = V_{\text{эм}}$ ;  $d = d_0$ ; 4 -  $V_{\text{п}} = 0,4V_{\text{эм}}$ ;  $d \in (0, d_0]$  на начальном участке характеристики. Важно, чтобы скорость подачи не превосходила максимальную линейную скорость эрозии:  $V_{\text{п}} \leq V_{\text{эм}}$ .

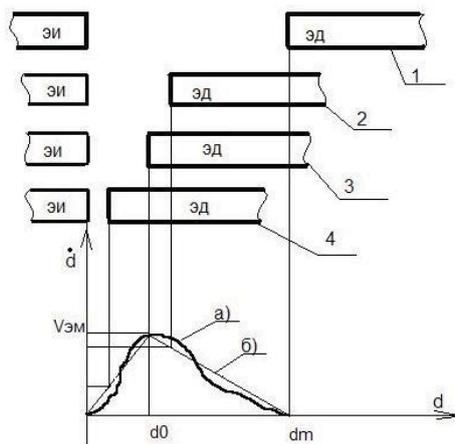


Рисунок 1. Зависимость скорости реза от величины МЭП

Для построения математической модели аппроксимируем её ломаной, кривой б) на рисунке 1. Запишем уравнения участков аппроксимирующей ломаной линии в координатах  $\dot{d}, d$ :

$$\dot{d} = \frac{V_{\text{эм}}}{d_0} d - V_{\text{п}} \quad d \in (0, d_0] \quad (1)$$

$$\dot{d} = \frac{V_{\text{эм}}}{d_m - d_0} (d_m - d) - V_{\text{п}} \quad d \in (d_0, d_m] \quad (2)$$

Здесь  $\dot{d}$  – производная величины МЭП по времени.

Уравнения (1) и (2) описывают динамику изменения МЭП. Скорость подачи отрицательна, так как направлена на сближение электродов. Положение ЭД на начальном участке возрастания скорости эрозии неустойчиво – уравнение (1), «внутренняя» обратная связь положительна. Уравнение (2) описывает устойчивый процесс обработки с эффектом саморегулирования. Введём обозначения:

$$k_0 = \frac{V_{эм}}{d_0}; k_2 = \frac{V_{эм}}{d_m - d_0} \quad (3)$$

В (3):  $V_{эм} \left[ \frac{\text{мкм}}{\text{с}} \right]$  – максимальная линейная скорость процесса электроэрозии,  $d_m, d_0$  – максимальное и минимальное значения величины МЭП, измеренные в микрометрах (область устойчивости),  $k_0$  и  $k_2$  – градиенты скорости реза в линейном приближении.

### Дифференциальная модель процесса ЭЭО для упругих электродов

Для построения модели динамики процесса в случае упругих электродов сделаем следующие допущения:

- на ПЭИ действует равномерно распределённая постоянная сила, создаваемая электрическими разрядами, в результате чего ПЭИ имеет некоторый прогиб;

- ПЭИ не растяжим и не обладает жёсткостью, прогиб образуется за счёт вытягивания ПЭИ из системы перемотки;

- величина прогиба зависит от натяжения ПЭИ, расстояния между направляющими и толщины детали и интенсивности процесса;

- трение в направляющих системы перемотки и натяжения ПЭИ не учитывается.

Приведём здесь основные выводы работы [3], используемые для построения модели процесса:

- интегральные силы электрических разрядов возрастают с уменьшением величины МЭП практически по линейному закону и могут быть уподоблены действию упругого элемента с фиксированным коэффициентом жёсткости;

- зависимость интегральной силы от величины МЭП подобна аналогичной зависимости линейной скорости реза, и они могут быть охарактеризованы соответствующими коэффициентами;

- в процессе обработки ПЭИ находится в состоянии устойчивого равновесия под действием двух противоположно направленных сил, интегральной силы, создаваемой электрическими разрядами, и силы, создаваемой системой натяжения, линейно зависящей от величины прогиба ПЭИ.

Для построения модели введём обозначения согласно [3]:

$$k_1 = \frac{4F_H}{\left(L - \frac{H}{2}\right)}; k_3 = \frac{F_{эм}}{d_m - d_0} \quad (4)$$

где  $k_1$  – коэффициент жёсткости ПЭИ;

$k_3 \left[ \frac{\text{Н}}{\text{мкм}} \right]$  – градиент силы, создаваемый электрическими разрядами (эквивалентная жёсткость процесса ЭЭО);

$F_H$  – сила натяжения ПЭИ;

$L$  – расстояние между направляющими;

$H$  – толщина детали.

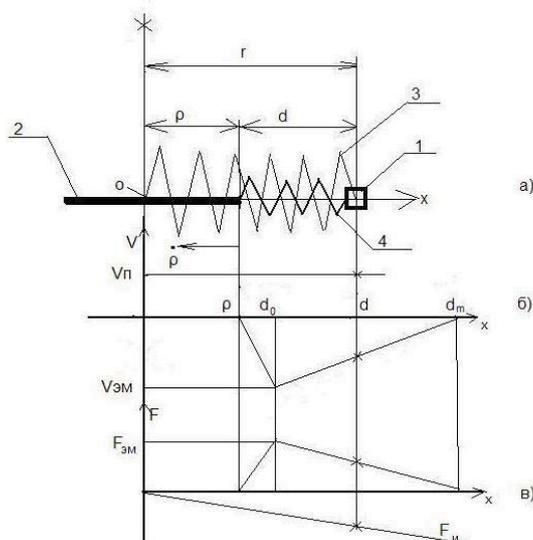
$F_{эм} [\text{Н}]$  – максимальное значение интегральной силы создаваемой разрядами.

На рисунке 2 представлена упрощённая схема равновесного течения процесса ВЭЭО. На рисунке 2а показана идеализированная схема процесса обработки.

На рисунке 2б) показана эпюра скоростей резания. Электрод-деталь перемещается в положительном направлении со скоростью подачи  $V_{п}$  – отложена вверх, скорость эрозионного резания в зависимости от величины межэлектродного расстояния направлена к центру равновесия «О» – отложена вниз.

На рисунке 2в) показана эпюра сил. Силы эрозионного процесса действуют в положительном направлении – их зависимость от величины МЭП отложена вверх, возвратная сила

натяжения ЭИ «упругости»  $F_{и} = -k_1 r$  направлена к подвижному центру равновесия – отложена вниз.



**Рисунок 2. Схема равновесного течения процесса ВЭЭО**

1 – электрод-инструмент; 2 – электрод-деталь; 3 – упругий элемент эквивалентный ПЭИ с коэффициентом жёсткости  $k_1$  - работает на растяжение (прогиб ПЭИ); 4 - упругий элемент эквивалентный силовому действию процесса ЭЭО с коэффициентом жёсткости  $k_3$  - работает на сжатие (эквивалентная жёсткость процесса ЭЭО); «О» – не возмущённое положение ПЭИ (вертикальная прямая проходит через направляющие ПЭИ) - центр равновесия;  $r$  – прогиб ПЭИ;  $d$  – текущее значение величины МЭП;  $\rho$  – обрабатываемая часть детали, расположенная правее центра равновесия;  $\dot{\rho}$  – текущая скорость резания заготовки, направленная к центру равновесия;

В точке равновесия  $d$  скорости эрозии и подачи равны по величине и разнонаправлены, при этом центр равновесия «О» занимает такое положение, при котором силы эрозии и силы «упругости» инструмента уравнивают друг друга. На рисунке изображён случай нежёсткого ПЭИ – центр равновесия расположен на заготовке. С увеличением натяжения центр «О» может смещаться вправо, может располагаться и в МЭП, но всегда левее  $d_m$ .

Рассматривая величины  $r, \rho, d$  как функции времени, учитывая линейную аппроксимацию этих зависимостей и соотношения равновесия из рисунка 1, составим следующие исходные соотношения:

$$\dot{\rho} = -k_2(d_m - d) + V_n \quad (5)$$

$$k_1 r = k_3(d_m - d) \quad (6)$$

$$r = \rho + d; \quad (7)$$

$$\dot{r} = \dot{\rho} + \dot{d}. \quad (8)$$

Соотношение (5) выражает условие равновесия ПЭИ в процессе обработки. Соотношение (7) является геометрическим и выполняется всегда. В равенство (8) входят величины скоростей различной природы:  $\dot{\rho}$  – скорость разрушения заготовки,  $\dot{r}$  – скорость равновесного в смысле (6) перемещения ПЭИ относительно центра «О», а  $\dot{d}$  – скорость изменения величины МЭП, обусловленная как разрушением заготовки, так и равновесным движением ПЭИ. Равенство (8) выполняется, если  $d \in (d_0, d_m)$  и условие равновесие (6) не нарушается. Выражая из (5) координату равновесия  $d$  и используя соотношения (7,8), получим соотношения скоростей:

$$\dot{r} = -\frac{k_3}{k_1} \dot{d} \quad (9)$$

$$\dot{\rho} = -\frac{k_1 + k_3}{k_1} \dot{d}. \quad (10)$$

Используя соотношение скоростей (9,10), из уравнения (5) получим дифференциальные уравнения, описывающие динамику изменения каждой из переменных, характеризую-

щих процесс обработки:

$$\dot{\rho} = -k(d_m + \rho) + V_{\Pi} \quad (11)$$

$$\dot{d} = k(d_m - d) - k_d V_{\Pi} \quad (12)$$

$$\dot{r} = -kr + k_r V_{\Pi}. \quad (13)$$

Здесь обозначено:

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_3}; k_d = \frac{k_1}{k_1 + k_3}; k_r = \frac{k_3}{k_1 + k_3}. \quad (14)$$

Решения уравнений (11-13) позволяют получить зависимости величин  $r, \rho, d$  от времени. Эти решения приведены для постоянной скорости подачи  $V_{\Pi}$ :

$$\rho(t) = \left(\frac{V_{\Pi}}{k} - d_m\right)(1 - e^{-kt}) + \rho_{\text{н}} e^{-kt} \quad (15)$$

$$d(t) = \left(d_m - \frac{V_{\Pi}}{k_2}\right)(1 - e^{-kt}) + d_{\text{н}} e^{-kt} \quad (16)$$

$$r(t) = \frac{k_3 V_{\Pi}}{k_1 k_2}(1 - e^{-kt}) + r_{\text{н}} e^{-kt}. \quad (17)$$

Здесь:  $\rho_{\text{н}}, d_{\text{н}}, r_{\text{н}}$  – значения переменных в начальный момент времени. Из формул (15-17) при  $t \rightarrow \infty$  находятся установившиеся значения основных переменных  $\rho_y, d_y, r_y$ :

$$\rho_y = \frac{V_{\Pi}}{k} - d_m; d_y = d_m - \frac{V_{\Pi}}{k_2}; r_y = \frac{k_3 V_{\Pi}}{k_1 k_2} \quad (18)$$

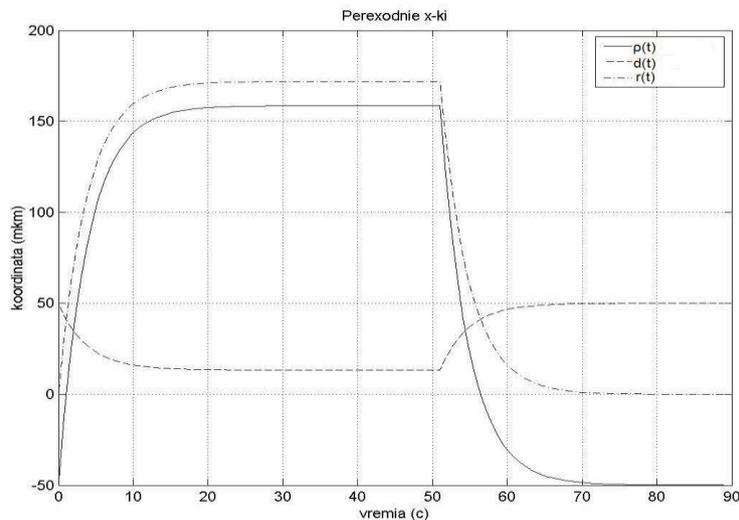
На рисунке 3 приведены зависимости (15-17), полученные при следующих значениях параметров:

$$d_m = 50; d_0 = 10; V_{\text{ЭМ}} = 60; F_{\text{ЭМ}} = 0,1; F_{\text{н}} = 10; L = 1 \cdot 10^5; H = 5 \cdot 10^4.$$

Все линейные величины даны в микрометрах, силы в ньютонах, а скорости в микрометрах в секунду и соответствуют некоторым реальным значениям процесса обработки. Начальные значения параметров приняты следующими:

$\rho_{\text{н}} = -d_m; d_{\text{н}} = d_m; r_{\text{н}} = 0$ ; что соответствует врезанию в заготовку. В течение первых 50 секунд в системе действует скорость подачи  $V_{\Pi} = 55$  мкм/с, что составляет примерно  $0,9V_{\text{ЭМ}}$ , затем подача прекращается и наблюдается выбег – возврат в исходное состояние. Коэффициенты уравнения имеют следующие значения:  $k_1 = 0,0005$  Н/мкм,  $k_2 = 1,5\text{с}^{-1}$ ,  $k_3 = 0,0025$  Н/мкм,  $k \cong 0,27\text{с}^{-1}$ . Установившиеся значения переменных:  $\rho_y \cong 170$ ,  $d_y \cong 13$ ,  $r_y \cong 183$  всё в микрометрах. Полученные таким образом переходные характеристики в целом соответствуют экспериментальным данным, приведённым в работе [3].

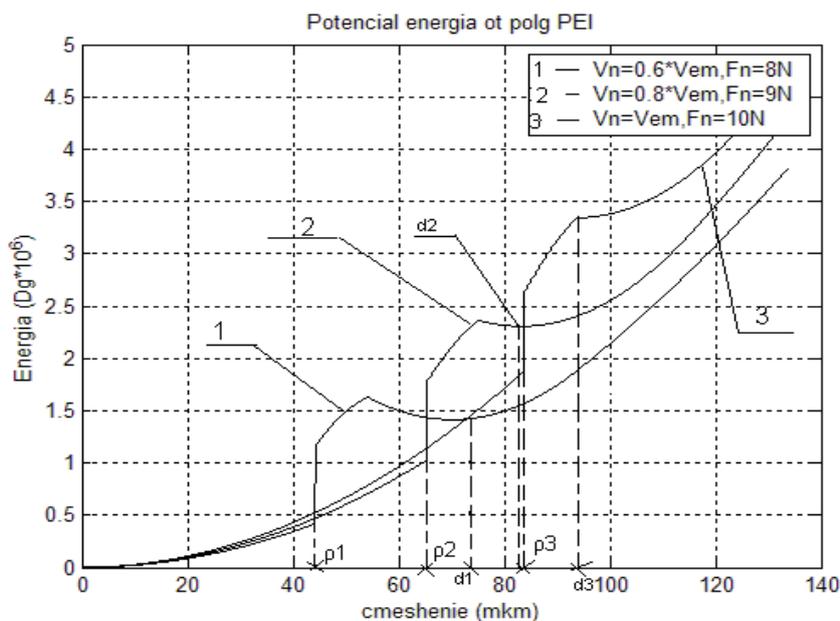
Математическая модель (11-13) является теоретическим обобщением экспериментальных данных и общих физических представлений, развитых в [1] и модели (1,2) на случай упругого ЭИ.



**Рисунок 3 . Переходные характеристики процесса ВЭЭО  
Управление процессом ВЭЭО**

Разработанная математическая модель позволяет корректно сформулировать понятия «упругий» электрод и «жёсткий» электрод. Будем считать электрод упругим, если  $k_3 \gg k_1$ , при этом в соотношении (13) можно пренебречь  $k_1$  в знаменателе. Параметр системы  $k$ , имеющий смысл собственной частоты, в этом случае уменьшится в  $k_3/k_1$  раз. Для упругого электрода обычно это соотношение составляет 5 - 10. Если же  $k_3 < k_1$ , то в (13) можно пренебречь  $k_3$  в знаменателе, прогиб ПЭИ будет стремиться к нулю, а собственная частота системы будет равна  $k_2$  и модель системы выродится в модель (2) для жёстких электродов. В этом случае электрод можно считать жёстким. Существует и диапазон промежуточных значений жесткости ПЭИ. Возникает вопрос, каким образом жёсткость ПЭИ связана с задачами управления?

Как известно, всякая динамическая система обладает фильтрующими свойствами. В данном случае система электродов, рассматриваемая как динамическая, имеет первый порядок и является фильтром нижних частот. Она обладает способностью подавлять возмущающие воздействия с частотами выше собственной частоты системы. С увеличением «упругости» ПЭИ собственная частота системы снижается почти на порядок, что существенно повышает помехоустойчивость системы и стабильность процесса обработки, так как большинство возмущающих воздействий попадают в область подавления. Таким образом, для повышения стабильности процесса обработки желательно повышение «упругости» ПЭИ путём некоторого снижения натяжения. Однако обычно для повышения точности обработки стараются увеличивать натяжение ПЭИ до предельных значений. Это увеличивает риск обрыва ПЭИ особенно на мощных режимах, снижает диапазон саморегулирования процесса и его помехозащищённость. Для того чтобы разрешить это противоречие, возможно построение системы управления с регулируемым натяжением ПЭИ. Обработка на участках с малой кривизной траектории может осуществляться при пониженном натяжении, а в точках смены направления движения или на участках большой кривизной траектории реза, - с высоким натяжением ПЭИ. Разработанная математическая модель процесса резания позволяет применить все известные результаты теории управления к синтезу управляющей системы. Однако следует отметить, что параметры модели  $k_1, k_2, k_3$  заранее не известны и их следует определять методами текущей идентификации на стадии врезания по известным методикам [8], в частности по времени переходного процесса.



**Рисунок 4. Зависимости потенциальной энергии ПЭИ от величины смещения при вариации скорости подачи**

Следует отметить, что предельное натяжение ПЭИ затрудняет точную настройку системы управления приводом подачи на наибольшую скорость резания. Особое значение при этом имеет проблема устойчивости процесса обработки. Разработанная модель динамики

процесса раскрывает механизмы потери устойчивости процесса на предельных для заданного режима работы генератора импульсов скоростях подачи. На рисунке 4 приведена диаграмма потенциальной энергии ПЭИ для различных относительных скоростей подачи. Величины МЭП  $d_1, d_2, d_3$ , отмеченные на рисунке, соответствуют устойчивым положениям ПЭИ в процессе обработки (минимумы потенциальной энергии). Для кривых 1 и 2 имеет место некоторый потенциальный барьер, обеспечивающий запас устойчивости, а для предельной кривой 3 запас устойчивости отсутствует и возможно скачкообразное наступление короткого замыкания электродов, что обычно и наблюдается на практике. Знание постоянной времени переходного процесса изменения МЭП позволяет плавно, автоматически подвести скорость подачи к значениям, близким к предельным, без нарушения устойчивости процесса.

#### Выводы

1. Разработанная математическая модель процесса электроэрозионного резания аккумулирует имеющиеся опытные данные о течении процесса и позволяет синтезировать системы управления методами теории автоматического управления.

2. Для повышения стабильности процесса обработки желательное повышение «упругости» ПЭИ путём некоторого снижения его натяжения и повышения натяжения в точках смены направления резания.

3. На предельных скоростях резания отсутствует запас устойчивости положения ПЭИ, и для автоматической точной настройки скорости подачи на производительный режим необходимо плавное изменение скорости с учетом постоянной времени переходных процессов.

#### Литература

1. Ю.А.Моргунов, Д.В. Панов, Б.П.Саушкин, С.Б.Саушкин Научно-технические технологии машиностроительного производства: Физико-химические методы и технологии / под ред. проф. Б.П.Саушкина: Учеб. пособие для высших технических учебных заведений – М.: Издательство «Форум», 2013. – 928 с.
2. Саушкин Б.П., Шандров Б.В., Моргунов Ю.А. Перспективы развития и применения физико-химических методов и технологий в производстве двигателей Журнал «Известия МГТУ «МАМИ», 2012, №2, стр.242...248.
3. Овсянников Б.Л., Ставицкая Н.Б. Исследование динамики процесса электроэрозионного резания проволочным электродом-инструментом. Журнал «Известия МГТУ «МАМИ», 2013, №1(15), т.2. стр.91-97.
4. Золотых Б.Н., Овсянников Б.Л., Ставицкая Н.Б. Расчёт искажений движения инструмента при электроэрозионной обработке электродом-проволокой. //Электронная обработка материалов. №3, 1989.стр.16-19.
5. Овсянников Б.Л., Особенности формообразования при электроэрозионном резании проволочным электродом-инструментом. Сборник материалов научно-технического семинара «Прогрессивные технологии и оборудование механосборочного производства», посвящённого 70-летию кафедры «Технология машиностроения», 3 декабря 2009г. МГТУ МАМИ. С. 228-233.
6. Гуткин Б.Г. Автоматизация электроэрозионных станков. Л. «Машиностроение», 1971, стр. 29.
7. Лазаренко Б.Р., Лазаренко Н.И. Электроискровая обработка токопроводящих материалов. М., Издательство Академии наук СССР, 1958, стр. 92.
8. Дейч А.М. Методы идентификации динамических объектов. М., «Энергия», 1979. С.240.