Расчет статистических характеристик оценки координат точки на поверхности Земли, получаемой при однокоординатной пеленгации с борта летательного аппарата

к.т.н. Блохина В.Ф.
Университет машиностроения
8(499)308-35-98,

Аннотация: В работе найдены аналитические соотношения для расчета в линейном приближении по ошибкам измерения оценки географических координат и корреляционной матрицы точки на поверхности Земли по данным однокоординатных пеленгов. Предложен алгоритм рекуррентного уточнения координат в процессе получения новых измерений.

Ключевые слова: источники излучения, местоопределение, статистические характеристики.

Рассматривается процесс местоопределения источника излучения (ИИ) при измерениях с борта летательного аппарата (ЛА) косинуса угла между направлением на ИИ и продольной осью ЛА, которую будем считать совпадающей с вектором скорости.

Исходные данные для решения задачи:

- гринвичские декартовы координаты ЛА и вектора скорости в гринвичской системе координат для моментов времени этих измерений - $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2$, ошибки их измерения считаем пренебрежимо малыми;
- два измеренных пеленга $c_1 = \cos(fi_1), c_2 = \cos(fi_2)$, ошибки измерения которых считаем независимыми, распределенными по нормальному закону с одинаковыми дисперсиями σ^2 и нулевым математическим ожиданием (fi_1, fi_2 - углы между направлением на излучающую точку А на поверхности Земли и векторами $\vec{v}_1, \vec{v}_2$),
- признак борта (слева или справа от трассы находится ИИ).

Определяем на поверхности Земли точку A' пересечения конусов с вершинами $\vec{R}_1, \vec{R}_2$, осями $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ и углами раскрыва fi_1, fi_1.

Схематично процесс измерений представлен на рисунке 1.

Точка A' представляет собой точку пересечения двух кривых L_1 и L_2, каждая из которых есть линия пересечения конусов с вершинами в точках B_1 и B_2 – концах векторов $\vec{R}_1, \vec{R}_2$, осями $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ и углами раскрыва fi_1, fi_2 с поверхностью Земли, для данной задачи аппроксимируемой местным референц-эллипсоидом[1].

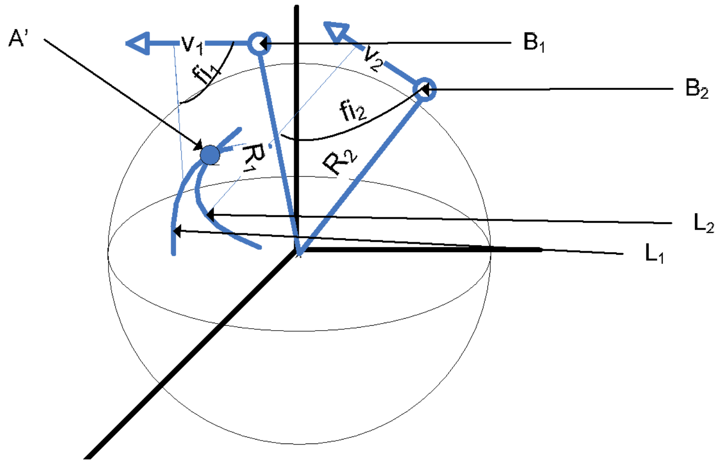


Рисунок 1

Система уравнений для определения трех декартовых координат r^1, r^2, r^3 точки A' содержит три уравнения второго порядка с тремя неизвестными.

Так как любая точка на эллипсоиде с полуосями a и b может быть определена двумя сферическими координатами (φ,λ), связанными с декартовыми следующими соотношениями:

$$r^1 = \cos(\varphi)\cdot\cos(\lambda)\cdot\sqrt{a^2\cdot\cos^2(\varphi)+b^2\cdot\sin(\varphi)}$$

$$r^2 = \cos(\varphi)\cdot\sin(\lambda)\cdot\sqrt{a^2\cdot\cos^2(\varphi)+b^2\cdot\sin(\varphi)},$$

$$r^3 = \sin(\varphi)\cdot\sqrt{a^2\cdot\cos^2(\varphi)+b^2\cdot\sin(\varphi)}$$

от одного уравнения можно избавиться, но система при этом станет трансцендентной.

Если найти приближенное решение этой системы, то можно искать сферические координаты ИИ (φ,λ), используя в качестве метода для их нахождения метод максимального правдоподобия (ММП)[3].

Так как измеренные величины c_1, c_2 имеют нормальное распределение с корреляционной матрицей $\sigma^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ и математическими ожиданиями, равными пеленгам на истинное положение ИИ из точек $\vec{R}_1, \vec{R}_2$ относительно векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2$, то

$$Mc_i = \frac{((\vec{r}-\vec{R}_i),\vec{v}_1)}{\|\vec{r}-\vec{R}_i\|}\text{ , где: } \vec{r} = \rho(\varphi)\begin{pmatrix}\cos(\varphi)*\cos(\lambda)\\ \cos(\varphi)*\sin(\lambda)\\ \sin(\varphi)\end{pmatrix}, \rho(\varphi)\approx a(1-\varepsilon*\sin^2(\varphi)),$$

где: a – большая полуось, ε – сжатие эллипсоида (навигационные ошибки считаем пренебрежимо малыми по сравнению с величиной σ) и уравнение правдоподобия сводится к минимизации квадратичной формы:

$$(c_1 - Mc_1(\varphi,\lambda))^2 + (c_2 - Mc_2(\varphi,\lambda))^2 \underset{\varphi,\lambda}{\rightarrow} \min \qquad (1)$$

или после дифференцирования к итерационному процессу:

$$\begin{pmatrix}\varphi_{i+1}\\ \lambda_{i+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varphi_i\\ \lambda_i\end{pmatrix} + Q^{-1}\left(\begin{pmatrix}\varphi_i\\ \lambda_i\end{pmatrix}\right)*\begin{pmatrix}c_1 - Mc_1\begin{pmatrix}\varphi_i\\ \lambda_i\end{pmatrix}\\ c_2 - Mc_2\begin{pmatrix}\varphi_i\\ \lambda_i\end{pmatrix}\end{pmatrix}\text{, где:}$$

$$q_{i1} = \frac{\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi},\vec{v}_i\right)}{\|\vec{r}-\vec{R}_i\|} - \frac{\left(\vec{r}-\vec{R}_i,\vec{v}_i\right)}{\|\vec{r}-\vec{R}_i\|^3}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi},\vec{r}-\vec{R}_i\right), q_{i2} = \frac{\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\lambda},\vec{v}_i\right)}{\|\vec{r}-\vec{R}_i\|} - \frac{\left(\vec{r}-\vec{R}_i,\vec{v}_i\right)}{\|\vec{r}-\vec{R}_i\|^3}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\lambda},\vec{r}-\vec{R}_i\right),$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix}\varepsilon*\cos(2*\varphi)*\cos(\varphi)*\cos(\lambda)-\rho(\varphi)\sin(\varphi)*\cos(\lambda)\\ \varepsilon*\cos(2*\varphi)*\cos(\varphi)*\sin(\lambda)-\rho(\varphi)\sin(\varphi)*\sin(\lambda)\\ \varepsilon*\cos(2*\varphi)*\sin(\varphi)\end{pmatrix} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\lambda} = \begin{pmatrix}-\rho(\varphi)\cos(\varphi)*\sin(\lambda)\\ \rho(\varphi)\cos(\varphi)*\cos(\lambda)\\ 0\end{pmatrix}$$

Нулевое приближение для итерационного процесса может быть найдено путем решения методом Феррари уравнения 4-ой степени, к которому приводится система двух уравнений с двумя неизвестными нахождения точки пересечения двух конусов с касательной плоскостью к поверхности Земли в точке B пересечения поверхности Земли с вектором $(\vec{R}_1+\vec{R}_2)/2$:

$$\begin{aligned}&(x-x')^2*\alpha_1+2*(x-x')*(y-y')*\beta_1+(y-y')^2*\gamma_1=0\\&(x-x'')^2*\alpha_1+2*(x-x'')*(y-y'')*\beta_1+(y-y'')^2*\gamma_1=0\end{aligned}$$, где (x', y') и (x'', y'')

компоненты векторов $\vec{R}_1,\vec{R}_2$ в локальной системе координат с центром в точке B, осью OZ $\| (\vec{R}_1+\vec{R}_2)/2$, осью OX параллельной местной параллели, (x, y) – искомые координаты ИИ $\alpha_i=(v_i^1-c_i)^2, \beta_i=v_i^1*v_i^2, \gamma_i=(v_i^2-c_i)^2$, v_i^j – компоненты скоростей, переведенные в локальную систему координат.

Из полученных 4 корней отбрасываются два с использованием признака борта, а из двух оставшихся выбирается тот, который соответствует точке, ближайшей к трассе.

Полученное решение уравнения (1) – сферические координаты точки A' – является случайной величиной, в линейном приближении по ошибкам подчиняющейся двумерному нормальному закону с математическим ожиданием, равным истинным координатам ИИ и корреляционной матрицей, зависящей от σ и взаимного расположения точек B_1, B_2 и A.

Для расчета корреляционной матрицы сферических координат точки A′, полученной путем решения уравнения (1), введем две локальные системы координат в касательной плоскости к модели поверхности Земли, обе с центром в точке A: систему координат O с осями $\vec{e}_1,\vec{e}_{2,}$, касательными к местному меридиану и параллели, и систему координат O′ с осями $\vec{n}_1,\vec{n}_2$, являющимися проекциями на касательную плоскость нормалей к конусам.

Введем также систему координат O″ в трехмерном пространстве с центром в центре масс Земли и осями $\vec{e}_1,\vec{e}_{2,},\vec{e}_3=\vec{R}_0/\|\vec{R}_0\|$, где: $\vec{R}_0$ – вектор с координатами, соответствующими A.

Пусть Q – матрица перехода из гринвичской системы координат в систему координат O″, $Q=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$.

Переведем $\vec{R}_1,\vec{R}_2,\vec{v}_1,\vec{v}_2$ и $\vec{R}_0$ в систему координат O″.

Вычислим образующие конусов, проходящие через точку A, и нормируем их.

$$\vec{d}_1=\vec{R}_0-\vec{R}_1,\quad \vec{d}_2=\vec{R}_0-\vec{R}_2,\qquad \vec{d}_1=\vec{d}_1/\|\vec{d}_1\|, \vec{d}_2=\|\vec{d}_2\|.$$

Конусы представляют собой геометрическое место точек, получающихся вращением прямых, проходящих через точки B_1 и B_2, коллинеарных образующим $\vec{d}_1$ и $\vec{d}_2$, вокруг векторов $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ соответственно. Матрицы поворота M_i вокруг векторов $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ на угол α вычисляется по формулам[2]:

$$\mathrm{M_i}=\begin{pmatrix}2(\cos\frac{\alpha}{2})^2-1+2*(v_i^1*\sin\frac{\alpha}{2})^2 & v_i^1*v_i^2*(\sin\frac{\alpha}{2})^2-2\cos\frac{\alpha}{2}*v_i^3*\sin\frac{\alpha}{2} & v_i^1*v_i^3*(\sin\frac{\alpha}{2})^2+2\cos\frac{\alpha}{2}*v_i^2*\sin\frac{\alpha}{2}\\ v_i^1*v_i^2*(\sin\frac{\alpha}{2})^2+2\cos\frac{\alpha}{2}*v_i^3*\sin\frac{\alpha}{2} & 2(\cos\frac{\alpha}{2})^2-1+2*(v_i^2*\sin\frac{\alpha}{2})^2 & v_i^2*v_i^3*(\sin\frac{\alpha}{2})^2-2\cos\frac{\alpha}{2}*v_i^1*\sin\frac{\alpha}{2}\\ v_i^1*v_i^2*(\sin\frac{\alpha}{2})^2-2\cos\frac{\alpha}{2}*v_i^3*\sin\frac{\alpha}{2} & v_i^2*v_i^3*(\sin\frac{\alpha}{2})^2+2\cos\frac{\alpha}{2}*v_i^1*\sin\frac{\alpha}{2} & 2(\cos\frac{\alpha}{2})^2-1+2*(v_i^3*\sin\frac{\alpha}{2})^2\end{pmatrix}\qquad(3)$$

где: v_i^j – j-ая компонента вектора $\vec{v}_i$, i=1,2.

Каждая точка кривых L_1 и L_2 есть пересечение одной из образующих конусов с поверхностью Земли, поэтому точки кривых L_1 и L_2 суть функции угла α – $\vec{l}_1(\alpha),\vec{l}_2(\alpha)$, являющиеся непрерывно дифференцируемыми по α.

Производные этих функций по α суть касательные к конусам и к поверхности Земли одновременно.

Проекции векторных произведений $\vec{l}_1''(\alpha),\vec{l}_2'(\alpha)$ и образующих $\vec{d}_1$ и $\vec{d}_2$ на плоскость

$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ суть вектора $\vec{n}_1, \vec{n}_2$.

Если вектор ошибки определения координат ИИ как точки пересечения L_1 и L_2 спроектировать на касательную плоскость $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и разложить ее по векторам $\vec{n}_1, \vec{n}_2$, получим:

$$\vec{\delta} = \delta^1 \vec{n}_1 + \delta^2 \vec{n}_2 \qquad (4)$$

причем величины δ^1 и δ^2 некоррелированы, а их СКО равны σ, умноженному на производную c_1 и c_2 по приращениям вдоль векторов $\vec{n}_1, \vec{n}_2$.

Величины δ^1 и δ^2 с точностью до малых второго порядка по сравнению с σ имеют нормальное распределение, то есть в линейном приближении локальные координаты точки пересечения L_1 и L_2 можно считать распределенными по нормальному закону с математическим ожиданием, равным истинному значению и некоторой корреляционной матрицей.

Вычислим ее. Воспользовавшись разностными формулами вычисления производной, получим СКО ошибки местоопределения вдоль векторов $\vec{n}_1, \vec{n}_2$:

$$\delta_i = \sigma_i \left(\frac{(\vec{d}_i + \xi * \vec{n}_i, \vec{v}_i)}{\left\| \vec{d}_i + \xi * \vec{n}_i \right\|} - \frac{(\vec{d}_i, \vec{v}_i)}{\left\| \vec{d}_i \right\|} \right) / \xi , \qquad (5)$$

где: ξ – малое приращение вдоль $\vec{n}_i$ (i=1,2).

Вектора $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ также можно вычислить по разностной схеме. Для чего вычисляем точку пересечения линий $\vec{r}_i = \vec{R}_i + l_i * M_i * \vec{d}_i$ с поверхностью Земли для матриц M, вычисленных по формуле (3) с малыми значениями α.

Для этого находим λ_i из соотношения

$$l_i = \frac{-\left(\frac{R_i^1 * r_i^1}{a^2} + \frac{R_i^2 * r_i^2}{a^2} + \frac{R_i^3 * r_i^3}{b^2}\right) - \sqrt{\left(\frac{R_i^1 * r_i^1}{a^2} + \frac{R_i^2 * r_i^2}{a^2} + \frac{R_i^3 * r_i^3}{b^2}\right)^2 - \left(\left(\frac{r_i^1}{a}\right)^2 + \left(\frac{r_i^2}{a}\right)^2 + \left(\frac{r_i^3}{b}\right)^2\right) * \left(\left(\frac{R_i^{12}}{a}\right)^2 + \left(\frac{R_i^{22}}{a}\right)^2 + \left(\frac{R_i^{32}}{b}\right)^2 - 1\right)}}{\left(\left(\frac{r_i^1}{a}\right)^2 + \left(\frac{r_i^2}{a}\right)^2 + \left(\frac{r_i^3}{b}\right)^2\right)} \qquad (6)$$

Вычисляем $\tilde{\vec{n}}_i = [\vec{r}_0, \quad \vec{r}_0 - \vec{r}_i] = \begin{pmatrix} \tilde{n}^1{}_i \\ \tilde{n}^2{}_i \\ \tilde{n}^3{}_i \end{pmatrix}$, нормируем его и проектируем на касательную плоскость, i=1,2.

$$\vec{n}_{inorm} = \begin{pmatrix} \tilde{n}^1{}_i / \sqrt{(\tilde{n}^1{}_i)^2 + (\tilde{n}^2{}_i)^2 + (\tilde{n}^3{}_i)^2} \\ \tilde{n}^2{}_i / \sqrt{(\tilde{n}^1{}_i)^2 + (\tilde{n}^2{}_i)^2 + (\tilde{n}^3{}_i)^2} \\ \tilde{n}^3{}_i / \sqrt{(\tilde{n}^1{}_i)^2 + (\tilde{n}^2{}_i)^2 + (\tilde{n}^3{}_i)^2} \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Погрешность вычисления компонент векторов $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ пропорциональна α^2, и, выбирая α должным образом можно сделать ее пренебрежимо малой.

Корреляционная матрица ошибок местоопределения в системе координат $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ равна $\begin{pmatrix} \delta_1^2 & 0 \\ 0 & \delta_2^2 \end{pmatrix}$, переходя в систему координат $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, получим корреляционную матрицу ошибок местоопределения по сферическим долготе и широте:

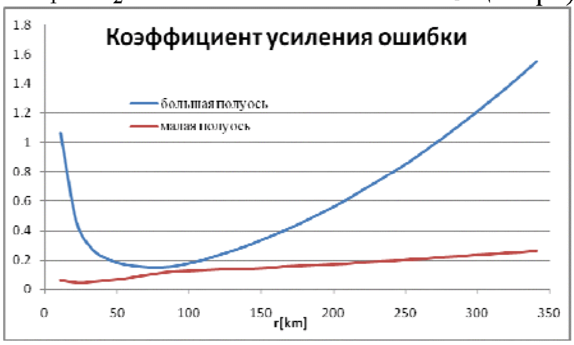
$$R = \begin{pmatrix} \dfrac{(n_2^2)^2 * \delta_1^2 + (n_1^2)^2 * \delta_2^2}{(n_1^2 * n_1^2 - n_1^1 * n_2^2) * \cos^2 \varphi} & -\dfrac{n_2^2 * n_2^1 * \delta_1^2 + n_1^2 * n_1^1 * \delta_2^2}{\cos \varphi} \\ -\dfrac{n_2^2 * n_2^1 * \delta_1^2 + n_1^2 * n_1^1 * \delta_2^2}{\cos \varphi} & \dfrac{(n_2^1)^2 * \delta_1^2 + (n_1^1)^2 * \delta_2^2}{(n_1^2 * n_1^2 - n_1^1 * n_2^2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Большая и малая полуоси эллипса рассеяния, вычисленные по двум пеленгам координат точки А, равны соответственно[4]

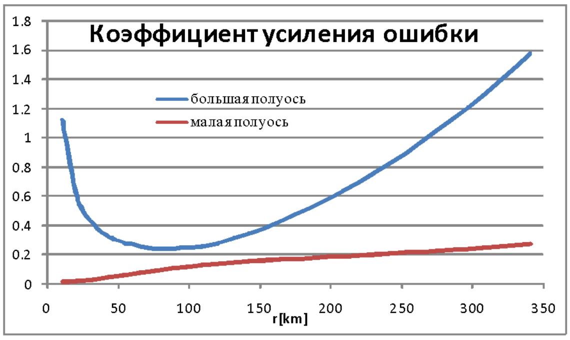
$$
\begin{aligned}
\sigma_G &= \sqrt{r_{11} * \cos^2\beta + r_{22} * \sin^2\beta + r_{12} * \sin 2\beta}\,, \\
\sigma_L &= \sqrt{r_{11} * \sin^2\beta + r_{22} * \cos^2\beta - r_{12} * \sin 2\beta}\,, \\
\beta &= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\,r_{12}}{r_{11} - r_{22}}
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

Полученные формулы позволяют оценить точностные характеристики местоопределения при двукратном приеме сигналов для разнесенных в пространстве позиций ЛА.

На рисунках 2, 3, 4 приведены зависимости коэффициента усиления ошибки, то есть отношения $\frac{\sigma_G}{\sigma_0}, \frac{\sigma_L}{\sigma_0}$ от дальности r от геодезической, соединяющей проекции точек B_1 и B_2 на поверхность Земли до точки А при расстоянии между проекциями B_1 и B_2, равном 100км, и высоте точек B_1 и B_2 над поверхностью Земли 10км при различном расположении точки А относительно точек B_1 и B_2 (рисунок 2а – точка А расположена на траверзе середины между проекциями B_1 и B_2, рисунок 2б – траверз точки А смещен в сторону одной из проекций точек B_1 и B_2 на l=50 км относительно центра).



а



б

Рисунок 2

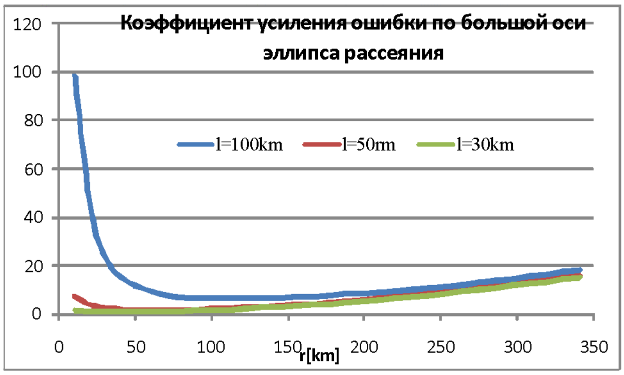


Рисунок 3

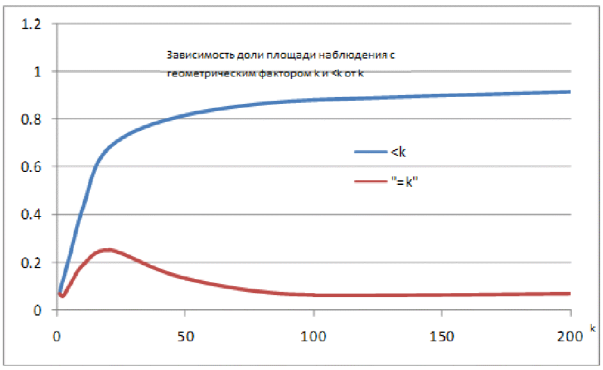


Рисунок 4

На графике рисунке 3 изображена зависимость коэффициента усиления ошибки большой полуоси эллипса рассеяния от r при двух точках приема, разнесенных на 10км и различных l=100, 50 и 30 км. На графике рисунка 4 приведена зависимость доли площади обзора с коэффициентом ~k и <k.

На рисунке 5 изображена зависимость коэффициента усиления ошибки местоопределения ИИ, расположенного на траверзе трассы для различных удалениях от трассы ЛА и для различных расстояний между положениями ЛА.

Получив двукратный прием сигналов и оценив по ним местоположение ИИ и его корреляционную матрицу, можно построить рекуррентную процедуру уточнения местоположения по каждому вновь принятому пеленгу.

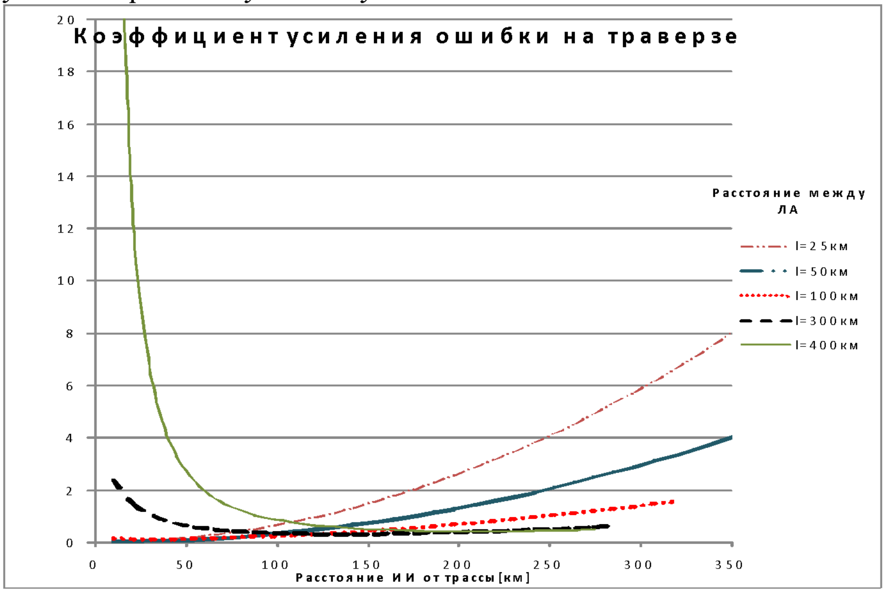


Рисунок 5

Исходные данные для этой задачи включают:

- гринвичские декартовы координаты ЛА и вектор скорости для момента времени вновь произведенного измерения $\vec{R}, \vec{v}$;
- измеренный пеленг $c = cos(\ fi\ )$, ошибки измерения которого считаем распределенными по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и СКО, равным σ_0,
- сферические координаты φ, λ вычисленного по ранее выполненным измерениям положения ИИ и корреляционная матрица их ошибок

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Будем считать, что все данные переведены в систему координат О, тогда в линейном приближении по ошибкам можно считать, что ΔB=Δφ, ΔL=Δλ*cos(φ), где:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho * (B_0 + \Delta B) \\ \rho * (L_0 + \Delta L) \\ \rho \end{pmatrix} \tag{11}$$

– вектор проекции измеренного положения ИИ на касательную плоскость к сфере в месте истинного расположения ИИ (с локальными координатами $G_0=(B_0,L_0)$), ρ -радиус используемой модели поверхности Земли в точке со сферическими координатами φ, λ.

Корреляционная матрица Q_1 вектора $\vec{\Delta} = (\Delta B,\ \Delta L)$ вычисляется из Q по формуле:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} * \cos(\varphi) \\ q_{21} * \cos(\varphi) & q_{22} * \cos^2(\varphi) \end{pmatrix} \tag{12}$$

Так как математическое ожидание ошибки измерения пеленга С считаем равным 0 (то есть систематические ошибки измерения отсутствуют), то математическое ожидание измеренной величины С является функцией истинных оцениваемых координат ИИ и может быть вычислено по формуле:

$$MC = f(B,L) = \frac{\left(\vec{d}(B,L), \vec{v}\right)}{\left\|\vec{d}(B,L)\right\|}, \tag{13}$$

где: $\vec{d}(B,L) = \vec{R} - \vec{r}$, $\vec{r}$ – вектор истинного положения ИИ.

Считая новое измерение независимым от вектора $\vec{\Delta}$, получаем функцию правдоподобия трех величин C, B, L:

$$\Phi(C,B,L/B_0,L_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}e^{\frac{-(C-f(B_0,L_0))^2}{2\sigma_0^2}}\frac{1}{2\pi\det(Q_1)}e^{\frac{-((G-G_0),Q_1^{-1}(G-G_0))}{2}}. \qquad (13)$$

Поиск максимума функции правдоподобия по параметрам B_0,L_0 сводится к минимизации квадратичной формы:

$$S(B_0,L_0)=\frac{(C-C(B_0,L_0))^2}{\sigma_0^2}+\left(\left(\begin{pmatrix}B\\L\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}B_0\\L_0\end{pmatrix}\right),Q_1^{-1}\left(\begin{pmatrix}B\\L\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}B_0\\L_0\end{pmatrix}\right)\right), \qquad (14)$$

по параметрам B_0,L_0 , то есть к решению системы уравнений:

$$\frac{\partial S}{\partial B_0}=0,\frac{\partial S}{\partial L_0}=0. \qquad (15)$$

Система (15) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}&w_{11}B_0+w_{12}L_0-\frac{(C-f(B_0,L_0))}{\sigma_0}\frac{\partial f}{\partial B_0}(B_0,L_0)=0\\&w_{21}B_0+w_{22}L_0-\frac{(C-f(B_0,L_0))}{\sigma_0}\frac{\partial f}{\partial L_0}(B_0,L_0)=0\end{aligned}, \qquad (16)$$

где: $\begin{pmatrix}w_{11} & w_{12}\\ w_{21} & w_{22}\end{pmatrix}=Q_1^{-1}$.

Раскладывая в ряд Тейлора функцию $f(B,L)$ и ее частные производные и, ограничиваясь линейными по ΔB, ΔL членами, преобразуем систему (16) к линейному виду:

$$\begin{aligned}&\left(w_{11}+\frac{\gamma^2}{\sigma^2{}_0}\right)B_0+\left(w_{12}+\frac{\gamma*\eta}{\sigma^2{}_0}\right)L_0=dc*\gamma\\&\left(w_{21}+\frac{\gamma*\eta}{\sigma^2{}_0}\right)B_0+\left(w_{22}+\frac{\gamma^2}{\sigma^2{}_0}\right)L_0=dc*\eta\end{aligned}, \qquad (17)$$

где:

$$\gamma=\rho*\left(\frac{v_1}{\|\vec{d}\|}-\frac{C_1*d_1}{\|\vec{d}\|^2}\right),\eta=\rho*\left(\frac{v_2}{\|\vec{d}\|}-\frac{C_1*d_2}{\|\vec{d}\|^2}\right),C_1=\frac{(\vec{v},\vec{d})}{\|\vec{d}\|*\|\vec{v}\|}.dc=\frac{C-C_1}{\sigma^2}. \qquad (18)$$

Решая систему (17), получим оценку:

$$\begin{aligned}&B_0=dc*\left(\frac{\left(w_{22}+\frac{\gamma^2}{\sigma^2{}_0}\right)*\gamma-\left(w_{12}+\frac{\gamma*\eta}{\sigma^2{}_0}\right)*\eta}{\left(w_{11}+\frac{\gamma^2}{\sigma^2{}_0}\right)*\left(w_{22}+\frac{\gamma^2}{\sigma^2{}_0}\right)-\left(w_{12}+\frac{\gamma*\eta}{\sigma^2{}_0}\right)^2}\right),\\&L_0=dc*\left(\frac{\left(w_{11}+\frac{\gamma^2}{\sigma^2{}_0}\right)*\eta-\left(w_{12}+\frac{\gamma*\eta}{\sigma^2{}_0}\right)*\gamma}{\left(w_{11}+\frac{\gamma^2}{\sigma^2{}_0}\right)*\left(w_{22}+\frac{\gamma^2}{\sigma^2{}_0}\right)-\left(w_{12}+\frac{\gamma*\eta}{\sigma^2{}_0}\right)^2}\right).\end{aligned} \qquad (19)$$

Корреляционная матрица полученной оценки равна $\begin{pmatrix}DB_0 & K_{B_0L_0}\\ K_{B_0L_0} & DL_0\end{pmatrix}$, где:

$$DB_0 = D(dc)*\left(\frac{\left(w_{22}+\frac{\gamma^2}{\sigma^2{}_0}\right)*\gamma-\left(w_{12}+\frac{\gamma*\eta}{\sigma^2{}_0}\right)*\eta}{\left(w_{11}+\frac{\gamma^2}{\sigma^2{}_0}\right)*\left(w_{22}+\frac{\gamma^2}{\sigma^2{}_0}\right)-\left(w_{12}+\frac{\gamma*\eta}{\sigma^2{}_0}\right)^2}\right)^2,$$

$$DL_0 = D(dc)*\left(\frac{\left(w_{11}+\frac{\gamma^2}{\sigma^2{}_0}\right)*\eta-\left(w_{12}+\frac{\gamma*\eta}{\sigma^2{}_0}\right)*\gamma}{\left(w_{11}+\frac{\gamma^2}{\sigma^2{}_0}\right)*\left(w_{22}+\frac{\gamma^2}{\sigma^2{}_0}\right)-\left(w_{12}+\frac{\gamma*\eta}{\sigma^2{}_0}\right)^2}\right)^2, \quad (20)$$

$$K_{B_0L_0} = D(dc)*\left(\frac{\left(w_{11}+\frac{\gamma^2}{\sigma^2{}_0}\right)*\eta-\left(w_{12}+\frac{\gamma*\eta}{\sigma^2{}_0}\right)*\gamma}{\left(w_{11}+\frac{\gamma^2}{\sigma^2{}_0}\right)*\left(w_{22}+\frac{\gamma^2}{\sigma^2{}_0}\right)-\left(w_{12}+\frac{\gamma*\eta}{\sigma^2{}_0}\right)^2}\right)*\left(\frac{\left(w_{22}+\frac{\gamma^2}{\sigma^2{}_0}\right)*\gamma-\left(w_{12}+\frac{\gamma*\eta}{\sigma^2{}_0}\right)*\eta}{\left(w_{11}+\frac{\gamma^2}{\sigma^2{}_0}\right)*\left(w_{22}+\frac{\gamma^2}{\sigma^2{}_0}\right)-\left(w_{12}+\frac{\gamma*\eta}{\sigma^2{}_0}\right)^2}\right)$$

где: $$D(dc) = \frac{1}{\sigma_0^2}(1+\frac{1}{\sigma_0^2}*\left(\left(\frac{v_1}{\|d\|}\right)^2*q_{11}+2*q_{12}*\left(\frac{v_1*v_2}{\|d\|^2}\right)*\cos\ (\varphi)+\left(\frac{v_{21}}{\|d\|}\right)^2*q_{22}*\cos^2(\varphi)\right).$$

Выводы

1. Найдены аналитические соотношения для расчета в линейном приближении по ошибкам измерения оценки географических координат точки пересечения двух конусов с моделью поверхности Земли в виде референц-эллипсоида и их корреляционной матрицы. Найденные оценки позволяют в том числе произвести оценку геометрического фактора при различном взаимном расположении ИИ и точек приема.
2. Найдены аналитические соотношения для оценки корреляционной матрицы уточненной оценки ММП на каждом шаге рекуррентного алгоритма.
3. Найденные соотношения позволяют применить рекуррентный алгоритм уточнения координат полученной точки с использованием вновь полученных измерений. Рекуррентный алгоритм позволяет производить уточнение в реальном масштабе времени без хранения предшествующих измерений.

Литература

1. Бугаевский Л.М. Математическая картография. Златоуст, 1998.
2. Бранец Н.В., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М, «Наука»,1973.
3. Крамер Г. Математические методы статистики. М., Мир, 1975.
4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М., Высшая школа, 1998.

Кинематический расчет шестизвенного рычажного механизма аналитическим методом

к.т.н. доц. Иванов В.А.
Универстет машиностроения
8(499)267-12-00, tmir1941@mail.ru

Аннотация. В статье рассмотрена возможность аналитического расчета кинематических параметров многозвенных рычажных механизмов 2-го класса 2-го порядка с использованием начал аналитической геометрии на плоскости и дифференциального исчисления. Выведены аналитические зависимости для определения линейных и угловых скоростей и ускорений точек и звеньев кулисно-рычажного 6-тизвенного механизма. Приведены примеры графиков, полученных