

этом ПС УМДМ, в отличие от вышеуказанных схем, при постоянном ведущем звене обеспечивает получение на ведомом звене пяти передач.

Таблица 4

Тормоза ПС УМДМ	$M_8$ при $M_1 = const$	$M_q$ при $M_1 = const$ и $n_8 = 0$
ТН	$M_8^H = M_1 \cdot i_{18}^H =$ $= M_1 \cdot [(-i_{12}) \cdot (-i_{2/3}) \cdot (i_{3/8})]$	$M_H = M_1 \cdot (1 - i_{18}) =$ $= M_1 \cdot [1 - ((-i_{12}) \cdot (-i_{2/3}) \cdot (i_{3/8}))]$
Т4	$M_8^4 = M_1 \cdot \frac{1 - i_{14}}{1 - i_{84}} =$ $= M_1 \cdot \frac{1 - [(-i_{12}) \cdot (-i_{2/3}) \cdot (-i_{3/4})]}{1 - [(i_{83'}) \cdot (-i_{3/4})]}$	$M_4 = M_1 \cdot \frac{1 - i_{18}}{1 - i_{48}} =$ $= M_1 \cdot \frac{1 - [(-i_{12}) \cdot (-i_{2/3}) \cdot (i_{3/8})]}{1 - [(-i_{43'}) \cdot (i_{3/8})]}$
Т6	$M_8^6 = M_1 \cdot \frac{1 - i_{16}}{1 - i_{86}} =$ $= M_1 \cdot \frac{1 - [(-i_{12}) \cdot (i_{26})]}{1 - [(i_{83'}) \cdot (-i_{32'}) \cdot (i_{26})]}$	$M_6 = M_1 \cdot \frac{1 - i_{18}}{1 - i_{68}} =$ $= M_1 \cdot \frac{1 - [(-i_{12}) \cdot (-i_{2/3}) \cdot (i_{3/8})]}{1 - [(i_{62}) \cdot (-i_{2/3}) \cdot (i_{3/8})]}$
Т7	$M_8^7 = M_1 \cdot \frac{1 - i_{17}}{1 - i_{87}} =$ $= M_1 \cdot \frac{1 - [(-i_{12}) \cdot (-i_{2/3}) \cdot (i_{37})]}{1 - [(i_{83'}) \cdot (i_{37})]}$	$M_7 = M_1 \cdot \frac{1 - i_{18}}{1 - i_{78}} =$ $= M_1 \cdot \frac{1 - [(-i_{12}) \cdot (-i_{2/3}) \cdot (i_{3/8})]}{1 - [(i_{75}) \cdot (i_{3/8})]}$

Применение ПС УМДМ в качестве модуля позволяет решать задачу синтеза не только двухступенных, а также трехступенных АКП при увеличении числа управляющих элементов или дополнительного планетарного ряда и при использовании в качестве ведущего двух звеньев ПС УМДМ (солнечное центральное колесо первого и водило).

Предложенная методика кинематического и силового расчета УМДМ позволяет упростить определение передаточных чисел дополнительных планетарных рядов при синтезе двух и трехступенных АКП.

#### Литература

1. Кирдяшев Ю.Н. Многопоточные передачи дифференциального типа. – Л.: Машиностроение, 1981. - 223 с.
2. Косенков А.А. Устройство автоматических коробок передач и трансмиссий. - Ростов н/Д: Феникс, 2003. - 416 с.
3. Кожевников С.Н. Теория механизмов и маши. – М.: Машиностроение, 1969. - 584 с.
4. Шарипов В.М. Конструирование и расчет тракторов. М.: Машиностроение, 2004. - 592 с.
5. Шарипов В.М., Крумбольдт Л.Н., Маринкин А.П. Планетарные коробки передач. - Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2012. – 149 с.
6. Шарипов В.М. Конструирование и расчет тракторов. М.: Машиностроение, 2009. - 752 с.
7. Волошко В.В., Салахов И.И. Патент РФ № 2384773 «Автоматическая ступенчатая планетарная коробка передач» от 20.03.2010 г.

#### **Теоретический анализ плоского движения колеса перекатывающегося типа при формировании опорной поверхности**

к.т.н. доц. Сергеев А.И.

Университет машиностроения  
(495) 223 05 23 доб. 1527, [trakvc@mami.ru](mailto:trakvc@mami.ru)

*Аннотация.* Рассмотрено плоское движение колеса перекатывающегося типа во взаимосвязи с геометрическими и энергетическими соотношениями формирова-

ния опорной поверхности. Установлено, что трансформация связи сопровождается взаимной деформацией контактирующих поверхностей с возникновением при этом сил трения, обусловленных переупаковкой частиц грунта и других факторов. Определено энергетическое состояние системы «колесо-опорная поверхность» и её общие характеристики движения.

*Ключевые слова:* колесо перекатывающегося типа, плоское движение колеса, энергетическое состояние, трансформация связи, характеристики движения

Движение наземных транспортных средств в силовом гравитационном поле может осуществляться при условии возможности формирования опорной поверхности.

Опорную поверхность можно представить функцией отклика или реакцией взаимодействующих поверхностей, одна из которых является связью (1), (2) [1].

$$\vec{R} = \left( \frac{-p4x(z-b+p)}{\sqrt{x^2+p^2}} + \frac{(z-b)4x(z-b+p)}{\sqrt{x^2+(z-b)^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+p^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+(z-b)^2}} \right) \vec{i} + \left( -\frac{4x(z-b+p)x}{\sqrt{x^2+p^2}} - \frac{4x(z-b+p)x}{\sqrt{x^2+(z-b)^2}} - \frac{p}{\sqrt{x^2+p^2}} + \frac{z-b}{\sqrt{x^2+(z-b)^2}} \right) \vec{k} = \quad (1)$$

$$= \left( \frac{-4px(z-b+p)+x}{\sqrt{x^2+p^2}} + \frac{4x(z-b(z-b+p)+x)}{\sqrt{x^2+(z-b)^2}} \right) \vec{i} + \left( -\frac{4x^2(z-b+p)}{\sqrt{x^2+p^2}} - \frac{4x^2(z-b+p)-z+b}{\sqrt{x^2+(z-b)^2}} \right) \vec{k}$$

$$|R| = \sqrt{32x^2(z-b+p)^2 + 2 + 2 \frac{(z-b+p)^2 16x^4 - p(z-b)[16x^2(z-b+p)^2 + 1]}{\sqrt{x^2+p^2}\sqrt{x^2+(z-b)^2}} + 1} = \quad (2)$$

$$= \sqrt{2} \sqrt{16x^2(z-b+p)^2 + \frac{(z-b+p)^2 16x^4 - p(z-b)[16x^2(z-b+p)^2 + 1]}{\sqrt{x^2+p^2}\sqrt{x^2+(z-b)^2}} + 1}$$

Явление формирования опорной поверхности представляется трансформацией нестационарной связи [реономной  $f(x, z, t)$ ] в стационарную (склерономную).

Трансформация связи сопровождается взаимной деформацией контактирующих поверхностей с возникновением при этом сил трения, обусловленных переупаковкой частиц грунта и других факторов.

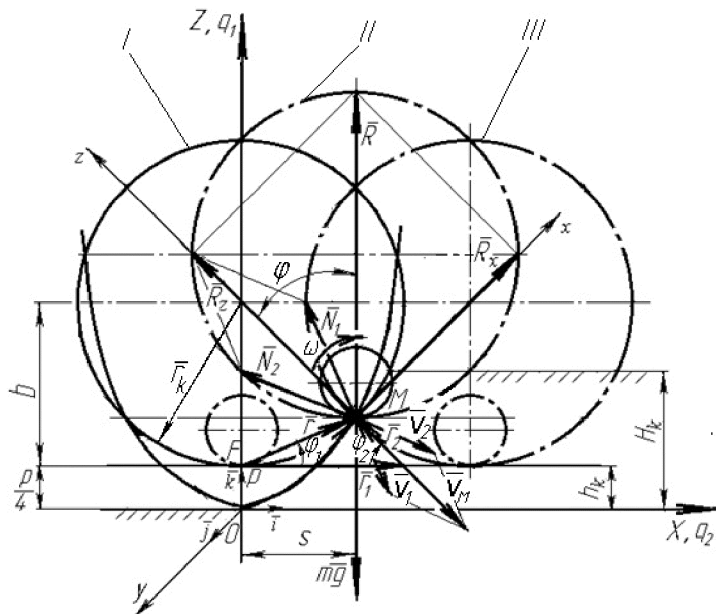
Плоское движение колеса перекатывающегося типа представляет собой сложное физическое явление, которое осуществляется путём смещения плавающего опорно-приводного устройства по ходу движения транспортного средства (рисунок 1) [2].

В общем случае плоское движение может быть представлено параметрическими уравнениями [5]:

$$\varphi = f_1(t); X_0 = f_2(t); Z_0 = f_3(t). \quad (3)$$

Эти уравнения представляют плоское движение колеса, и в этом случае величины  $\varphi$ ,  $X_M$  и  $Z_M$  меняются с течением времени, поэтому они являются однозначными, непрерыв-

ными и дифференцируемыми функциями.



**Рисунок 1 - Расчётная схема формирования опорной поверхности колесом перекатывающегося типа**

Для каждого момента времени  $t$  из уравнений (1) можно определить значения  $\varphi$ ,  $X_M$  и  $Z_M$  и, следовательно, положение точки  $M$  относительно неподвижных осей координат  $OXZ$  с помощью векторного равенства (4):

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2. \quad (4)$$

Спроектируем векторное равенство (4) на неподвижные оси координат, и, исходя из геометрических соображений, координаты точки  $M$  могут быть представлены уравнениями:

$$\begin{aligned} X_M &= X_0 + x \cdot \cos \varphi - z \cdot \sin \varphi \\ Z_M &= Z_0 + z \cdot \sin \varphi + x \cdot \cos \varphi \end{aligned} \quad (5)$$

Координаты  $\varphi$ ,  $X_0$ ,  $Z_0$  известны по уравнениям (3), и, следовательно, положение точки  $M$  однозначно определяется тремя величинами:  $\varphi$ ,  $X_M$  и  $Z_M$  – и таким образом в общем случае при плоско-параллельном движении точка  $M$ , принадлежащая ободу колеса, будет иметь три степени свободы. Уравнения (5) в этом случае представляют уравнения движения точки  $M$ , или параметрические уравнения её траектории.

Составим матрицу поворота плоского движения колеса для режима перекатывания, которая определяет вращающую составляющую его движения при условии -  $|r_1| < |r_2|$ .

Смещение системы  $S$  «колесо-опорная поверхность» (далее просто системы) в этом случае происходит по направлению движения (рисунок 1).

Применяя векторно-матричную форму записи (4), с учетом (5) запишем в виде:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + A\vec{r}_2, \quad (6)$$

где:

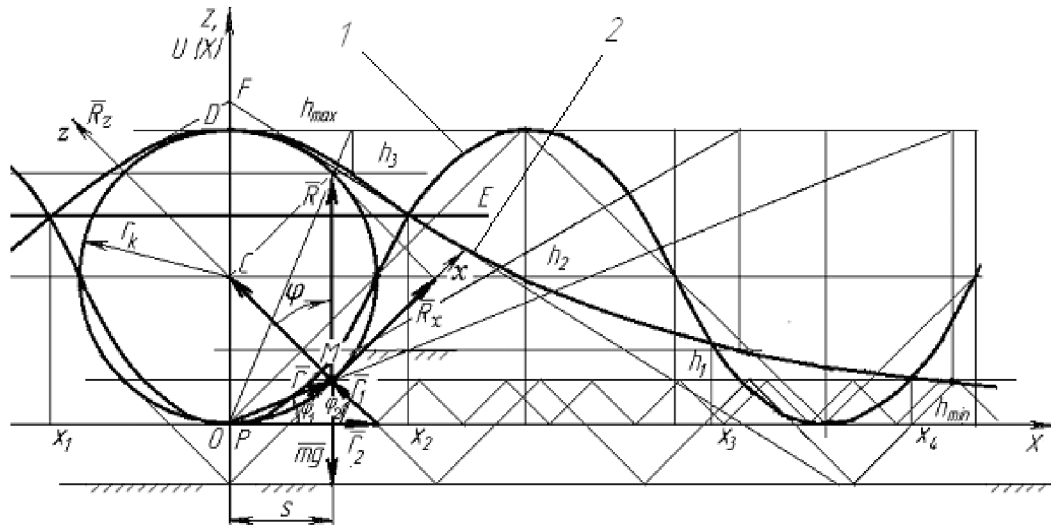
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}, \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} r_1^{(1)} \\ r_1^{(2)} \end{pmatrix}, \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} r_2^{(1)} \\ r_2^{(2)} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Из (6) с учётом (7) следует:

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \left( \arccos \frac{r_1 - r_1^{(1)}}{\sqrt{r_2^{(1)2} + r_2^{(2)2}}} + \arccos \frac{r_2 - r_1^{(1)}}{\sqrt{r_2^{(1)2} + r_2^{(2)2}}} \right). \quad (8)$$

Из вышеизложенного понятно, что движение колеса перекатывающегося типа по деформируемой поверхности движения происходит с тремя степенями свободы с угловыми и линейными перемещениями.

Для определения энергетического состояния системы составим расчётную схему (рисунок 2).



**Рисунок 2 - Схема определения связи геометрических и энергетических соотношений формирования опорной поверхности колесом перекатывающегося типа**

Выполним геометрические построения, которые устанавливают связь параметров формирования опорной поверхности плоского движения колеса с энергетическим состоянием системы. Для этого построим смещённую синусоиду (кривая 1) и В. Анези (кривая 2) [3].

Совместное решение уравнений этих кривых приводит к уравнению Кардано (9):

$$x^3 + p \cdot x + q = 0. \quad (9)$$

Для решения (9) запишем:

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \left( -\frac{2r^3}{\cos^2 \varphi} \right)^2 / 4 + \left( \frac{2r^2}{\cos^2 \varphi} \right)^3 / 27 > 0.$$

Выбираем действительное значение корней уравнения (9):

$$z = \sqrt[3]{\frac{r^3}{\cos^2 \varphi} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{\frac{r^3}{\cos^2 \varphi} - \sqrt{\Delta}} = u + \vartheta.$$

После подстановок и преобразований получим:

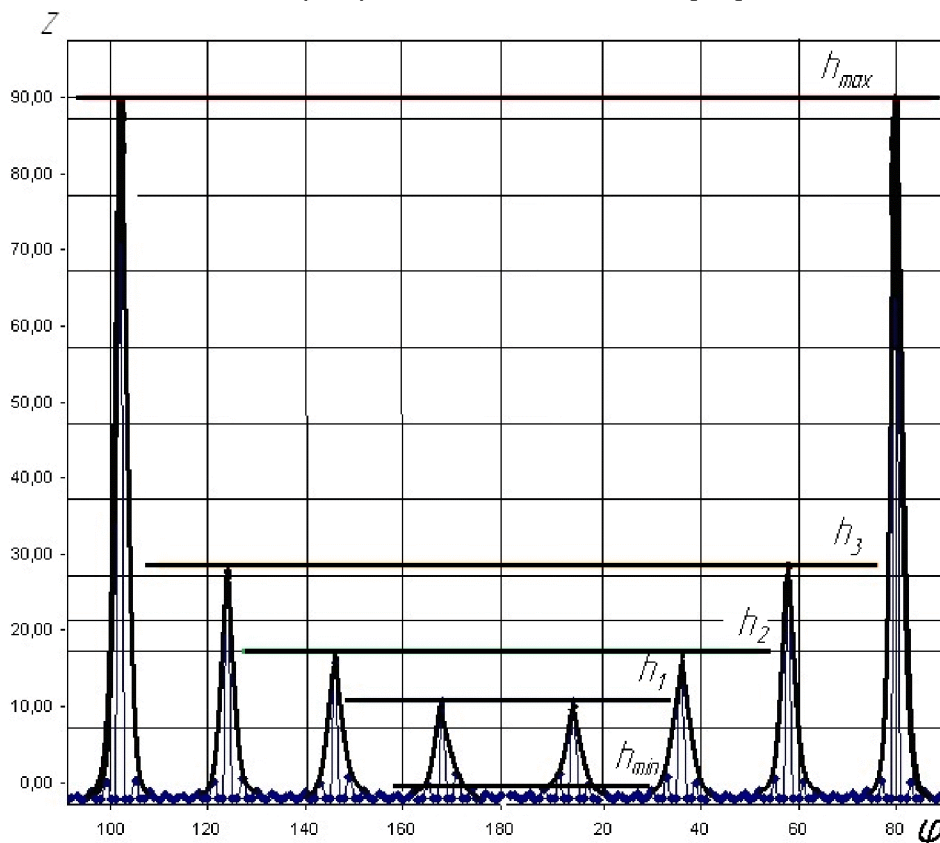
$$z = r \cdot \left( \sqrt[3]{1 + tg^2 \varphi + (1 + tg^2 \varphi) \sqrt{\frac{62}{27} + \frac{8}{27} tg^2 \varphi}} + \sqrt[3]{1 + tg^2 \varphi - (1 + tg^2 \varphi) \sqrt{\frac{62}{27} + \frac{8}{27} tg^2 \varphi}} \right). \quad (10)$$

Таким образом, получена математическая модель энергетического состояния плоского движения колеса по деформируемой поверхности, графическая интерпретация которой представлена на рисунке 3.

Графическая интерпретация уравнения (10), изображённая на рисунке 3, представляет зависимость потенциальной энергии  $U(x)$  от положения точки  $M$ . Если значения полной механической энергии представлять прямыми параллельными оси  $OX$ , то из рисунка 3 видно, что движение рассматриваемой системы возможно при условии  $E > U_1 = U_{(+\infty)}$ , так как при этом имеется, по крайней мере, одна классически разрешенная область, не сводящаяся в точку.

Из энергетического состояния системы «колесо-опорная поверхность» (рисунок 3) вид-

но, что движение колеса по деформируемой поверхности осуществляется в импульсном режиме и находится в области между двумя потенциальными барьерами.



**Рисунок 3 – Энергетическое состояние системы «колесо-опорная поверхность»**

Максимальный уровень полной механической энергии соответствует двум крайним (прямая  $h_{max}$ ) потенциальным барьерам, в интервале которых осуществляется движение колеса по деформируемой поверхности.

Минимальный уровень полной механической энергии соответствует двум минимальным потенциальным барьерам (прямая  $h_{min}$ ), ниже которых механическое движение невозможно. Здесь осуществляется формирование первоначального импульса и накопление полной механической энергии до величины, достаточной для движения колеса по деформируемой поверхности с минимальной скоростью. Увеличение скорости движения транспортного средства потребует повышения энергетического уровня или увеличения мощности силовой установки, подводимой к движителю.

Далее рассмотрим трансформацию образовавшейся связи и установим её характеристику. При этом будем исходить из уравнения, представляющего трансформацию нестационарной связи в стационарном виде [1].

$$\vec{R}_z(x, z, t) = C_1(x, z) \cdot \vec{\lambda}_1(t) + C_2(x, z) \cdot \vec{\lambda}_2(t) = \vec{N}_1 + \vec{N}_2, \quad (11)$$

где:  $C_1(x, z), C_2(x, z)$  – коэффициенты, характеризующие перемещение материальной точки  $M$  по кривой (траектории деформации), образованной пересечением поверхностей  $f_1(x, z), f_2(x, z)$ .

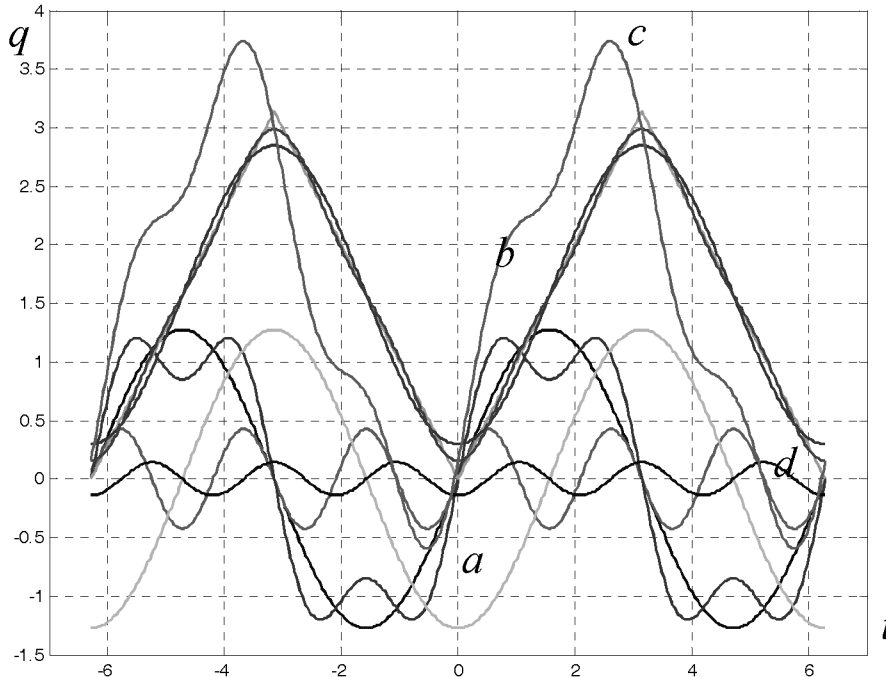
В общем случае характеристика движения системы «колесо-опорная поверхность» может быть представлена формулой (10):

$$q = q_1 + q_2. \quad (12)$$

Поскольку движение системы «колесо-опорная поверхность» происходит в колебательном режиме, то общую характеристику движения системы можно представить уравнением (13):

$$\begin{aligned}
 q = & \left[ -\frac{\pi}{qk^2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^3 \frac{1}{(2n-1)^2 \cdot (k^2 - (2n-1)^2 \delta^2)} \cos kt \right] + \\
 & + \left[ \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^3 \frac{\cos(2n-1) \cdot 8t}{(2n-1)^2 \cdot (2n-1)^2 \delta^2 - k^2} + \frac{\pi}{2k^2} \right] + \\
 & + \left[ -\frac{\omega h_r}{p} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{(p^2 - i^2 \omega^2)} \sin pt + h_r \sum_{i=1}^3 \frac{1}{i(p^2 - i^2 \omega^2)} \sin \omega t \right]
 \end{aligned} \quad (13)$$

Общая характеристика движения системы с учетом (13) будет иметь вид, представленный на рисунке 4.



**Рисунок 4 - Общая характеристика движения системы “колесо - опорная поверхность”**

Графическая интерпретация (рисунок 4) уравнения (13) показывает, что на участке  $[a-b]$  система выходит из положения устойчивого равновесия, в точке  $c$  система достигает положения неустойчивого равновесия и на участке  $[c-d]$  носит лимитационный характер (система асимптотически стремится к устойчивому положению равновесия).

Величина полной механической энергии  $h$  в этом случае определяется по зависимости (14) [4], графическая интерпретация которой представлена на рисунке 5.

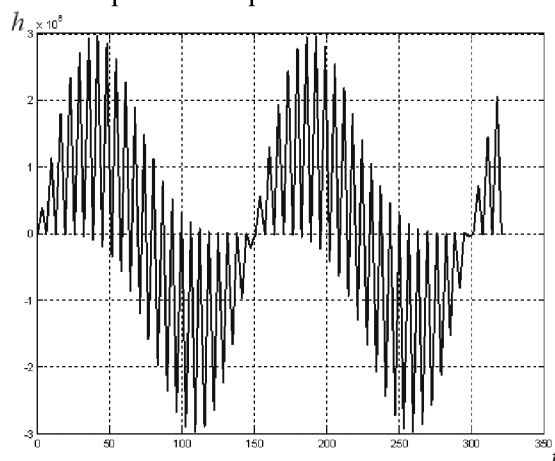
$$h = b \left( 1 + \frac{c \cdot m \cdot m^2 \cdot r_0^4 \cdot \varphi_0^2 \cdot \sin \varphi}{2 \cdot \text{ctg}(\beta_1 + \varphi) \cdot \left\{ \left[ \Pi_0 + \frac{m^2}{2} \cdot (i_0^2 + r_0^2 \cdot \varphi_0) \right]^2 - c \cdot m \cdot m^2 \cdot r_0^4 \cdot \varphi_0^2 \cdot \cos \varphi \right\}} \right) \quad (14)$$

Из рисунка 5 видно, что опорная поверхность образуется в результате трансформации нестационарной связи в стационарную. При этом возникают колебания системы «колесо-опорная поверхность», обусловленные её свойствами накапливать полную механическую энергию с последующим расходом её на формирование опорной поверхности.

Формирование опорной поверхности колесом перекатывающегося типа осуществляется в импульсном режиме.

Опорная поверхность образуется в результате трансформации нестационарной связи в

стационарную. При этом возникают колебания системы «колесо-опорная поверхность», обусловленные её свойствами накапливать полную механическую энергию с последующим расходом на формирование опорной поверхности.



**Рисунок 5 - Характеристика полной механической энергии системы «колесо-опорная поверхность»**

#### **Выводы**

Характеристики (амплитудно-частотные и фазочастотные) формирования опорной поверхности определяется геометрическими соотношениями опорно-приводного вала и обода колеса, а также силами трения, возникающими при трансформации связи.

#### **Литература**

1. Сергеев А.И., Чёрный И.В. Математическая модель формирования опорной поверхности движения колесом перекаत्याющегося типа. Известия МГТУ «МАМИ» № 2 (6), 2008. с. 74-78.
2. Сергеев А.И., Шарипов В.М. Транспортное средство. Патент РФ № 2245259. Опубл. 27.01.2005. Бюл. № 33.
3. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. М., 1977, 872 с.
4. Сергеев А.И. Определение общей характеристики формирования опорной поверхности движения и обоснование конструктивного исполнения движителя перекаत्याющегося типа. // Колёсные и гусеничные машины. Межвузовский сборник научных трудов. Вып.1. - М.: МГТУ «МАМИ», с. 334-357.
5. Сергеев А.И. Влияние ведущего режима качения колеса на формирование опорной поверхности движения. Известия МГТУ «МАМИ». Научный рецензируемый журнал. – М., МГТУ «МАМИ», № 1(11), 2011.

### **Анализ формирования опорной поверхности заднеприводным колёсным шасси 4×2 с упругой схемой подведения силового потока**

к.т.н. доц. Сергеев А.И.

Университет машиностроения  
(495) 223 05 23 доб. 1527, [trakvc@mami.ru](mailto:trakvc@mami.ru)

*Аннотация.* Рассмотрен процесс формирования опорной поверхности колёсным шасси 4×2 с упругой схемой подведения силового потока. Разработана методика расчёта тягово-сцепных свойств, амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик движения системы «колесо-опорная поверхность». Получена передаточная функция, устанавливающая связь выходных и входных параметров, позволяющая спроектировать измерительно-информационную бортовую систему транспортного средства с определением её параметров (зоны нечувствительности измерительного комплекса по параметрам движения ТС, диапазоны измерений и характеристики датчиков и приборов и др.).