

**Численное решение задачи о концентрации напряжений для случая трехслойной упругой плоскости с двумя одинаковыми вертикально расположенными круговыми отверстиями при поперечном сжатии**

к.т.н. доц. Михайлова В.Л., д.т.н. проф. Сухомлинов Л.Г., Мазин В.А.  
Университет машиностроения, Кубанский государственный университет  
8(495)223-05-23, доб. 1318

**Аннотация.** Излагаются результаты по распределению напряжений в поперечно сжимаемой трехслойной упругой плоскости с двумя одинаковыми вертикально расположенными круговыми отверстиями, полученные с применением вариационно-разностной процедуры численного решения задач плоской теории упругости для прямоугольных областей с отверстиями. Дается оценка влияния упругих постоянных слоев на уровень напряжений вокруг отверстий.

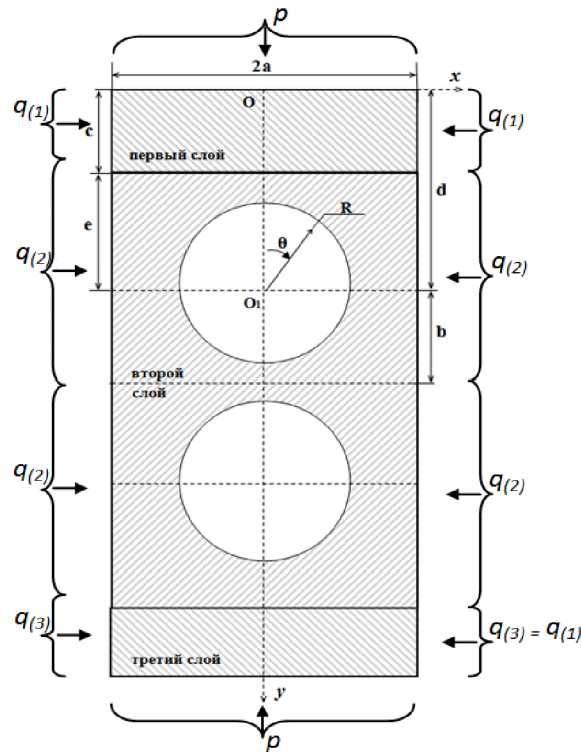
**Ключевые слова:** поперечное сжатие трехслойной упругой плоскости с двумя отверстиями, напряжения вокруг кругового отверстия.

Решению задач статики плоской теории упругости о концентрации напряжений в однородных телах, имеющих всевозможного рода вырезы, отверстия и включения, посвящена обширная литература (см. [1]). На этом фоне в значительной мере не исследованными представляются вопросы концентрации напряжений в таких неоднородных объектах, как тела слоистой структуры, имеющие отверстия и включения. Из решенных здесь отметим, в частности, задачи о концентрации напряжений в двухслойных упругих средах с дефектами типа щелей и включений на межслойной границе [2, 3]. Укажем, кроме того, на работы авторов [4, 5], где с использованием вариационно-разностной процедуры [6] выполнены решения задач о концентрации напряжений применительно к случаю ослабленной круговым отверстием двухслойной упругой полуплоскости в ситуациях продольного растяжения и поперечного сжатия, а также – на работу [7], где аналогичным образом осуществлено решение применительно к случаю продольно растягиваемой трехслойной упругой плоскости с двумя одинаковыми вертикально расположенными во втором слое круговыми отверстиями. В настоящей статье та же трехслойная плоскость, что и в работе [7], рассматривается в ситуации поперечного сжатия. Численное решение соответствующей задачи осуществляется с применением вариационно-разностной модели, описанной в работе [7].

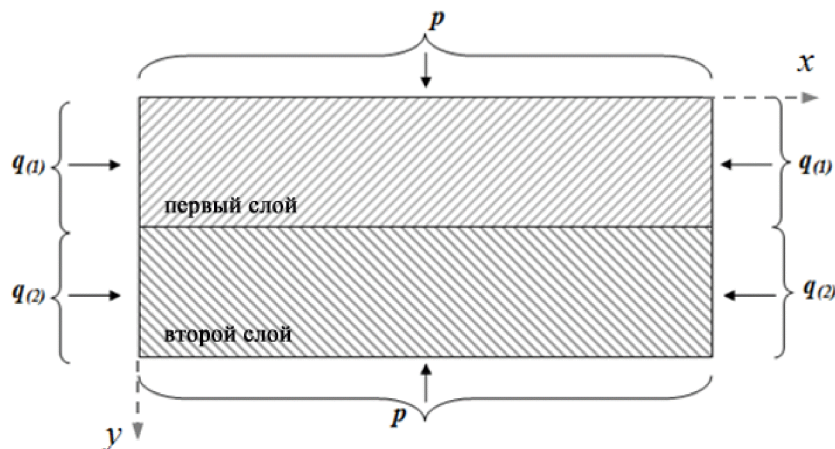
При численном моделировании вместо бесконечно протяженного объекта, каким является упомянутая поперечно сжимаемая (равномерно распределенной нагрузкой с интенсивностью  $p$ ) трехслойная плоскость, рассматриваем конечную прямоугольную область с размерами, многократно превышающими радиус отверстия. Соответствующая расчетная схема представлена на рисунке 1.

При этом имеется в виду, что  $a \gg R$ ,  $d \gg R$  (при расчетах принято  $a = d = 10R$ ). Продольные сжимающие нагрузки с интенсивностями  $q_{(1)}$ ,  $q_{(2)}$  и  $q_{(3)} = q_{(1)}$  предполагаются равномерно распределенными по торцам соответствующих слоев. Считаем, что материалы первого и третьего слоев одинаковы и что отверстия расположены симметрично по отношению к срединной линии второго слоя. Считаем также, что в рамках принятой схемы нагружения в каждом из слоев рассматриваемой трехслойной плоскости на бесконечности реализуется состояние однородной деформации. При этом полагаем, что продольные деформации  $\varepsilon_{xx}$  на бесконечности стеснены настолько, что можно принять  $\varepsilon_{xx} = 0$ .

С учетом симметрии принятой расчетной схемы трехслойной плоскости относительно срединной линии второго слоя расчет нагрузок, обеспечивающих указанное однородное деформированное состояние в слоях на бесконечности, выполним, рассматривая вспомогательную расчетную схему в виде соответствующего двухслойного пакета (рисунок 2) в ситуации поперечно-продольного сжатия нагрузками  $p$ ,  $q_{(1)}$  и  $q_{(2)}$



**Рисунок 1 – Схема поперечно сжимаемой трехслойной плоскости, ослабленной двумя одинаковыми круговыми отверстиями**



**Рисунок 2 – Двухслойный пакет в ситуации поперечно-продольного сжатия**

Введем обозначения  $E^{(k)}$ ,  $\nu^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ) для модулей Юнга и коэффициентов Пуассона материалов первого и второго слоя. С учетом этого физические соотношения плоской задачи теории упругости, связывающие напряжения с деформациями в каждом из этих слоев, запишем в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{(k)} &= \lambda_1^{(k)} \varepsilon_{xx}^{(k)} + \lambda_2^{(k)} \varepsilon_{yy}^{(k)}, \\ \sigma_{yy}^{(k)} &= \lambda_2^{(k)} \varepsilon_{xx}^{(k)} + \lambda_1^{(k)} \varepsilon_{yy}^{(k)}, \\ \sigma_{xy}^{(k)} &= 2G^{(k)} \varepsilon_{xy}^{(k)}, \quad (k = 1, 2).\end{aligned}\tag{1}$$

Коэффициенты  $G^{(k)}$ ,  $\lambda_1^{(k)}$ ,  $\lambda_2^{(k)}$  линейных зависимостей (1) выражаются через упругие постоянные  $E^{(k)}$  и  $\nu^{(k)}$  согласно следующей схеме:

$$1) G^{(k)} = 0,5 E^{(k)} / (1 + \nu^{(k)});$$

2) в случае плоского напряженного состояния

$$\lambda_1^{(k)} = E^{(k)} / [1 - (\nu^{(k)})^2], \quad \lambda_2^{(k)} = \nu^{(k)} \lambda_1^{(k)};$$

3) в случае плоского деформированного состояния

$$\lambda_1^{(k)} = 2G^{(k)} + \lambda^{(k)}, \quad \lambda_2^{(k)} = \lambda^{(k)},$$

где:  $\lambda^{(k)} = \nu^{(k)} E^{(k)} / [(1 + \nu^{(k)})(1 - 2\nu^{(k)})]$ .

В соответствии с принятыми условиями нагружения и деформирования рассматриваемого двухслойного пакета должно быть:

$$\varepsilon_{xx}^{(1)} = \varepsilon_{xx}^{(2)} = 0, \quad (2)$$

$$\sigma_{yy}^{(1)} = \sigma_{yy}^{(2)} = -p, \quad (3)$$

$$\sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)} = 0, \quad \varepsilon_{xy}^{(1)} = \varepsilon_{xy}^{(2)} = 0, \quad (4)$$

$$\sigma_{xx}^{(1)} = -q_{(1)}, \quad \sigma_{xx}^{(2)} = -q_{(2)}. \quad (5)$$

Считая заданной величину  $p$ , с использованием равенств (1), (3), (5), получаем:

$$q_{(1)} = p \lambda_2^{(1)} / \lambda_1^{(1)}, \quad q_{(2)} = p \lambda_2^{(2)} / \lambda_1^{(2)}, \quad (6)$$

$$\varepsilon_{yy}^{(1)} = -p / \lambda_1^{(1)}, \quad \varepsilon_{yy}^{(2)} = -p / \lambda_1^{(2)}. \quad (7)$$

Настройка дискретной модели, описанной в работе [7], на интересующий нас случай поперечного сжатия ослабленной двумя круговыми отверстиями трехслойной плоскости осуществляется путем включения в программу расчета нагрузки  $p$ , а также нагрузок  $q_{(1)}$  и  $q_{(2)}$ , вычисляемых по формулам (6). Как и в [7], все расчеты приводим в предположении, что  $b = 1,25 R$ ,  $e = 1,2 R$  и что исследуемая трехслойная среда находится в состоянии плоской деформации.

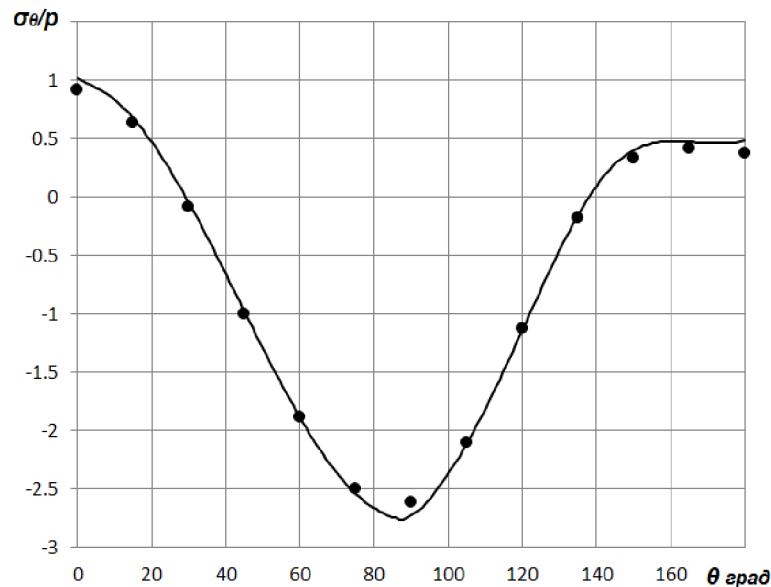
Тестирование окончательно сформированной вычислительной модели осуществляем следующим образом. Полагаем (на программном уровне), что параметры упругости слоев рассматриваемой прямоугольной области имеют одинаковые значения и что  $q_{(1)} = q_{(2)} = 0$ . Тем самым приходим к случаю сжимаемой в вертикальном направлении (нагрузкой  $p$ ) однородной упругой плоскости с двумя одинаковыми вертикально расположенными отверстиями. Результаты численного моделирования для данного (тестового) случая в виде зависимости окружного напряжения  $\sigma_\theta$  на кромке отверстия от угла  $\theta$  представлены (сплошной линией) на рисунке 3. Здесь же для сравнения представлены (точками) результаты приближенного аналитического решения А.С. Космодамианского [1].

Убедившись на основе выполненного сравнения в способности сформированной модели давать надежные результаты применительно к рассматриваемому типу задачам о концентрации напряжений, приступаем к исследованию (с использованием этой модели) заявленного случая поперечного сжатия трехслойной плоскости с двумя отверстиями.

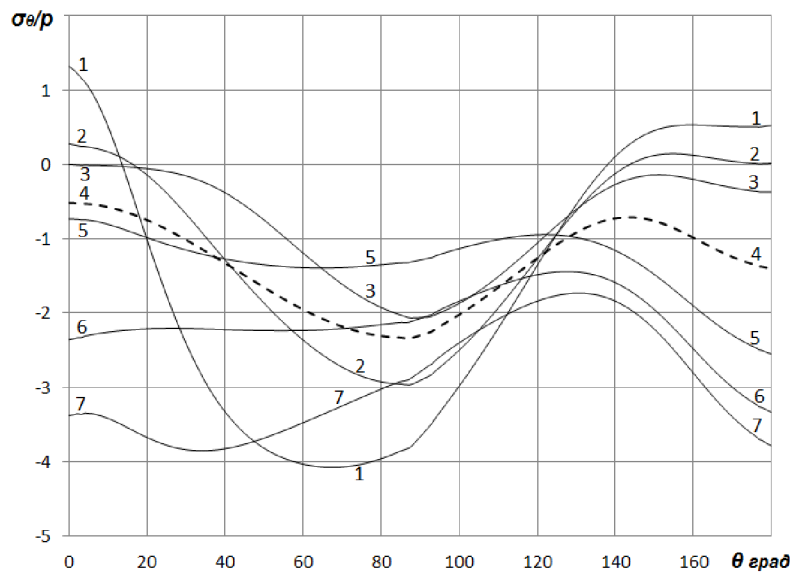
На рисунке 4 представлены полученные численным моделированием результаты в виде кривых распределения напряжений по контуру отверстия в зависимости от значений упругих постоянных слоев.

Пунктиром выделена зависимость, относящаяся к случаю однородной плоскости ( $E^{(2)} / E^{(1)} = 1$ ,  $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0,3$ ). Кривые 1, 2, 3, 5, 6, 7 получены при задании значений параметров  $E^{(2)} / E^{(1)}$ ,  $\nu^{(1)}$ ,  $\nu^{(2)}$  в виде (10; 0,45; 0,1), (2; 0,45; 0,1), (0,1; 0,45; 0,1), (0,1; 0,1; 0,45),

(2; 0,1; 0,45), (10; 0,1; 0,45), соответственно.



**Рисунок 3 – Результаты численного моделирования в сравнении с аналитическим решением А.С. Космодамианского**



**Рисунок 4 – Распределение напряжений по контуру отверстия в зависимости от значений упругих постоянных слоев**

При анализе результатов, представленных на рисунке 4, обнаруживается эффект перегиба (при значениях  $\nu^{(2)}$ , приближающихся к 0,45) положения максимума (по абсолютной величине) напряжений на контуре отверстия из зоны  $60^\circ < \theta < 100^\circ$  в точку с угловой координатой  $\theta = 180^\circ$  при одновременном увеличении значения этого максимума (см. кривые 3, 4, 5). Подобный эффект существенно ограничивает возможности по снижению уровня напряжений на кромке отверстия в данной ситуации. Наиболее оптимальными при этом оказываются варианты 3 и 5. Следует отметить, что при выборе этих вариантов сдвиговые напряжения  $\sigma_{xy}$  на межслойной границе (вблизи отверстия), как показывают расчеты, соответственно уменьшаются в 2,2 раза и увеличиваются в 1,2 раза по сравнению с однородным случаем.

Что касается точек рассматриваемой трехслойной области, достаточно удаленных от отверстий (на расстоянии более  $8R$ ), то получаемые численным моделированием значения напряжений и деформаций в этих точках оказываются в хорошем согласовании со значениями, получаемыми по формулам (2)-(7). Это подтверждает приемлемость принятой при моделировании расчетной схемы, в соответствии с которой исходная бесконечно протяженная область заменяется конечной прямоугольной областью с размерами  $a = d = 10R$ .

В качестве общего вывода по выполненному исследованию отметим, что проведенный анализ позволил дать оценку влияния слоистой структуры поперечно сжимаемой плоскости на характер распределения напряжений вокруг имеющихся в ней двух одинаковых отверстий. Более того, установлена возможность снижения уровня указанных напряжений при надлежащем выборе характеристик слоев.

#### Литература

1. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наукова думка, 1968. 888 с.
2. Ефимов В.В., Кривой А.Ф., Попов Г.Я. Задачи о концентрации напряжений возле кругового дефекта в составной упругой среде // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 2. с. 42-58.
3. Члингарян Г.С. Напряженное состояние составной упругой плоскости с включениями на границе раздела материалов // Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. № 3. с. 52-58.
4. Мазин В.А., Михайлова В.Л., Сухомлинов Л.Г. Напряжения вокруг кругового отверстия в двухслойной упругой полуплоскости при продольном растяжении // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2011. № 1. с. 62–68.
5. Мазин В.А., Михайлова В.Л., Сухомлинов Л.Г. Напряжения вокруг кругового отверстия в двухслойной упругой полуплоскости при поперечном сжатии // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2011. Выпуск 1. с. 119–128.
6. Мазин В.А., Михайлова В.Л., Сухомлинов Л.Г. Вариационно-разностная процедура численного решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области с включениями и отверстиями // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества (ЧЭС). 2010. № 2. с. 53 – 62.
7. Михайлова В.Л., Сухомлинов Л.Г., Мазин В.А. Численное решение задачи о концентрации напряжений для случая трехслойной упругой плоскости с двумя одинаковыми вертикально расположенными круговыми отверстиями при продольном растяжении // Известия МГТУ «МАМИ». № 2(12). 2011. с. 189–195.

#### **Анализ и синтез робастного управления для линейных систем двойного демпфирования**

Триндюк В.А., к.ф.-м.н. доц. Кийко Г.И.

Университет машиностроения

8 (967) 008-23-55, [trindjukvladimir@mail.ru](mailto:trindjukvladimir@mail.ru), 8 (495) 527-34-75

*Аннотация.* В статье изложен способ построения робастного управления подвеской автомобиля при наличии интервальной неопределенности массы груза автомобиля и массы водителя, а также невозможности измерения отклонения кузова автомобиля и кресла водителя от своих состояний покоя. Приведено наглядное обоснование актуальности применения синтезированного робастного управления по сравнению с другими по качеству переходных процессов.

*Ключевые слова:* робастное управление, интервальная неопределенность параметров, подвеска автомобиля.

Робастные системы и робастные устройства значительно увеличивают надежность и устойчивость технических комплексов. Одним из подходов к созданию живучих функциональных узлов может стать поиск решений, обладающих нулевой чувствительностью выход-