

Что касается точек рассматриваемой трехслойной области, достаточно удаленных от отверстий (на расстоянии более $8R$), то получаемые численным моделированием значения напряжений и деформаций в этих точках оказываются в хорошем согласовании со значениями, получаемыми по формулам (2)-(7). Это подтверждает приемлемость принятой при моделировании расчетной схемы, в соответствии с которой исходная бесконечно протяженная область заменяется конечной прямоугольной областью с размерами $a = d = 10R$.

В качестве общего вывода по выполненному исследованию отметим, что проведенный анализ позволил дать оценку влияния слоистой структуры поперечно сжимаемой плоскости на характер распределения напряжений вокруг имеющихся в ней двух одинаковых отверстий. Более того, установлена возможность снижения уровня указанных напряжений при надлежащем выборе характеристик слоев.

Литература

1. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наукова думка, 1968. 888 с.
2. Ефимов В.В., Кривой А.Ф., Попов Г.Я. Задачи о концентрации напряжений возле кругового дефекта в составной упругой среде // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 2. с. 42-58.
3. Члингарян Г.С. Напряженное состояние составной упругой плоскости с включениями на границе раздела материалов // Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. № 3. с. 52-58.
4. Мазин В.А., Михайлова В.Л., Сухомлинов Л.Г. Напряжения вокруг кругового отверстия в двухслойной упругой полуплоскости при продольном растяжении // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2011. № 1. с. 62–68.
5. Мазин В.А., Михайлова В.Л., Сухомлинов Л.Г. Напряжения вокруг кругового отверстия в двухслойной упругой полуплоскости при поперечном сжатии // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2011. Выпуск 1. с. 119–128.
6. Мазин В.А., Михайлова В.Л., Сухомлинов Л.Г. Вариационно-разностная процедура численного решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области с включениями и отверстиями // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества (ЧЭС). 2010. № 2. с. 53 – 62.
7. Михайлова В.Л., Сухомлинов Л.Г., Мазин В.А. Численное решение задачи о концентрации напряжений для случая трехслойной упругой плоскости с двумя одинаковыми вертикально расположенными круговыми отверстиями при продольном растяжении // Известия МГТУ «МАМИ». № 2(12). 2011. с. 189–195.

Анализ и синтез робастного управления для линейных систем двойного демпфирования

Триндюк В.А., к.ф.-м.н. доц. Кийко Г.И.

Университет машиностроения

8 (967) 008-23-55, trindjukvladimir@mail.ru, 8 (495) 527-34-75

Аннотация. В статье изложен способ построения робастного управления подвеской автомобиля при наличии интервальной неопределенности массы груза автомобиля и массы водителя, а также невозможности измерения отклонения кузова автомобиля и кресла водителя от своих состояний покоя. Приведено наглядное обоснование актуальности применения синтезированного робастного управления по сравнению с другими по качеству переходных процессов.

Ключевые слова: робастное управление, интервальная неопределенность параметров, подвеска автомобиля.

Робастные системы и робастные устройства значительно увеличивают надежность и устойчивость технических комплексов. Одним из подходов к созданию живучих функциональных узлов может стать поиск решений, обладающих нулевой чувствительностью выход-

ных характеристик к изменению величин мешающих факторов, в качестве которых может выступать температура, давление, радиоактивность, рассогласование импедансов, влажность, вибрация и т.д. [4].

Сформировав функцию чувствительности некоторых выходных характеристик α к изменению некоторых величин:

$$S_{\gamma}^{\alpha} = \frac{\partial \alpha}{\alpha} / \frac{\partial \gamma}{\gamma} = \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} * \frac{\gamma}{\alpha},$$

можно попытаться найти набор характеристик, при которых возможно достижение нулевой чувствительности:

$$S_{\gamma}^{\alpha} = 0,$$

при определенном γ или минимальной чувствительности в некоторой δ -окрестности параметра γ .

Тогда даже большое изменение параметра γ под воздействием мешающих факторов, в том числе катастрофический отказ, не повлияют значительно на работу системы. Рассмотрим применение этой идеи к системе двойного демпфирования.

Рассмотрим двухдемперную модель объекта, а именно: колеса и водительского сиденья (рисунок 1), которая описывает особенности реальной системы.

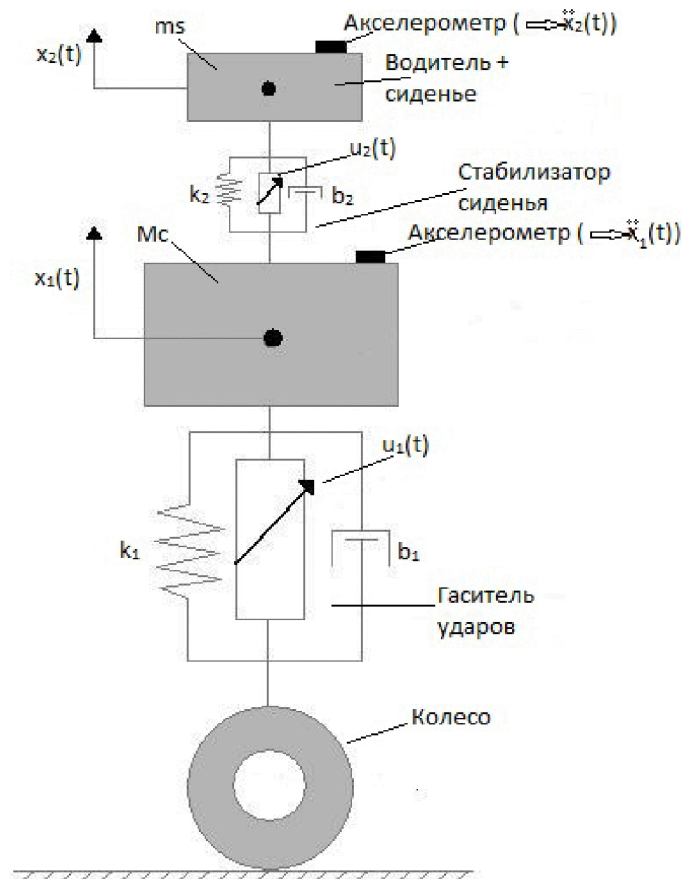


Рисунок 1 – Двухдемперная модель 1/4 автомобиля

Здесь большим прямоугольником с подписью M_c обозначен автомобиль со своей массой, а меньший прямоугольник m_s – водитель, сидящий на кресле. Вертикальные колебания от колеса поглощаются гасителем ударов, который состоит из пружины k_1 и демпфера b_1 . Для более качественного снижения нежелательной вибрации под креслом водителя вмонтирована еще одна пружина k_2 и демпфер b_2 . Компенсация колебаний как автомобиля, так и сиденья ускоряется с помощью входных управляющих воздействий $u_1(t)$ и $u_2(t)$.

Применяя знания из курса физики (механики), по второму закону Ньютона можно описать нашу модель системой дифференциальных физических уравнений:

- для автомобиля

$$M_c \cdot \ddot{x}_1(t) = -(k_1 + k_2) \cdot x_1(t) + k_2 \cdot x_2(t) - (b_1 + b_2) \cdot \dot{x}_1(t) + b_2 \cdot \dot{x}_2(t) + 10^3 \cdot [u_1(t) + u_2(t)],$$

- для кресла

$$m_s \cdot \ddot{x}_2(t) = k_2 \cdot x_1(t) - k_2 \cdot x_2(t) + b_2 \cdot \dot{x}_1(t) - b_2 \cdot \dot{x}_2(t) + 10^3 \cdot u_2(t).$$

Зададим переменные пространства состояний:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(t), \\ x_2(t) = x_2(t), \\ x_3(t) = \dot{x}_1(t), \\ x_4(t) = \dot{x}_2(t), \end{cases} \quad (1)$$

где: $x_1(t)$ - вертикальное смещение кузова автомобиля от своего положения равновесия, м;

$x_2(t)$ - вертикальное смещение кресла водителя от своего положения равновесия, м;

$x_3(t)$ - вертикальная скорость кузова автомобиля, м/с;

$x_4(t)$ - вертикальная скорость кресла водителя, м/с.

Тогда можно переписать физические дифференциальные уравнения, описывающие объект, в виде динамической системы в пространстве координат (2):

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{M_c} & \frac{k_2}{M_c} & -\frac{b_1+b_2}{M_c} & \frac{b_2}{M_c} \\ \frac{k_2}{m_s} & -\frac{k_2}{m_s} & \frac{b_2}{m_s} & -\frac{b_2}{m_s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1000}{M_c} & -\frac{1000}{M_c} \\ 0 & \frac{1000}{m_s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

Значения параметров модели указаны в таблице 1.

Таблица 1.

Значения параметров модели

№	Обозначение	Диапазон изменений	Среднее значение	Единицы измерений
1	M_c	от 1 000 до 2 000	1 500	Кг
2	m_s	от 100 до 150	125	Кг
3	k_1	Постоянная величина	40 000	Н/м
4	k_2	Постоянная величина	5 000	Н/м
5	b_1	Постоянная величина	4 000	Н с/м
6	b_2	Постоянная величина	500	Н с/м
7	u_1	Переменная величина	Подлежит определению	Н
8	u_2	Переменная величина	Подлежит определению	Н

Введем обозначения:

$$x(t) = (x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t))^T, \ x(t_0) = (x_1(t_0) \ x_2(t_0) \ x_3(t_0) \ x_4(t_0))^T,$$

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) & \dot{x}_3(t) & \dot{x}_4(t) \end{pmatrix}^T, \quad u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) \end{pmatrix}^T,$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{Mc} & \frac{k_2}{Mc} & -\frac{b_1+b_2}{Mc} & \frac{b_2}{Mc} \\ \frac{k_2}{ms} & -\frac{k_2}{ms} & \frac{b_2}{ms} & -\frac{b_2}{ms} \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1000}{Mc} & -\frac{1000}{Mc} \\ 0 & \frac{1000}{ms} \end{pmatrix}.$$

Тогда система (2) перепишется в виде (3):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3)$$

Наша задача состоит в конструировании оптимального управления при отсутствии информации о массе груза автомобиля и массе водителя в конкретный момент времени, причем к управлению предъявляется требование, чтобы оно качественно отрабатывало любую ситуацию из заданных диапазонов изменения параметров, т.е. на управление накладывается требование робастности [1, 2]. Диапазоны изменения масс выбраны эмпирически так, чтобы они адекватно отражали реальное положение дел. Возмущения назовем отклонения масс автомобиля и сиденья с водителем от своих средних значений. Оптимальность синтезированного управления будем оценивать по качеству переходных процессов (амплитуда и скорость затухания колебаний) и квадратичному функционалу качества:

$$J(x, u) = \frac{1}{2}x^T(T)Sx(T) + \frac{1}{2} \int_0^T \{x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\} dt, \quad (4)$$

где: S – решение стационарного уравнения Риккати-Лурье для случая наихудших значений параметров возмущения:

$$SA^* + A^{*T}S - SB^*R^{-1}B^{*T}S + Q = 0, \quad (5)$$

где: матрицы A^* и B^* – наихудшие с точки зрения качества переходных процессов при заданных диапазонах изменения масс, т.е. робастная модель объекта имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = A^*x(t) + B^*u(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (6)$$

Матрицы Q и R возьмем для простоты единичными.

В данной статье для упрощения изложения мы опускаем изложение способа нахождения матриц A^* и B^* , а сразу воспользуемся его результатами:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -22.5 & 5 & -2.25 & 0.5 \\ 50 & -33.333 & 5 & -3.333 \end{pmatrix}, \quad B^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 5 & -1 \\ 0 & 6.667 \end{pmatrix}.$$

По этим матрицам строим оптимальное робастное управление (рисунок 2).

Можно сравнить его по качеству с другими следующим образом: подставить робастное управление в любую другую систему, а управление этой системы подставить в робастную систему и сравнить качество переходных процессов (рисунок 3).

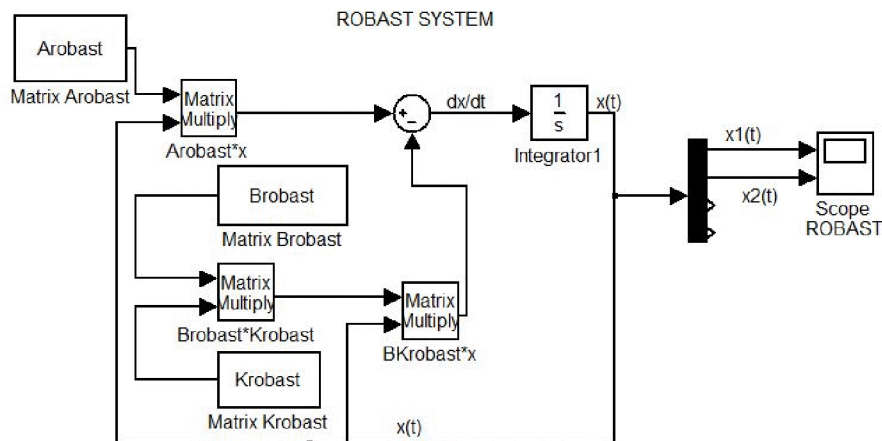


Рисунок 2 – Схема построения оптимального робастного управления

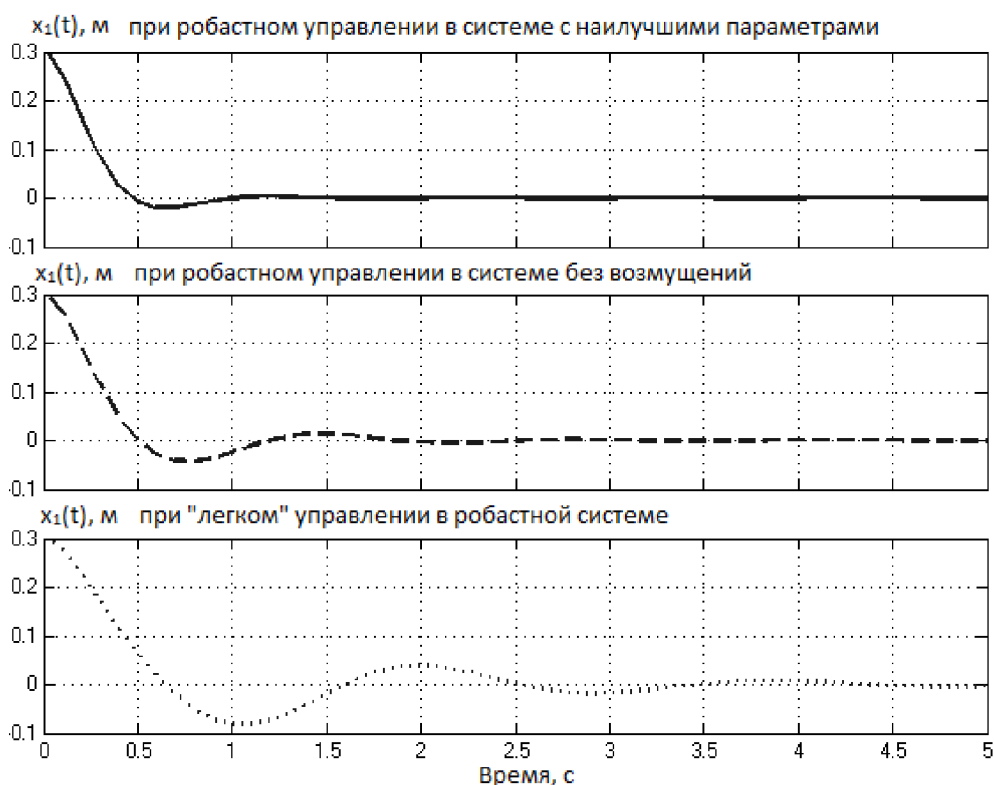


Рисунок 3 – Сравнение различных управлений

Однако следует заметить, что в жизни мы не можем реализовать полученное управление, т.к. не все координаты состояния объекта доступны для измерения. Введем специальный измеритель:

$$y(t) = C \cdot x(t), \quad (7)$$

где: $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

В этом случае нам сначала нужно построить наблюдатель. Тогда оптимальное управление будет искажаться в той же форме, только через оценку для неизвестных координат состояния:

$$u(t) = -R^{-1} \cdot B^{*T} \cdot S \cdot \hat{x}(t), \quad (8)$$

Построим наблюдатель сокращенной размерности, т.е. наблюдатель Луинберга. В этом случае:

$$z(t) = T \cdot x(t), \quad (9)$$

и назначим:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Тогда

$$x(t) = \begin{pmatrix} C \\ T \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = V \cdot y(t) + P \cdot z(t). \quad (11)$$

Так как в нашем случае $\begin{pmatrix} C \\ T \end{pmatrix}$ – единичная матрица, то найти V и P не составляет труда:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Будем строить оценку состояния так:

$$\hat{x}(t) = P \cdot \hat{z}(t) + V \cdot y(t) \quad (12)$$

при

$$\frac{d\hat{z}(t)}{dt} = T B \hat{z}(t) + T A V y(t) + T A P u(t), \quad (13)$$

причем если $x(t_0)$ – известно, то $z(t_0) = T(t_0) \cdot x(t_0)$ и тогда $\varepsilon(t) \equiv 0 \quad \forall t \geq t_0$.

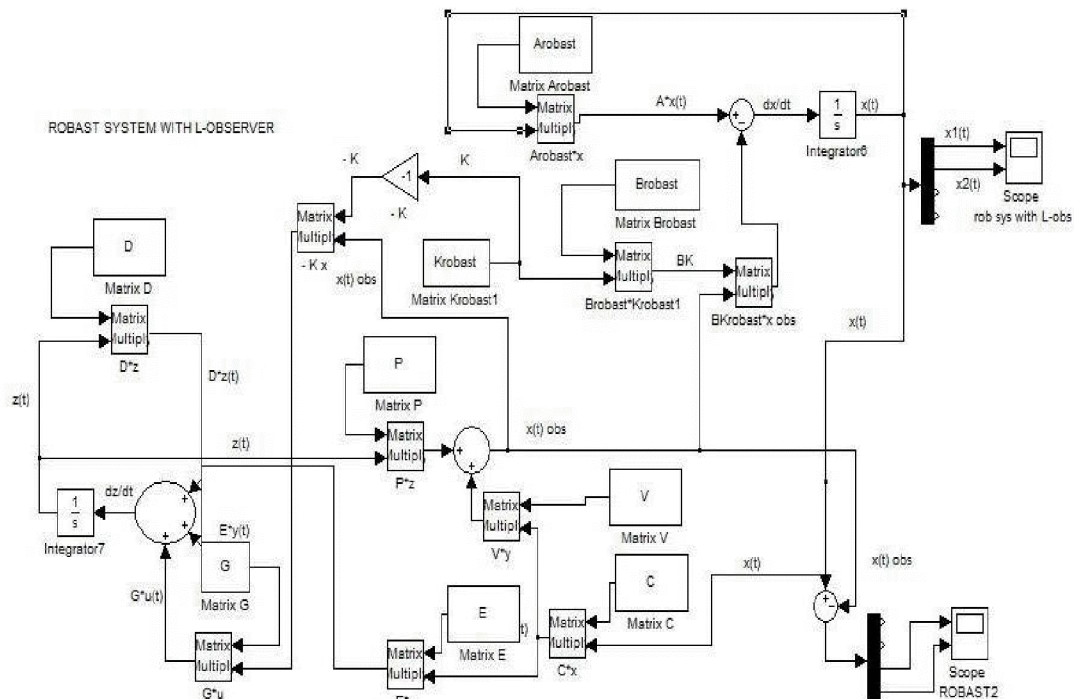


Рисунок 4 – Схема синтеза оптимального робастного управления с помощью наблюдателя Луинберга

Изложенный подход к решению задачи о нахождении оптимального робастного управления при недоступности измерения некоторых координат реализует схема в среде Matlab, приведенная на рисунке 4.

Как отмечалось ранее, если известно $x(t_0)$, то наша оценка координаты равна в точности исходной координате. Если же мы выбирали начальные условия наугад, то погрешности не избежать, но она будет со временем стремиться к нулю (рисунок 5).

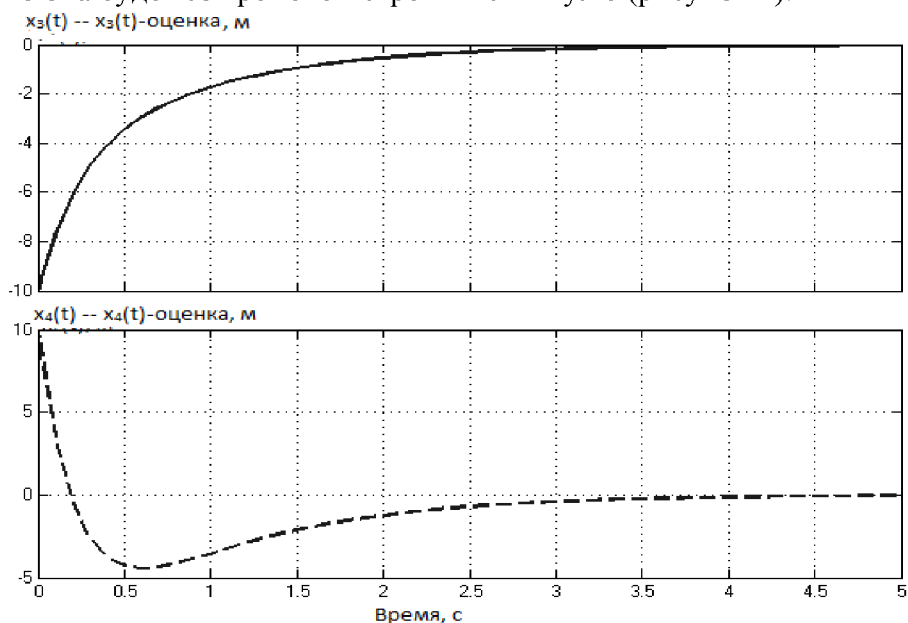


Рисунок 5 – Графики погрешностей оценки третьей и четвертой координат объекта

Проиллюстрируем отличие графиков колебаний двух первых координат состояния объекта при известных начальных условиях и при выбранных случайным образом (рисунки 6 и 7).

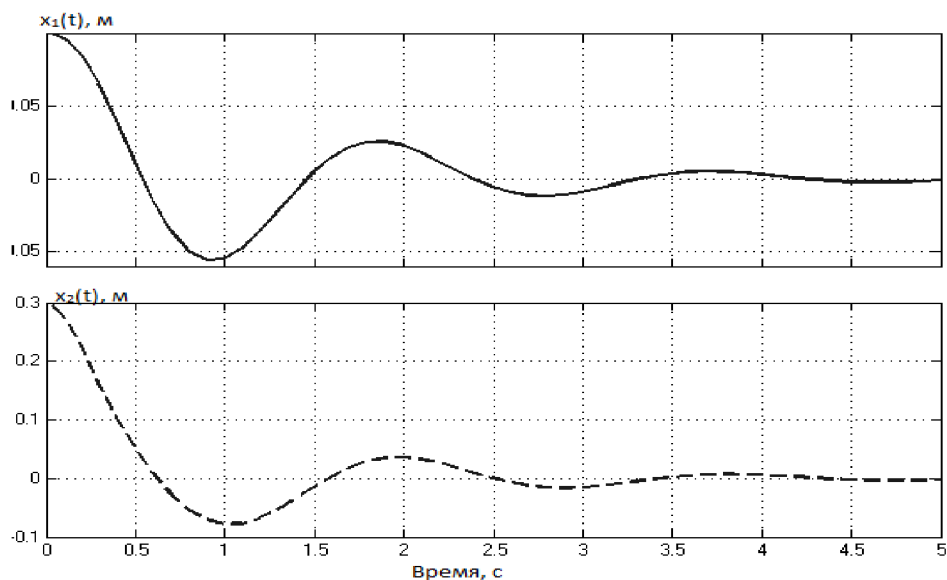


Рисунок 6 – График колебания двух первых координат состояния объекта при наличии известного начального состояния

Тем самым мы решили поставленную задачу о нахождении оптимального робастного управления в случае интервальной неопределенности параметров при невозможности измерения нескольких координат состояния объекта.

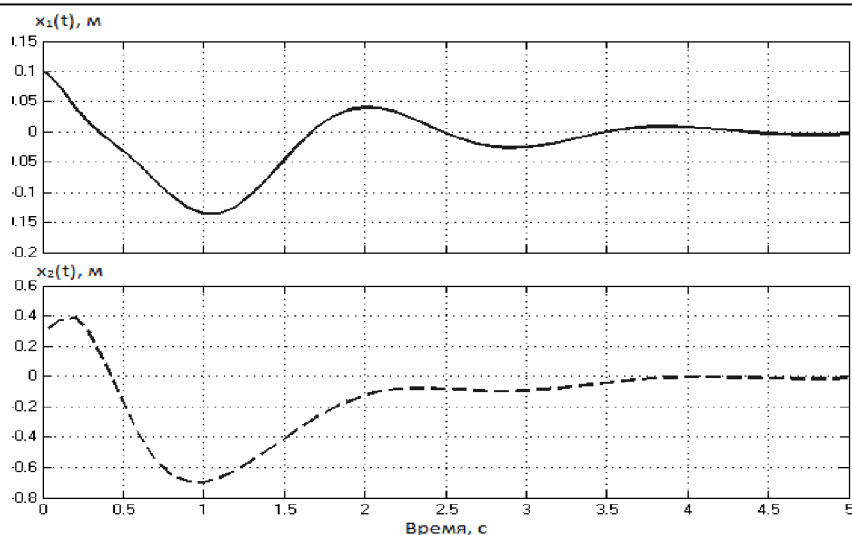


Рисунок 7 – График колебания двух первых координат состояния объекта при отсутствии информации о двух начальных координатах

Литература

1. Афанасьев В.Н. Алгоритмическое конструирование систем управления с неполной информацией. Учебное пособие – Московский государственный институт электроники и математики. М., 2004. – 148 с.
2. Афанасьев В.Н. Математическая теория конструирования систем управления: Учеб. для вузов./В. Н. Афанасьев, В. Б. Колмановский, В. Р. Носов. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Высш. шк., 2003. – 614 с.
3. Буков В.Н. Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. – Калуга: Издательство научной литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006. – 720 с.
4. Кийко Г.И. Цепи с нулевой чувствительностью. Труды МГТУ, ГИАБ №5 2006, с. 296-304.
5. Чарльз Генри Эдвардс, Дэвид Э. Пенни Дифференциальные уравнения и проблема собственных значений: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB. — 3-е изд. — М.: «Вильямс», 2007.
6. Черных И.В. Simulink: среда создания инженерных приложений / Под общ. ред. к.т.н. В. Г. Потемкина – М.: Диалог-МИФИ, 2003. – 496 с.
7. Федотов И.В. Синтез управления подвеской как элемент активной безопасности - Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана. Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2005.
8. Akbari A., Lohmann B.. Multi-objective preview control of active vehicle suspensions. – In Proceeding of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control (IFAC 2008). Seoul, Korea, July 6-11, 2008.
9. Chen H., Guo K. An LMI approach to multiobjective RMS gain control for active suspensions. – In Proceeding American Control Conference 2001.

Динамическая робастная задача стабилизации для линейных нестационарных систем

Триндюк В.А., к.ф.-м.н. доц. Кийко Г.И.

Университет машиностроения

8 (967) 008-23-55, trindjukvladimir@mail.ru, 8 (495) 527-34-75

Аннотация. В статье приведены постановки задач робастной стабилизации объекта и d-робастной задачи; дано определение робастного управления и указан способ синтеза оптимального гарантированного управления, при этом были выве-