

Рисунок 7 – График колебания двух первых координат состояния объекта при отсутствии информации о двух начальных координатах

Литература

1. Афанасьев В.Н. Алгоритмическое конструирование систем управления с неполной информацией. Учебное пособие – Московский государственный институт электроники и математики. М., 2004. – 148 с.
2. Афанасьев В.Н. Математическая теория конструирования систем управления: Учеб. для вузов./В. Н. Афанасьев, В. Б. Колмановский, В. Р. Носов. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Высш. шк., 2003. – 614 с.
3. Буков В.Н. Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. – Калуга: Издательство научной литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006. – 720 с.
4. Кийко Г.И. Цепи с нулевой чувствительностью. Труды МГГУ, ГИАБ №5 2006, с. 296-304.
5. Чарльз Генри Эдвардс, Дэвид Э. Пенни Дифференциальные уравнения и проблема собственных значений: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB. — 3-е изд. — М.: «Вильямс», 2007.
6. Черных И.В. Simulink: среда создания инженерных приложений / Под общ. ред. к.т.н. В. Г. Потемкина – М.: Диалог-МИФИ, 2003. – 496 с.
7. Федотов И.В. Синтез управления подвеской как элемент активной безопасности - Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана. Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2005.
8. Akbari A., Lohmann B.. Multi-objective preview control of active vehicle suspensions. – In Proceeding of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control (IFAC 2008). Seoul, Korea, July 6-11, 2008.
9. Chen H., Guo K. An LMI approach to multiobjective RMS gain control for active suspensions. – In Proceeding American Control Conference 2001.

Динамическая робастная задача стабилизации для линейных нестационарных систем

Триндюк В.А., к.ф.-м.н. доц. Кийко Г.И.

Университет машиностроения

8 (967) 008-23-55, trindjukvladimir@mail.ru, 8 (495) 527-34-75

Аннотация. В статье приведены постановки задач робастной стабилизации объекта и d-робастной задачи; дано определение робастного управления и указан способ синтеза оптимального гарантированного управления, при этом были выведе-

дены правила выбора наихудших параметров возмущения из известного диапазона и рассмотрена формула, связывающая при определенных наихудших параметрах начальное состояние объекта, ограничения на правом конце и допустимое время переходного процесса системы, за которое она должна перейти в состояние, удовлетворяющее граничным ограничениям. Теоретические результаты подкреплены численными примерами.

Ключевые слова: интервальная неопределенность, робастное управление, d-робастная задача, граничные, терминальные ограничения

Любой технический комплекс или любая социально-экономическая модель приносит пользу, только если она исправно функционирует. Этим очевидным обстоятельством вызван интерес к конструированию робастных систем и моделей и синтезу для них оптимального робастного управления, гарантирующего живучесть таких систем при любых, даже при самых негативных, значениях возмущающих факторов [5].

В данной статье мы рассмотрим синтез оптимального робастного управления для линейных систем при наличии интервальной неопределенности возмущающих факторов [2, 3]. Указанная задача очень актуальна, т.к. на практике мы часто не можем измерить значения возмущающих факторов в конкретный момент времени, но при этом весьма четко представляем себе их допустимые диапазоны изменения. Приведем правило выбора наихудших параметров возмущения из известного диапазона.

Применительно к указанной системе будет рассмотрена d-робастная задача, которая также имеет большую практическую ценность, потому что, говоря о живучести системы, часто имеют в виду ее способность после отработки возмущения входить в допустимую полосу колебаний за отведенное время. Очевидно, что, ставя более жесткие ограничения на допустимые колебания системы, мы должны дать ей больше времени на завершение переходных процессов и наоборот: чем строже ограничения на время переходных процессов, тем больше должен быть запас на максимальное отклонение параметров системы. Для четкого математического описания, изложенного выше, будет выведена формула, связывающая при определенных наихудших параметрах начальное состояние объекта, ограничения на правом конце и допустимое время переходного процесса системы, за которое она должна перейти в состояние, удовлетворяющее граничным ограничениям.

Теоретические результаты подкреплены численными примерами.

Пусть задан нестационарный динамический объект:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x(t) = A(t) x(t) + B(t)u(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1)$$

где: матрица A размера $n \times n$ и матрица $B(t)$ размера $n \times r$ являются суммами постоянных матриц A и B и матриц неизвестных параметров возмущения $\alpha(t)$ и $\beta(t)$, т.е.:

$$A(t) = A + \alpha(t), \quad B(t) = B + \beta(t).$$

Кроме того, неизвестные параметры лежат в заданных известных диапазонах:

$$\underline{\alpha}_{i,j} \leq \alpha_{i,j}(t) \leq \bar{\alpha}_{i,j}, \quad \forall i, j = \overline{1, n} \text{ и } \underline{\beta}_{i,j} \leq \beta_{i,j}(t) \leq \bar{\beta}_{i,j}, \quad \forall i = \overline{1, n}, \forall j = \overline{1, r}.$$

Требуется найти наихудшие значения параметров возмущения при соответствующем функционале.

Решим вначале стационарную задачу, после чего объект можно будет записать так:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x(t) = \Lambda x(t) + u_2(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2)$$

где: $u_2(t) = [\alpha(t) - \beta(t)R^{-1}B^T S]x(t)$, $\Lambda = A - BR^{-1}B^T S$, $K = R^{-1}B^T S$.

Теперь решим задачу максимизации по $u_2(t)$ функционала [3]:

$$J_2(x, u_2) = \frac{1}{2} \left[x^T(T)Fx(T) + \int_0^T \{x^T(t)Qx(t) - u_2^T(t)R_2 u_2(t)\} dt \right], \quad (3)$$

где: матрица R_2 положительно определенная, а матрицы F и Q стандартные [1].

Применяя соответствующий алгоритм, в итоге получим:

$$\alpha(t) - \beta(t)K = S^{**}(t), \quad (4)$$

где: $S^{**}(t)$ – решение уравнения:

$$\begin{cases} \frac{dS^{**}(t)}{dt} + S^{**}(t)\Lambda + \Lambda^T S^{**}(t) + S^{**}(t)R_2^{-1}S^{**}(t) + Q = 0, \\ S^{**}(T) = F. \end{cases} \quad (5)$$

Отсюда видно, что задача максимизации выражения $\alpha(t) - \beta(t)K$ по $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ легко, как сумма независимых слагаемых, раскладывается на две: нахождения наилучших $\alpha(t)$ и наилучших $\beta(t)$.

Пример 1

Пусть задан объект в виде:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30 & 3.333 & -3 & 0.333 \\ 40 & -40 & 4 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.667 & -0.667 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} + \beta(t) \cdot u(t),$$

где:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -15 & -8.33 & -1.5 & -0.083 \\ -6.667 & -10 & -0.667 & -1 \end{pmatrix} \leq \alpha(t) \leq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7.5 & 1.667 & 0.75 & 0.167 \\ 10 & 6.667 & 1 & 0.667 \end{pmatrix},$$

и

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.167 & -0.333 \\ 0 & -1.333 \end{pmatrix} \leq \beta(t) \leq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.333 & 0.167 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$x(t_0) = [x_1(t_0) \ x_2(t_0) \ x_3(t_0) \ x_4(t_0)]^T = [0.1 \ 0.3 \ 0 \ 0]^T$$

Требуется определить наилучшие параметры возмущений при функционале качества переходных процессов.

Известно, что наилучшие параметры возмущения есть $\bar{\alpha}(t)$ и $\bar{\beta}(t)$, а наилучшие – $\underline{\alpha}(t)$ и $\underline{\beta}(t)$. Проиллюстрируем это:

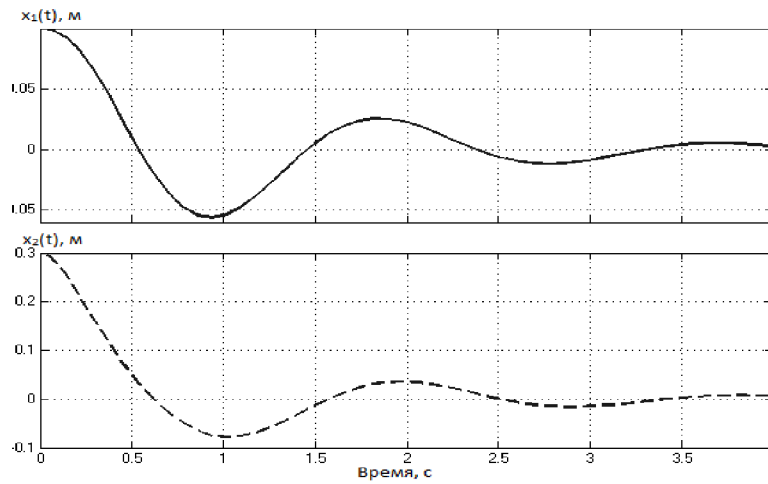


Рисунок 1 – График колебания двух первых координат состояния объекта при наихудших возмущениях

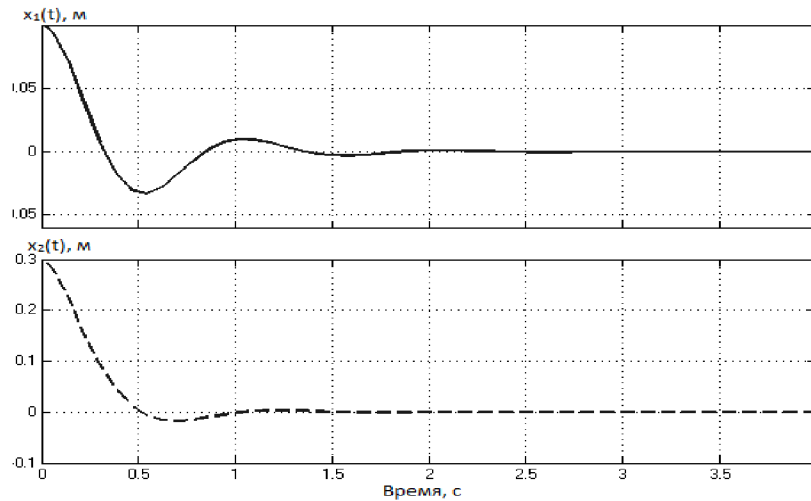


Рисунок 2 – График колебания двух первых координат состояния объекта при наилучших возмущениях

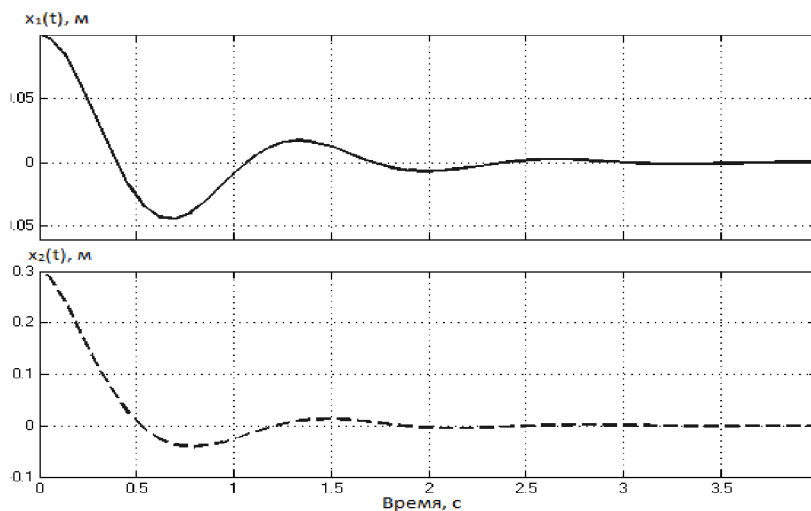


Рисунок 3 – График колебания двух первых координат состояния объекта при отсутствии возмущений

Свяжем начальные условия и условия на правом краю вида:

$$|x(T)| \leq d \Leftrightarrow |x_i(T)| \leq d_i, \quad \forall i = \overline{1, n}, \quad (6)$$

т.е. $x(T)$ должно лежать в d -окрестности нуля спустя время T .

Матрицы A^* и B^* - это матрицы $A(t)$ и $B(t)$ при наихудших значениях параметров возмущения соответственно. При этом робастная модель:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = A^*x(t) + B^*u(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (7)$$

имеет своим оптимальным управление:

$$u(t) = -R^{-1}B^{*T}Sx(t) \quad (8)$$

Подставляя управление (8) в систему (7), можно решить получившееся дифференциальное уравнение и написать выражение для $x(t)$:

$$x(t) = \exp \left\{ \left[A^* - B^*R^{-1}B^{*T}S \right] (t - t_0) \right\} x(t_0). \quad (9)$$

Тогда в момент времени $t = T$:

$$x(T) = \exp \left\{ \left[A^* - B^*R^{-1}B^{*T}S \right] (T - t_0) \right\} x(t_0) \quad (10)$$

Рассмотрим предельный случай (6), т.е.:

$$|x(T)| = d, \quad (11)$$

при этом уравнение (10) примет вид:

$$d = \exp \left\{ \left[A^* - B^*R^{-1}B^{*T}S \right] (T - t_0) \right\} |x(t_0)|. \quad (12)$$

Из (12) нетрудно заметить, что для того, чтобы $|x(T)| \leq d$, нужно, чтобы

$$d \geq \exp \left\{ \left[A^* - B^*R^{-1}B^{*T}S \right] (T - t_0) \right\} |x(t_0)|. \quad (13)$$

Уравнение (13) является искомым уравнением связи начальных условий, граничных ограничений и допустимого времени переходного процесса.

Пример 2

Рассмотрим динамический объект:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -22.5 & 5 & -2.25 & 0.5 \\ 50 & -33.333 & 5 & -3.333 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.5 & -1 \\ 0 & 6.667 \end{pmatrix} u(t), \quad (14)$$

- это робастный объект, который получился при подстановке в объект из примера 1 найденных наихудших параметров. Для объекта известны матрицы S и K [2]:

$$S = \begin{pmatrix} 11.6979 & -0.5777 & 0.7354 & 0.3472 \\ -0.5777 & 2.8955 & -0.4837 & -0.0586 \\ 0.7354 & -0.4837 & 0.7999 & 0.1292 \\ 0.3472 & -0.0586 & 0.1292 & 0.1037 \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} 0.3677 & -0.2419 & 0.3999 & 0.0646 \\ 1.5793 & 0.0933 & 0.0617 & 0.5624 \end{pmatrix}.$$

Проиллюстрируем применение уравнений (12), (13), меняя в них поочередно начальные условия, граничные условия и время. Решение данной задачи выполнено в системе математической алгебры Mathematica 7.0.

Подзадача 1. Исследуем вопрос, за какое время система при заданных начальных условиях перейдет в положение, удовлетворяющее заданному условию типа (6).

$$\text{Пусть } x(t_0) = (0.1 \ 0.3 \ 0 \ 0)^T, \ d = (0.02 \ 0.06 \ 100 \ 100)^T.$$

Последние две координаты в граничных условиях мы взяли заведомо большими, т.к. они нас не интересуют. Найдем время выполнения условия.

Посмотрим на графики $x_1(t)$ и $x_2(t)$ (рисунки 4 и 5 соответственно):

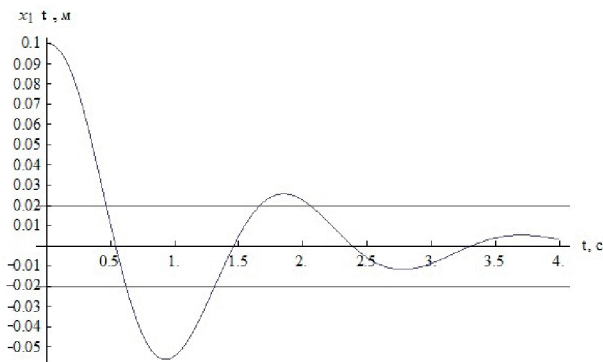


Рисунок 4 – График колебания первой координаты состояния объекта

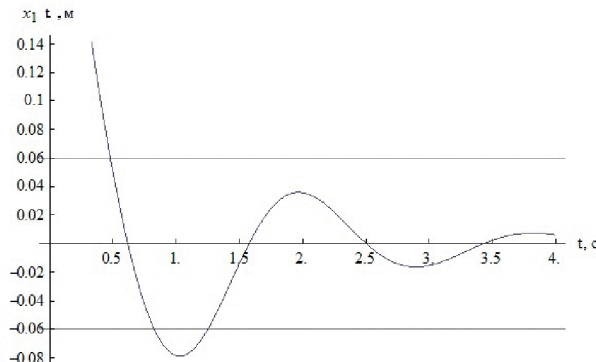


Рисунок 5 – График колебания второй координаты состояния объекта

Горизонтальными линиями на графике обозначена допустимая d -полоса, соответствующая условию (6) при заданном d .

Из графиков видно, что первая координата входит в d -полосу после второй секунды, а вторая координата между первой секундой и 1,5 секунды. Очевидно, что в поиске времени выполнения граничного условия мы должны ориентироваться на первую координату. Найдем приближенное численное решение, получим, что после 2,05528 секунды система начинает удовлетворять заданным условиям.

Подзадача 2. Теперь пусть задано допустимое время, например 2,5 с, а начальные условия оставим такими же, это позволит нам воспользоваться графиками, приведенными на рисунках 4 и 5. Найдем, в какую d -полосу войдет наша система за заданное время.

Эта задача демонстрирует нахождение максимума функции при $T \geq 2,5$. Численно получим, что через 2,5 секунды система окажется в d -полосе вида: $d = (0.0117 \ 0.0164 \ 100 \ 100)^T$.

Таким образом, уравнение (13) определяет связь между начальными условиями, ограничениями на правом краю и временем переходного процесса, за которое система робастной стабилизации должна перейти из начального состояния в состояние, удовлетворяющее граничным условиям.

Литература

1. Афанасьев В.Н. Оптимальные системы управления. Аналитическое конструирование: Учеб. пособие. – М.: РУДН, 2007. – 259 с.
2. Афанасьев В.Н. Алгоритмическое конструирование систем управления с неполной информацией. Учебное пособие – Московский государственный институт электроники и математики. М., 2004. – 148 с.
3. Афанасьев В.Н. Математическая теория конструирования систем управления: Учеб. для вузов./В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Высш. шк., 2003. – 614 с.
4. Буков В.Н. Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных сис-

- тем. – Калуга: Издательство научной литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006. – 720 с.
5. Кийко Г.И. Робастные электронные цепи. Труды Всероссийской научно-практической конференции «Математика, информатиология, естествознание в экономике и в обществе». М., Издательство МФЮА, 2006, с.72.
 6. Чарльз Генри Эдвардс, Дэвид Э. Пенни Дифференциальные уравнения и проблема собственных значений: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB. — 3-е изд. — М.: «Вильямс», 2007.
 7. Edvaldo Assunção, Marcelo C. M. Teixeira, и Rodrigo Cardim. Control Designs for Linear Systems Using State-Derivative Feedback. Systems, Structure and Control. Vienna: In-tech, 2008.
 8. Flávio A. Faria, Edvaldo Assunção, Marcelo C. M. Teixeira, and Rodrigo Cardim Robust State-Derivative Feedback LMI-Based Designs for Linear Descriptor Systems. Mathematical Problems in Engineering. Department of Electrical Engineering, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, São Paulo State University (UNESP), 15385-000 Ilha Solteira, SP, Brazil, 2009.

Вывод матриц Дирака в действительном, комплексном и кватернионном представлениях

к.т.н. доц. Кецарис А.А.
 Университет машиностроения
 8 (495) 223-05-23 доб. 1312

Аннотация. В статье исследуется связь между законами умножения векторов в ковариантной алгебре Клиффорда и матрицами Дирака. В результате устанавливается, что пространственные матрицы Дирака представляют собой записанные в матричной форме структурные постоянные алгебры Клиффорда над геометрическим пространством. Пространственно-временные матрицы Дирака представляют собой структурные постоянные сжатой алгебры Клиффорда над пространством-временем. Структурные постоянные рассматриваются над множеством действительных чисел, комплексных чисел и кватернионов.

Ключевые слова: матрицы Дирака, ковариантная ассоциативная алгебра, алгебра Клиффорда, структурные постоянные, структурные матрицы.

В основе этой статьи лежит предположение о том, что структурные матрицы алгебры Клиффорда как-то связаны с матрицами Дирака. Но сами структурные матрицы определяются законами умножения алгебры (в нашем случае законам умножения векторов в алгебре Клиффорда). Следовательно, между этими законами и матрицами Дирака должна существовать взаимосвязь [1]. Если нам удастся вывести матрицы Дирака, исходя из законов умножения алгебры Клиффорда, то это будет свидетельством в пользу выдвинутого предположения. А если учесть, что строгий вывод матриц Дирака в настоящее время отсутствует, то получение такого вывода само по себе представляет интерес [2]. Матрицы Дирака мы свяжем с присоединенным представлением ковариантной алгебры Клиффорда.

1. Присоединенное представление базисных векторов

Введем в рассмотрение ковариантную ассоциативную алгебру S . Ее векторы запишем в следующем виде:

$$S = S_I \cdot E^I,$$

где: S_I – координаты ковариантного вектора, E^I – базисные векторы.

Запишем закон умножения базисных векторов в алгебре S следующим образом:

$$E^I \circ E^K = C_L^{IK} \cdot E^L. \quad (1)$$

Здесь C_L^{IK} – структурные постоянные алгебры. Они рассматриваются в виде матриц, называемых структурными. Индекс I нумерует сами матрицы. Номер матрицы совпадает с