тем. – Калуга: Издательство научной литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006. – 720 с.
5. Кийко Г.И. Робастные электронные цепи. Труды Всероссийской научно-практической конференции «Математика, информациология, естествознание в экономике и в обществе». М., Издательство МФЮА, 2006, с.72.
6. Чарльз Генри Эдвардс, Дэвид Э. Пенни Дифференциальные уравнения и проблема собственных значений: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB . — 3-е изд. — М.: «Вильямс», 2007.
7. Edvaldo Assunção, Marcelo C. M. Teixeira, и Rodrigo Cardim. Control Designs for Linear Systems Using State-Derivative Feedback. Systems, Structure and Control. Vienna: In-tech, 2008.
8. Flávio A. Faria, Edvaldo Assunção, Marcelo C. M. Teixeira, and Rodrigo Cardim Robust State-Derivative Feedback LMI-Based Designs for Linear Descriptor Systems. Mathematical Problems in Engineering. Department of Electrical Engineering, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, São Paulo State University (UNESP), 15385-000 Ilha Solteira, SP, Brazil, 2009.

Вывод матриц Дирака в действительном, комплексном и кватернионном представлениях

к.т.н. доц. Кецарис А.А.
Университет машиностроения
8 (495) 223-05-23 доб. 1312

Аннотация. В статье исследуется связь между законами умножения векторов в ковариантной алгебре Клиффорда и матрицами Дирака. В результате устанавливается, что пространственные матрицы Дирака представляют собой записанные в матричной форме структурные постоянные алгебры Клиффорда над геометрическим пространством. Пространственно-временные матрицы Дирака представляют собой структурные постоянные сжатой алгебры Клиффорда над пространством-временем. Структурные постоянные рассматриваются над множеством действительных чисел, комплексных чисел и кватернионов.

Ключевые слова: *матрицы Дирака, ковариантная ассоциативная алгебра, алгебра Клиффорда, структурные постоянные, структурные матрицы.*

В основе этой статьи лежит предположение о том, что структурные матрицы алгебры Клиффорда как-то связаны с матрицами Дирака. Но сами структурные матрицы определяются законами умножения алгебры (в нашем случае законам умножения векторов в алгебре Клиффорда). Следовательно, между этими законами и матрицами Дирака должна существовать взаимосвязь [1]. Если нам удастся вывести матрицы Дирака, исходя из законов умножения алгебры Клиффорда, то это будет свидетельством в пользу выдвинутого предположения. А если учесть, что строгий вывод матриц Дирака в настоящее время отсутствует, то получение такого вывода само по себе представляет интерес [2]. Матрицы Дирака мы свяжем с присоединенным представлением ковариантной алгебры Клиффорда.

1. Присоединенное представление базисных векторов

Введем в рассмотрение ковариантную ассоциативную алгебру C. Ее векторы запишем в следующем виде:

$$S = S_I \cdot E^I ,$$

где: S_I – координаты ковариантного вектора, E^I – базисные векторы.

Запишем закон умножения базисных векторов в алгебре ***C*** следующим образом:

$$E^I \circ E^K = C_L^{IK} \cdot E^L . \qquad (1)$$

Здесь C_L^{IK} – структурные постоянные алгебры. Они рассматриваются в виде матриц, называемых структурными. Индекс I нумерует сами матрицы. Номер матрицы совпадает с номером левого базисного вектора. Индекс K нумерует строки, а индекс L – столбцы структурных матриц.

Запишем условие ассоциативности для произведения трех базисных векторов:

$$E^I \circ (E^K \circ E^N) = (E^I \circ E^K) \circ E^N .$$

Отсюда, используя закон умножения базисных векторов (1), получим:

$$C_L^{KN} \cdot (E^I \circ E^L) = C_L^{IK} \cdot (E^L \circ E^N).$$

Откуда

$$C_L^{KN} \cdot C_M^{IL} = C_L^{IK} \cdot C_M^{LN} . \qquad (2)$$

Сравнивая это выражение с самим законом умножения базисных векторов (1), заключаем, что базисным векторам E^I можно поставить в соответствие структурные матрицы C_L^{IK}. При этом умножению базисных векторов ставится в соответствие обычное умножение матриц в обратном порядке. Это соответствие составляет присоединенное или регулярное представление алгебры C и обозначается здесь следующим образом:

$$E^I \sim C_L^{IK} .$$

В регулярном представлении произвольному вектору алгебры соответствует матрица:

$$S_L^K = S_I \cdot C_L^{IK} \sim S = S_I \cdot E^I .$$

В соответствии с нашей программой будем рассматривать ковариантную алгебру как алгебру Клиффорда над четырехмерным пространством–временем специальной теории относительности. Итак, мы имеем алгебру Клиффорда, построенную на шестнадцати базисных векторах E^I, где индекс I пробегает значения от 0 до 15 [3]. Укажем эти базисные векторы и законы умножения, которым они подчиняются.

- Вектор E^0. Для него справедлив закон умножения:

$$E^0 \circ E^0 = E^0 .$$

- Векторы E^i, где индекс i принимает значения от 1 до 4. Эти векторы называются образующими. Для образующих вкторов имеют место следующие законы умножения:

$$E^i \circ E^0 = E^0 \circ E^i = E^i ,\; E^i \circ E^i = sign\left(E^i\right),$$

причем $sign\left(E^1\right) = sign\left(E^2\right) = sign\left(E^3\right) = -sign\left(E^4\right) = E^0$.

Пространство, построенное на образующих векторах, представляет собой пространство-время специальной теории относительности. Это пространство является образующим для рассматриваемой алгебры Клиффорда. (Далее все индексы, обозначаемые малыми латинскими буквами, начиная с i, пробегают значения от 1 до 4.)

- Векторы $E^{ik} = E^k \circ E^i$, ($i \neq k$), для которых выполняется правило перестановки индексов и, соответственно, сомножителей – условие антикоммутативности произведения:

$$E^{ik} = -E^{ki} .$$

Остальные законы умножения, в которых участвуют эти векторы, следуют из условий ассоциативности и антикоммутативности. В частности,

$$E^{ik} \circ E^{ik} = -E^i \circ (E^k \circ E^k) \circ E^i = -sign\left(E^i\right) \cdot sign\left(E^k\right) .$$

- Векторы $E^{ikl} = E^i \circ E^k \circ E^l$, ($i \neq k$, $i \neq l$, $k \neq l$), для которых выполняются следующие правила перестановки индексов, вытекающие из условий ассоциативности и атикоммутативности:

$$E^{ikl} = E^{kli} = E^{lik} = -E^{kil} = -E^{ilk} = E^{lki} .$$

Остальные законы умножения этих векторов также следуют из из условий ассоциативности и антикоммутативности. В частности,

$$E^{ikl} \circ E^{ikl} = -E^i \circ (E^k \circ (E^l \circ E^l) \circ E^k) \circ E^i = -sign\left(E^i\right) \cdot sign\left(E^k\right) \cdot sign\left(E^l\right).$$

- Вектор $E^{iklm} = E^i \circ E^k \circ E^l \circ E^m$, $(i \neq k, i \neq l, i \neq m, k \neq l, k \neq m, l \neq m)$.

Для этого вектора выполняются следующие правила перестановки индексов, вытекающие из условий ассоциативности и антикоммутативности

$$E^{iklm} = E^{ilmk} = E^{imkl} = -E^{ilkm} = -E^{ikml} = -E^{imkl} = -E^{klmi} = -E^{kmil} =$$
$$= -E^{kilm} = E^{kmli} = E^{klim} = E^{kiml} = E^{lmik} = E^{likm} = E^{lkmi} = -E^{\lim k} =$$
$$= -E^{lmki} = -E^{lkim} = -E^{mikl} = -E^{mkli} = -E^{mlik} = E^{mkil} = E^{milk} = E^{mlki}$$

Остальные законы умножения, в которых участвует этот вектор, также следуют из условий ассоциативности и антикоммутативности. В частности,

$$E^{iklm} \circ E^{iklm} = -E^i \circ (E^k \circ (E^l \circ (E^m \circ E^m) \circ E^l) \circ E^k) \circ E^i =$$
$$= -sign\left(E^i\right) \cdot sign\left(E^k\right) \cdot sign\left(E^l\right) \cdot sign\left(E^m\right).$$

В соответствии с нашим общим замыслом необходимо для указанных базисных векторов E^I найти структурные матрицы C_L^{IK}, пользуясь (1) и правилами умножения векторов в алгебре Клиффорда, и сравнить их с матрицами Дирака.

Из (1) следует алгоритм вычисления структурных матриц, соответствующих базисным векторам. Сначала нужно установить номер структурной матрицы в соответствии с номером базисного вектора. Затем для вычисления элемента структурной матрицы с номером I, расположенного в строке с номером K и в столбце с номером L, необходимо базисный вектор, номер которого совпадает с номером строки матрицы, умножить слева на базисный вектор, номер которого совпадает с номером структурной матрицы. Далее нужно определить базисный вектор, на который проецируется это произведение, и численное значение проекции. Тогда номер L указанного базисного вектора определит номер столбца, на пересечении которого с рассматриваемой строкой необходимо поставить указанное численное значение проекции.

В том случае, когда необходимо подчеркнуть размерность образующего пространства алгебры Клиффорда, используется обозначение C_4 вместо обозначения C. Это особенно полезно при выделении подалгебры алгебры Клиффорда. Например, подалгебру алгебры C_4 с тремя образующими базисными векторами (например, E^1, E^2, E^3) удобно обозначать C_3.

Теперь вычислим структурные матрицы C_L^{IK} по приведенному алгоритму для двух случаев:

1) алгебра C_3 с тремя образующими базисными векторами E^1, E^2, E^3;

2) алгебра C_4 с четырьмя образующими базисными векторами E^1, E^2, E^3, E^4.

2. Ковариантная алгебра Клиффорда C_3

2.1. Действительное представление

Для алгебры C_3 структурные матрицы будем вычислять для особого порядка индексов

(32, 13, 21, 0, 1, 2, 3, 123).

Приведенный порядок индексов оправдан тем, что, как будет показано далее, для него структурные матрицы алгебры Клиффорда в комплексном представлении совпадают с матрицами Дирака. С математической точки зрения порядок индексов несущественен вследствие аддитивности сложения компонент вектора, но с физической точки зрения указанному порядку индексов нужно придавать определенное значение. Таким образом, будем записывать слагаемые вектора в следующей последовательности

$$S = S_{32} \cdot E^{32} + S_{13} \cdot E^{13} + S_{21} \cdot E^{21} + S_0 \cdot E^0 + S_1 \cdot E^1 + S_2 \cdot E^2 + S_3 \cdot E^3 + S_{123} \cdot E^{123}. \quad (3)$$

В результате получим действительные матрицы 8×8 присоединенного представления базисных векторов E^I. Они приведены в разделе 2.4. Помимо действительного представления рассмотрим комплексное и кватернионное представления базисных векторов алгебры Клиффорда, удобные в силу своей компактности.

2.2. Комплексное представление

Остановимся на вопросе о представлении произведения алгебр Клиффорда. Алгебру Клиффорда C_n можно записать в виде произведения $C_m \times C_{(n-m)}$. И затем представить алгебру $C_{(n-m)}$ как алгебру гиперчисел. Например, вектор (3) алгебры C_3 можно записать в следующем виде:

$$S = E^{13} \circ (S_{32} \cdot E^{21} + S_{13} \cdot E^{0}) + E^{0} \circ (S_{21} \cdot E^{21} + S_{0} \cdot E^{0}) +$$
$$+E^{2} \circ (S_{1} \cdot E^{21} + S_{2} \cdot E^{0}) + E^{123} \circ (S_{3} \cdot E^{21} + S_{123} \cdot E^{0}).$$

Эта запись соответствует записи алгебры C_3 в виде произведения $C_2 \times C_1$. Базисными векторами алгебры C_3 являются E^{13}, E^{0}, E^{2}, E^{123}; базисными векторами алгебры C_1 являются E^{21}, E^{0}. Пространство C_1можно рассматривать как пространство комплексных чисел. Для этого базисному вектору E^{21} алгебры C_1 поставим в соответствие мнимую единицу *i* с обратным знаком, имея в виду, что $sign\left(E^{21}\right) = -1$, а базисному вектору E^{0} алгебры C_1 поставим в соответствие действительную единицу. В результате получим вектор алгебры C_3 в комплексном представлении

$$S = E^{13} \circ (-S_{32} \cdot i + S_{13}) + E^{0} \circ (-S_{21} \cdot i + S_{0}) +$$
$$+E^{2} \circ (-S_{1} \cdot i + S_{2}) + E^{123} \circ (-S_{3} \cdot i + S_{123}).$$

Комплексное представление дается матрицами 4×4, в которых блоки заменены базисными единицами 1 и i. Они приведены в раздел 2.4.

2.3. Кватернионное представление

Напомним, что кватернионы это числа вида

$$\alpha_0 \cdot q^0 + \alpha_1 \cdot q^1 + \alpha_2 \cdot q^2 + \alpha_3 \cdot q^3,$$

где: α_0, α_1, α_2, α_3 – действительные числа;

q^0, q^1, q^2, q^3 – базисные кватернионы, для которых выполняются следующие правила умножения:

$$q^0 \circ q^0 = q^0, \quad q^i \circ q^i = -q^0, \quad q^0 \circ q^i = q^i \circ q^0 = q^i, \quad (i = 1,\ 2,\ 3),$$
$$q^1 \circ q^2 = -q^2 \circ q^1 = q^3, \quad q^2 \circ q^3 = -q^3 \circ q^2 = q^1, \quad q^3 \circ q^1 = -q^1 \circ q^3 = q^2.$$

Кватернионное представление базисных векторов основано на следующем разложении вектора:

$$S = (S_{32} \cdot E^{32} + S_{13} \cdot E^{13} + S_{21} \cdot E^{21} + S_{0} \cdot E^{0}) \circ E^{0} +$$
$$+(S_{1} \cdot E^{32} + S_{2} \cdot E^{13} + S_{3} \cdot E^{21} + S_{123} \cdot E^{0}) \circ E^{123}. \qquad (4)$$

Эта запись соответствует записи алгебры C_3 в виде произведения $C_1 \times C_2$. Базисными векторами алгебры C_1 являются E^{0}, E^{123}; базисными векторами алгебры C_2 являются E^{32}, E^{13}, E^{21}, E^{123}. Так как $sign\left(E^{32}\right) = sign\left(E^{13}\right) = sign\left(E^{21}\right) = -1, sign\left(E^{0}\right) = 1$, то пространство C_2 можно рассматривать как пространство кватернионов. Для этого указанным базисным векторам ставятся в соответствие базисные кватернионы, которые обозначим соответственно 1, $-i \cdot \sigma^1$, $-i \cdot \sigma^2$, $-i \cdot \sigma^3$. Заменяя в (4) базисные векторы E^{0}, E^{32}, E^{13},

E^{21} базисными кватернионами, получим вектор алгебры C_3 в кватернионном представлении:

$$S=(-S_{32}\cdot i\cdot\sigma^1-S_{13}\cdot i\cdot\sigma^2-S_{21}\cdot i\cdot\sigma^3+S_0)\circ E^0+$$
$$+(-S_1\cdot i\cdot\sigma^1-S_2\cdot i\cdot\sigma^2-S_3\cdot i\cdot\sigma^3+S_{123})\circ E^{123}.$$

Кватернионное представление базисных векторов дается структурными матрицами 2×2, в которых соответствующие блоки обозначены 1, σ^1, σ^2, σ^3. Эти матрицы приведены в следующем разделе.

2.4. Структурные матрицы ковариантной алгебры Клиффорда C_3

В этом разделе приведем структурные матрицы ковариантной алгебры Клиффорда C_3 При преобразовании матриц от действительного представления к комплексному использованы следующие обозначения для блоков 2×2

$$\mathit{1}=\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1\\ \hline\end{array}\,,\qquad i=\begin{array}{|c|c|}\hline & 1\\ \hline -1 & \\ \hline\end{array}\,,$$

При преобразовании матриц от комплексного представления к кватернионному использованы следующие обозначения для блоков 2×2

$$\mathbb{1}=\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \\ \hline & 1\\ \hline\end{array}\,,\quad \sigma^1=\begin{array}{|c|c|}\hline & 1\\ \hline 1 & \\ \hline\end{array}\,,\quad \sigma^2=\begin{array}{|c|c|}\hline & -i\\ \hline i & \\ \hline\end{array}\,,\quad \sigma^3=\begin{array}{|c|c|}\hline -1 & \\ \hline & 1\\ \hline\end{array}\,.$$

Матрицы σ^1, σ^2, σ^3 представляют собой матрицы Паули (с той разницей, что по соображениям симметрии в качестве σ^3 взята матрица с противоположным знаком).

$$E^0\sim\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123\\ \hline
32 & 1 & & & & & & & \\
13 & & 1 & & & & & & \\
21 & & & 1 & & & & & \\
0 & & & & 1 & & & & \\ \hline
1 & & & & & 1 & & & \\
2 & & & & & & 1 & & \\
3 & & & & & & & 1 & \\
123 & & & & & & & & 1\\ \hline
\end{array}
=\mathit{1}\begin{array}{|cc|cc|l}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
1 & & & & 13\\
 & 1 & & & 0\\ \hline
 & & 1 & & 2\\
 & & & 1 & 123\\ \hline
\end{array}
=\mathit{1}\begin{array}{|c|c|l}
0 & 123 & \\ \hline
\mathbb{1} & & 0\\ \hline
 & \mathbb{1} & 123\\ \hline
\end{array}$$

$$E^1\sim\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123\\ \hline
32 & & & & & & & & -1\\
13 & & & & & & & 1 & \\
21 & & & & & & -1 & & \\
0 & & & & & 1 & & & \\ \hline
1 & & & & 1 & & & & \\
2 & & & -1 & & & & & \\
3 & & 1 & & & & & & \\
123 & -1 & & & & & & & \\ \hline
\end{array}
=i\begin{array}{|cc|cc|l}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & & & -1 & 13\\
 & & -1 & & 0\\ \hline
 & 1 & & & 2\\
1 & & & & 123\\ \hline
\end{array}
=i\begin{array}{|c|c|l}
0 & 123 & \\ \hline
 & -\sigma^1 & 0\\ \hline
\sigma^1 & & 123\\ \hline
\end{array}$$

$$E^2\sim\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123\\ \hline
32 & & & & & & & -1 & \\
13 & & & & & & & & -1\\
21 & & & & & 1 & & & \\
0 & & & & & & 1 & & \\ \hline
1 & & & 1 & & & & & \\
2 & & & & 1 & & & & \\
3 & -1 & & & & & & & \\
123 & & -1 & & & & & & \\ \hline
\end{array}
=i\begin{array}{|cc|cc|l}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & & & i & 13\\
 & & -i & & 0\\ \hline
 & -i & & & 2\\
i & & & & 123\\ \hline
\end{array}
=i\begin{array}{|c|c|l}
0 & 123 & \\ \hline
 & -\sigma^2 & 0\\ \hline
\sigma^2 & & 123\\ \hline
\end{array}$$

$$E^3\sim\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123\\ \hline
32 & & & & & & 1 & & \\
13 & & & & & -1 & & & \\
21 & & & & & & & & -1\\
0 & & & & & & & 1 & \\ \hline
1 & & -1 & & & & & & \\
2 & 1 & & & & & & & \\
3 & & & & 1 & & & & \\
123 & & & -1 & & & & & \\ \hline
\end{array}
=i\begin{array}{|cc|cc|l}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & & 1 & & 13\\
 & & & -1 & 0\\ \hline
-1 & & & & 2\\
 & 1 & & & 123\\ \hline
\end{array}
=i\begin{array}{|c|c|l}
0 & 123 & \\ \hline
 & -\sigma^3 & 0\\ \hline
\sigma^3 & & 123\\ \hline
\end{array}$$

$$E^{21}\sim\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123\\ \hline
32 & & 1 & & & & & & \\
13 & -1 & & & & & & & \\
21 & & & & -1 & & & & \\
0 & & & 1 & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & 1 & & \\
2 & & & & & -1 & & & \\
3 & & & & & & & & -1\\
123 & & & & & & & 1 & \\ \hline
\end{array}
=(-i)\begin{array}{|cc|cc|l}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
-1 & & & & 13\\
 & 1 & & & 0\\ \hline
 & & -1 & & 2\\
 & & & 1 & 123\\ \hline
\end{array}
=(-i)\begin{array}{|c|c|l}
0 & 123 & \\ \hline
\sigma^3 & & 0\\ \hline
 & \sigma^3 & 123\\ \hline
\end{array}$$

$$E^{13}\sim\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123\\ \hline
32 & & & -1 & & & & & \\
13 & & & & -1 & & & & \\
21 & 1 & & & & & & & \\
0 & & 1 & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & -1 & \\
2 & & & & & & & & -1\\
3 & & & & & 1 & & & \\
123 & & & & & & 1 & & \\ \hline
\end{array}
=(-i)\begin{array}{|cc|cc|l}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & -i & & & 13\\
i & & & & 0\\ \hline
 & & & -i & 2\\
 & & i & & 123\\ \hline
\end{array}
=(-i)\begin{array}{|c|c|l}
0 & 123 & \\ \hline
\sigma^2 & & 0\\ \hline
 & \sigma^2 & 123\\ \hline
\end{array}$$

$$E^{32}\sim\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123\\ \hline
32 & & & & -1 & & & & \\
13 & & & 1 & & & & & \\
21 & & -1 & & & & & & \\
0 & 1 & & & & & & & \\ \hline
1 & & & & & & & & -1\\
2 & & & & & & & 1 & \\
3 & & & & & & -1 & & \\
123 & & & & & 1 & & & \\ \hline
\end{array}
=(-i)\begin{array}{|cc|cc|l}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & 1 & & & 13\\
1 & & & & 0\\ \hline
 & & & 1 & 2\\
 & & 1 & & 123\\ \hline
\end{array}
=(-i)\begin{array}{|c|c|l}
0 & 123 & \\ \hline
\sigma^1 & & 0\\ \hline
 & \sigma^1 & 123\\ \hline
\end{array}$$

$$E^{123}\sim\begin{array}{r|cccc|cccc|}
 & 32 & 13 & 21 & 0 & 1 & 2 & 3 & 123\\ \hline
32 & & & & & 1 & & & \\
13 & & & & & & 1 & & \\
21 & & & & & & & 1 & \\
0 & & & & & & & & 1\\ \hline
1 & -1 & & & & & & & \\
2 & & -1 & & & & & & \\
3 & & & -1 & & & & & \\
123 & & & & -1 & & & & \\ \hline
\end{array}
=\mathit{1}\begin{array}{|cc|cc|l}
13 & 0 & 2 & 123 & \\ \hline
 & & 1 & & 13\\
 & & & 1 & 0\\ \hline
-1 & & & & 2\\
 & -1 & & & 123\\ \hline
\end{array}
=\mathit{1}\begin{array}{|c|c|l}
0 & 123 & \\ \hline
 & \mathbb{1} & 0\\ \hline
-\mathbb{1} & & 123\\ \hline
\end{array}$$

3. Ковариантная алгебра Клиффорда C_4

3.1. Действительное представление

Структурные матрицы алгебры C_4 будем вычислять для особого порядка индексов, обобщающего порядок индексов, указанный в разделе 2.1:

$$(32, 13, 21, 0, 42, 14, 1324, 34, 1, 2, 3, 123, 134, 234, 4, 124).$$

То есть, будем записывать слагаемые вектора в следующей последовательности:

$$S = S_{32} \cdot E^{32} + S_{13} \cdot E^{13} + S_{21} \cdot E^{21} + S_0 \cdot E^0 + S_{42} \cdot E^{42} + S_{14} \cdot E^{14} +$$
$$+S_{1324} \cdot E^{1324} + S_{34} \cdot E^{34} + S_1 \cdot E^1 + S_2 \cdot E^2 + S_3 \cdot E^3 + S_{123} \cdot E^{123} +$$
$$+S_{134} \cdot E^{134} + S_{234} \cdot E^{234} + S_4 \cdot E^4 + S_{124} \cdot E^{124}.$$

В результате получим матрицы 16×16 действительного представления базисных векторов E^I. Они приведены в разделе 3.4.

3.2. Комплексное представление

Комплексное представление основано на следующем разложении вектора:

$$S = E^{13} \circ (S_{32} \cdot E^{21} + S_{13} \cdot E^0) + E^0 \circ (S_{21} \cdot E^{21} + S_0 \cdot E^0) +$$
$$+E^{14} \circ (S_{42} \cdot E^{21} + S_{14} \cdot E^0) + E^{34} \circ (S_{1324} \cdot E^{21} + S_{34} \cdot E^0) +$$
$$+E^2 \circ (S_1 \cdot E^{21} + S_2 \cdot E^0) + E^{123} \circ (S_3 \cdot E^{21} + S_{123} \cdot E^0) +$$
$$+E^{234} \circ (S_{134} \cdot E^{21} + S_{234} \cdot E^0) + E^{124} \circ (S_4 \cdot E^{21} + S_{124} \cdot E^0).$$

Это представление соответствует записи C_4 в виде произведения $C_3 \times C_1$. Базисными векторами алгебры C_3 являются:

$$E^{13},\ E^0,\ E^{14},\ E^{34},\ E^2,\ E^{123},\ E^{234},\ E^{124};$$

базисными векторами алгебры C_1 являются E^{21}, E^0. Заменяя базисный вектор E^{21} мнимой единицей с обратным знаком, а базисный вектор E^0 действительной единицей, получим вектор алгебры C_4 в комплексном представлении:

$$S = E^{13} \circ (-S_{32} \cdot i + S_{13}) + E^0 \circ (-S_{21} \cdot i + S_0) +$$
$$+E^{14} \circ (-S_{42} \cdot i + S_{14}) + E^{34} \circ (-S_{1324} \cdot i + S_{34}) +$$
$$+E^2 \circ (-S_1 \cdot i + S_2) + E^{123} \circ (-S_3 \cdot i + S_{123}) +$$
$$+E^{234} \circ (-S_{134} \cdot i + S_{234}) + E^{124} \circ (-S_4 \cdot i + S_{124}).$$

Комплексное представление базисных векторов дается структурными матрицами 8×8, в которых соответствующие блоки заменены базисными единицами 1 и *i*. Эти матрицы приведены в разделе 3.4.

3.3. Кватернионное представление

Кватернионное представление базисных векторов основано на разложении вектора:

$$S = (S_{32} \cdot E^{32} + S_{13} \cdot E^{13} + S_{21} \cdot E^{21} + S_0 \cdot E^0) \circ E^0 +$$
$$+(S_{42} \cdot E^{32} + S_{14} \cdot E^{13} + S_{1324} \cdot E^{21} + S_{34} \cdot E^0) \circ E^{34} +$$
$$+(S_1 \cdot E^{32} + S_2 \cdot E^{13} + S_3 \cdot E^{21} + S_{123} \cdot E^0) \circ E^{123} +$$
$$+(S_{134} \cdot E^{32} + S_{234} \cdot E^{13} + S_4 \cdot E^{21} + S_{124} \cdot E^0) \circ E^{124}.$$

Это представление соответствует записи алгебры C_4 в виде произведения $C_2 \times C_2$. Базисными векторами одной алгебры C_2 являются E^0, E^{34}, E^{123}, E^{124}; базисными векторами другой алгебры C_2 являются E^{32}, E^{13}, E^{21}, E^0. Как и прежде, заменяя последнюю группу базисных векторов базисными кватернионами, получим вектор алгебры C_4 в кватернионном представлении:

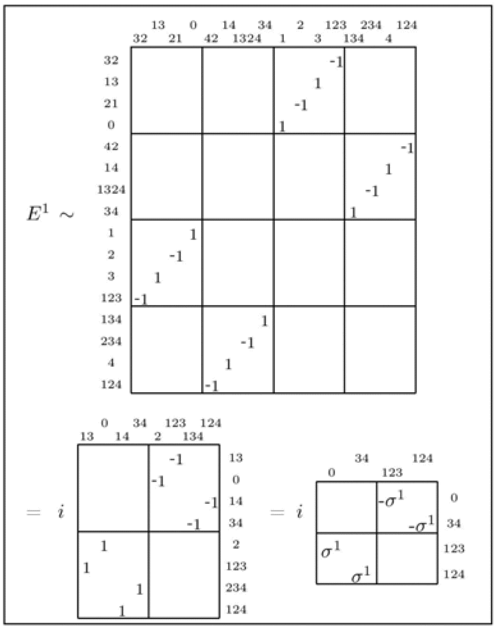
$$S = (-S_{32} \cdot i \cdot \sigma^1 - S_{13} \cdot i \cdot \sigma^2 - S_{21} \cdot i \cdot \sigma^3 + S_0) \circ E^0 +$$
$$+ (-S_{42} \cdot i \cdot \sigma^1 - S_{14} \cdot i \cdot \sigma^2 - S_{1324} \cdot i \cdot \sigma^3 + S_{34}) \circ E^{34} +$$
$$+ (-S_1 \cdot i \cdot \sigma^1 - S_2 \cdot i \cdot \sigma^2 - S_3 \cdot i \cdot \sigma^3 + S_{123}) \circ E^{123} +$$
$$+ (-S_{134} \cdot i \cdot \sigma^1 - S_{234} \cdot i \cdot \sigma^2 - S_4 \cdot i \cdot \sigma^3 + S_{124}) \circ E^{124}.$$

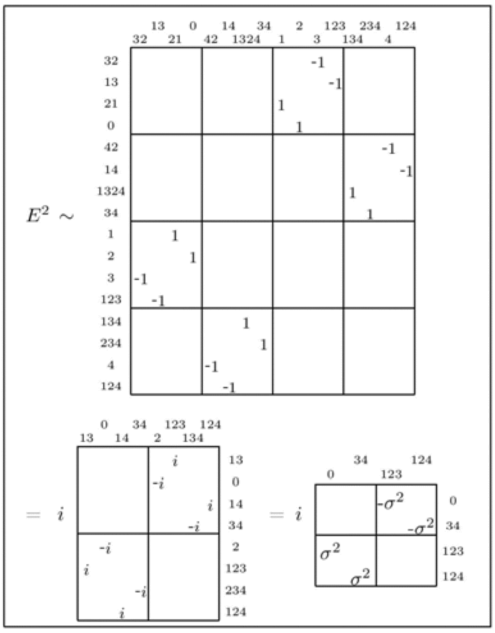
Кватернионное представление базисных векторов дается структурными матрицами 2×2, в которых соответствующие блоки обозначены 1, σ^1, σ^2, σ^3. Эти матрицы приведены в следующем разделе.

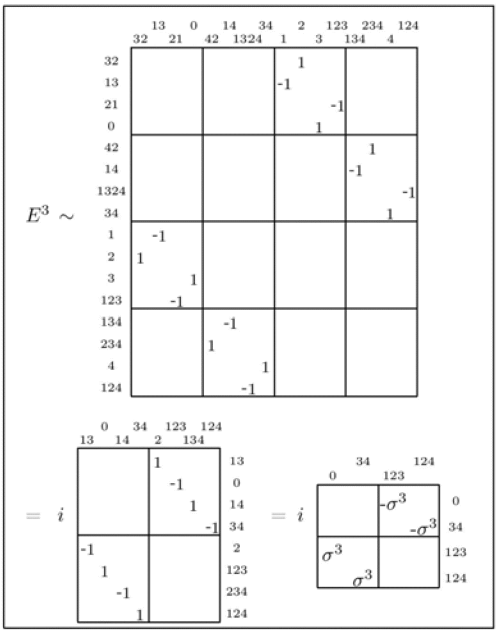
3.4. Структурные матрицы ковариантной алгебры Клиффорда C_4

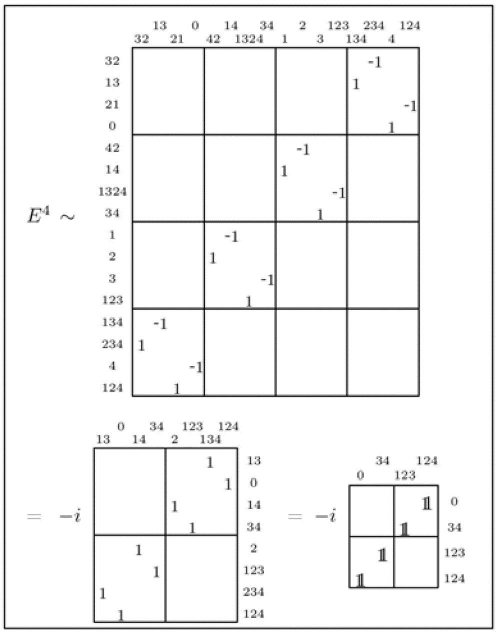
В этом разделе приведем структурные матрицы ковариантной алгебры Клиффорда C_4

Обозначения для блоков 2×2, использованых при преобразовании матриц от действительного представления к комплексному и при преобразовании матриц от комплексного представления к кватернионному, приведены в разделе 2.4.









Выводы

Восемь структурных матриц ковариантной алгебры C_3 в комплексном представлении совпадают с восьмью пространственными матрицами Дирака. К мнимой единице и комплексным числам мы приходим после обозначения ими блочных матриц. Таким образом, загадочная роль мнимой единицы, комплексных величин и пространства Гильберта в квантовой механике объясняется правилами умножения базисных векторов в алгебре Клиффорда. Шестнадцать структурных матриц ковариантной алгебры Клиффорда C_4 обобщают шестнадцать матриц Дирака, отличаясь от них, прежде всего, размерностью.

Так, в комплексном представлении эти матрицы имеют размерность 8×8, в то время как матрицы Дирака имеют размерность 4×4. Если предположить вырождение части компонент вектора ковариантной алгебры C_4, то структурные матрицы вырожденной алгебры C_4 сводятся к полному набору матриц Дирака.

Литература

1. Кецарис А.А. Алгебраические основы физики. Пространство-время и действие как универсальные алгебры, М., Издательство УРСС, 2004, 280с.
2. Hestenes D., Weingartshofer A. The electron, new theory and experiment, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
3. Hestenes D., Sobczyk G. Clifford algebra in geometric calculus, Riedel Publishing Company, Dordrecht, 1984.

Базовый эксперимент и метод идентификации материальных функций теории упругопластического деформирования

д.ф.-м.н. проф. Бондарь В.С., Пролубникова А.А.

Университет машиностроения

8(495)2230523 доб. 1318; tm@mami.ru

Аннотация. Рассматриваются основные положения и уравнения теории упругопластического деформирования. Выделяются материальные функции, замыкающие теорию. Формулируется базовый эксперимент и метод идентификации материальных функций.

Ключевые слова: пластичность, накопление повреждений, базовый эксперимент, идентификация материальных функций.

Введение

Разработка определяющих уравнений описания процессов упругопластического деформирования в настоящее время идет двумя основными направлениями. К первому направлению относятся различные варианты теории упругопластических процессов, базирующиеся на общей математической теории пластичности А.А. Ильюшина [1,2]. Ко второму направлению относятся различные варианты теории пластического течения при комбинированном упрочнении, базирующейся на концепции микронапряжений, выдвинутой В.В. Новожиловым [3].

Математическое моделирование процессов накопления повреждений при произвольных режимах пропорционального и непропорционального (сложного) циклического нагружения возможно только на основе формулировки кинетических (эволюционных) уравнений накопления повреждений, т.к. повреждение является функционалом процесс нагружения. Наиболее перспективны кинетические уравнения [3 – 7], построенные на энергетическом принципе, где в качестве энергии, отвечающей за процесс накопления повреждений, принимается энергия равная работе микронапряжений на поле пластических деформаций.

Рассматривается достаточно простой вариант второго направления – теория упругопла-