

Выводы

Восемь структурных матриц ковариантной алгебры C_3 в комплексном представлении совпадают с восьмью пространственными матрицами Дирака. К мнимой единице и комплексным числам мы приходим после обозначения ими блочных матриц. Таким образом, загадочная роль мнимой единицы, комплексных величин и пространства Гильберта в квантовой механике объясняется правилами умножения базисных векторов в алгебре Клиффорда. Шестнадцать структурных матриц ковариантной алгебры Клиффорда C_4 обобщают шестнадцать матриц Дирака, отличаясь от них, прежде всего, размерностью.

Так, в комплексном представлении эти матрицы имеют размерность 8×8 , в то время как матрицы Дирака имеют размерность 4×4 . Если предположить вырождение части компонент вектора ковариантной алгебры C_4 , то структурные матрицы вырожденной алгебры C_4 сводятся к полному набору матриц Дирака.

Литература

1. Кецарис А.А. Алгебраические основы физики. Пространство-время и действие как универсальные алгебры, М., Издательство УРСС, 2004, 280с.
2. Hestenes D., Weingartshofer A. The electron, new theory and experiment, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
3. Hestenes D., Sobczyk G. Clifford algebra in geometric calculus, Riedel Publishing Company, Dordrecht, 1984.

Базовый эксперимент и метод идентификации материальных функций теории упругопластического деформирования

д.ф.-м.н. проф. Бондарь В.С., Пролубникова А.А.
Университет машиностроения
8(495)2230523 доб. 1318; tm@mami.ru

Аннотация. Рассматриваются основные положения и уравнения теории упругопластического деформирования. Выделяются материальные функции, замыкающие теорию. Формулируется базовый эксперимент и метод идентификации материальных функций.

Ключевые слова: пластичность, накопление повреждений, базовый эксперимент, идентификация материальных функций.

Введение

Разработка определяющих уравнений описания процессов упругопластического деформирования в настоящее время идет двумя основными направлениями. К первому направлению относятся различные варианты теории упругопластических процессов, базирующиеся на общей математической теории пластичности А.А. Ильюшина [1,2]. Ко второму направлению относятся различные варианты теории пластического течения при комбинированном упрочнении, базирующейся на концепции микронапряжений, выдвинутой В.В. Новожиловым [3].

Математическое моделирование процессов накопления повреждений при произвольных режимах пропорционального и непропорционального (сложного) циклического нагружения возможно только на основе формулировки кинетических (эволюционных) уравнений накопления повреждений, т.к. повреждение является функционалом процесс нагружения. Наиболее перспективны кинетические уравнения [3–7], построенные на энергетическом принципе, где в качестве энергии, отвечающей за процесс накопления повреждений, принимается энергия равная работе микронапряжений на поле пластических деформаций.

Рассматривается достаточно простой вариант второго направления – теория упругопла-

стического деформирования, являющаяся частным вариантом теории неупругости [4,5]. Данный вариант теории пластичности прошел обширную верификацию [4,6] на широком спектре конструкционных сталей и сплавов и программ экспериментальных исследований.

Очевидно, что ни одна теория не может иметь практическое приложение, если четко не сформулированы базовый эксперимент и метод определения параметров и функций материала, замыкающих эту теорию.

В настоящей работе для теории упругопластического деформирования формулируется базовый эксперимент и метод идентификации (определения) материальных функций, замыкающих эту теорию.

Основные положения и уравнения теории пластичности

Материал однороден и начально изотропен. Тензор скоростей деформации представляется в виде суммы тензоров скоростей упругой и пластической деформаций:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p . \quad (1)$$

Упругие деформации при изменении напряжений следуют обобщенному закону Гука:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = \frac{1}{E} \cdot \left[\dot{\sigma}_{ij} - \nu \cdot \left(3 \cdot \dot{\sigma}_0 \cdot \delta_{ij} - \dot{\sigma}_{ij} \right) \right] , \quad (2)$$

где: E, ν – соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона,

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{ii} \text{ – среднее напряжение.}$$

Полагается, что в пространстве составляющих тензора напряжений существует поверхность нагружения, разделяющая области упругого и упругопластического состояний. Поверхность нагружения изотропно расширяется или сужается и смещается в процессе нагружения. Уравнение поверхности нагружения принимается в следующем виде:

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{3}{2} \cdot (s_{ij} - a_{ij}) \cdot (s_{ij} - a_{ij}) - \left[C_p(\epsilon_{u*}^p) \right]^2 = 0 . \quad (3)$$

Здесь $s_{ij}^* = s_{ij} - a_{ij}$ – девиатор активных [3] напряжений, s_{ij} – девиатор напряжений, ϵ_{u*}^p – длина дуги пластической деформации (накопленная пластическая деформация, параметр Одквиста). Тензор a_{ij} (добавочных напряжений, остаточных микронапряжений) характеризует смещение поверхности нагружения, а скаляр C_p отвечает размеру (радиусу) поверхности нагружения. Функция $C_p(\epsilon_{u*}^p)$ характеризует изотропное упрочнение, а тензор a_{ij} – анизотропное упрочнение.

Смещение поверхности нагружения определяется следующим эволюционным уравнением:

$$\dot{a}_{ij} = \frac{2}{3} \cdot g \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^p + \left(\frac{2}{3} \cdot g_\epsilon \cdot \epsilon_{ij}^p + g_a \cdot a_{ij} \right) \cdot \dot{\epsilon}_{u*}^p , \quad (4)$$

$$g = E_a + \beta \cdot \sigma_a , \quad g_\epsilon = \beta \cdot E_a , \quad g_a = -\beta .$$

Здесь g, g_ϵ, g_a – функции, подлежащие экспериментальному определению. В общем случае g, g_ϵ и g_a – являются функционалами процесса нагружения. Здесь же g, g_ϵ и g_a считаются константами материала, выражающимися через материальные параметры E_a, σ_a, β .

Тензор скоростей пластической деформации определяется следующим уравнением (ассоциированный с (3) закон течения, градиентальный закон течения):

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \dot{\lambda} = \frac{3}{2} \cdot \frac{s_{ij}^*}{\sigma_{u*}^*} \cdot \dot{\epsilon}_{u*}^p . \quad (5)$$

Здесь σ_u^* – интенсивность активных напряжений, $\dot{\varepsilon}_{u^*}^p$ – интенсивность скоростей пластической деформации.

Используя зависимости (1) – (5), можно получить уравнения для скорости накопленной пластической деформации соответственно для мягкого и жесткого нагружений:

$$\dot{\varepsilon}_{u^*}^p = \frac{1}{E_*} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{s_{ij}^* \cdot \dot{\sigma}_{ij}}{\sigma_u^*}, \quad (6)$$

$$\dot{\varepsilon}_{u^*}^p = \frac{3 \cdot G}{E_* + 3 \cdot G} \cdot \frac{s_{ij}^* \cdot \dot{\varepsilon}_{ij}}{\sigma_u^*}, \quad (7)$$

$$E_* = q_e + g + g_e \cdot e_u^{p*} + g_a \cdot a_u^*, \quad q_e = \frac{dC_p(\varepsilon_{u^*}^p)}{d\varepsilon_{u^*}^p}, \quad \varepsilon_u^{p*} = \frac{s_{ij}^* \cdot \varepsilon_{ij}^p}{\sigma_u^*}, \quad a_u^* = \frac{3}{2} \cdot \frac{s_{ij}^* \cdot a_{ij}}{\sigma_u^*}.$$

Условия упругого и упругопластического состояний имеют вид:

- упругость:

$$\sigma_u^* < C_p(\dot{\varepsilon}_{u^*}^p) \cup \dot{\varepsilon}_{u^*}^p \leq 0, \quad (8)$$

- упругопластичность:

$$\sigma_u^* = C_p(\dot{\varepsilon}_{u^*}^p) \cap \dot{\varepsilon}_{u^*}^p > 0. \quad (9)$$

Здесь под $\dot{\varepsilon}_{u^*}^p$ подразумевается выражение, задаваемое уравнением (6) или (7) или аналогичным ему для смешанных нагружений.

Для описания процесса накопления повреждений, используется энергетический подход и в качестве энергии, расходуемой на создание повреждений в материале, принимается энергия, равная работе добавочных напряжений (микронапряжений) на поле пластических деформаций. Кинетическое уравнение накопления повреждений принимается в следующем виде:

$$\dot{\omega} = \alpha \cdot \omega^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \cdot \frac{1}{W_0} \cdot a_{ij} \cdot \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad (10)$$

$$\alpha = (\sigma_a / \sigma_{ua})^{n_\alpha},$$

$$\sigma_{ua} = \left[\frac{3}{2} \cdot \left(a_{ij} - \frac{2}{3} \cdot E_a \cdot \varepsilon_{ij}^p \right) \cdot \left(a_{ij} - \frac{2}{3} \cdot E_a \cdot \varepsilon_{ij}^p \right) \right]^{1/2}.$$

Здесь σ_{ua} – интенсивность микронапряжений (добавочных напряжений) нелинейного типа. Уравнение (10) адекватно описывает нелинейные процессы накопления повреждений. Критерием разрушения материала будет достижение повреждением предельного значения, обычно принимаемого близким к единице.

Материальные функции

Теорию упругопластического деформирования замыкают следующие материальные функции, подлежащие экспериментальному определению:

E, ν – упругие параметры;

$C_p(\varepsilon_{u^*}^p)$ – функция изотропного упрочнения;

E_a, σ_a, β – параметры анизотропного упрочнения;

W_0 – энергия разрушения;

n_α – параметр нелинейности процесса накопления повреждений.

Базовый эксперимент и метод идентификации материальных функций

Для определения материальных функций теории упругопластического деформирования достаточно следующего минимального набора экспериментальных данных базового эксперимента:

- упругие параметры, которые определяются традиционными методами;
- диаграмма одноосного растяжения до деформации $0.05 \div 0.1$;
- диаграмма одноосного растяжения до деформации $0.05 \div 0.1$ после предварительного сжатия до деформации $0.01 \div 0.02$;
- циклические диаграммы и число циклов до разрушения при одноосном растяжении-сжатии при жестком нагружении с постоянным размахом деформации $0.005 \div 0.025$ вплоть до появления макротрещины размером ~ 1 мм;
- циклические диаграммы и число циклов до разрушения при одноосном растяжении-сжатии при двухблочном жестком нагружении с увеличивающимся и уменьшающимся размахом деформации $0.005 \rightarrow 0.025$ и $0.025 \rightarrow 0.005$. Число циклов на первом блоке должно соответствовать $0.4 \div 0.5$ от числа циклов до разрушения при размахе деформации первого блока.

Для определения параметров анизотропного упрочнения экспериментальные диаграммы растяжения и растяжения после предварительного сжатия представляются, вычитая из полной деформации упругую, в виде зависимостей между напряжениями σ_1 и σ_2 соответственно и накопленной пластической деформацией ε_{u*}^p (рисунок 1).

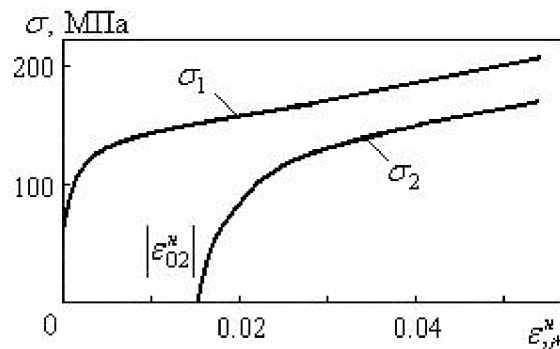


Рисунок 1 – Диаграммы растяжения и растяжения после предварительного сжатия

Рассматривая разность величины σ_1 и σ_2 при одинаковых значениях ε_{u*}^p можно получить [4–6] следующую зависимость в координатах:

$$y = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2 \cdot |\varepsilon_{02}^p|}, \quad x = \varepsilon_{u*}^p - |\varepsilon_{02}^p|, \quad (11)$$

которая показана на рисунке 2. Горизонтальной асимптотой этой зависимости является прямая $y = E_a$, что позволяет графически определить значение E_a .

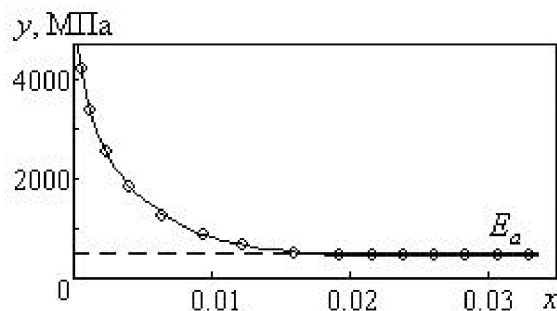


Рисунок 2 – Кривая для определения параметра E_a

Для получения параметров β и σ_a зависимость на рис. 2 перестраивается в полулогарифмических координатах:

$$z = \ln \left(\frac{y - E_a}{E_a} \right), \quad x = \varepsilon_{u*}^p - |\varepsilon_{02}^p|. \quad (12)$$

Полученная линейная зависимость (рисунок 3) позволяет по углу наклона φ и ординате z_0 определить β и σ_a по формулам

$$\beta = \operatorname{tg} \varphi, \quad \sigma_a = \frac{E_a \cdot |\varepsilon_{02}^p| \cdot \exp z_0}{1 - \exp(-\beta \cdot |\varepsilon_{02}^p|)}. \quad (13)$$

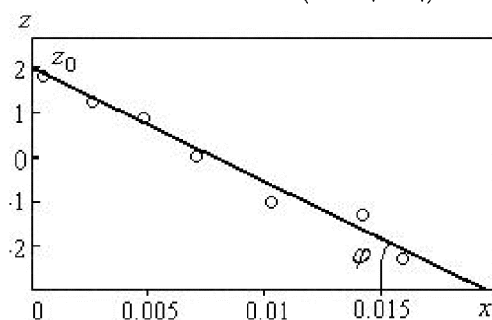


Рисунок 3 – Кривая для определения параметров β и σ_a

Получив параметры анизотропного упрочнения E_a , σ_a , β , можно теперь определить функцию изотропного упрочнения $C_p(\varepsilon_{u*}^p)$, используя экспериментальную диаграмму растяжения (рисунок 1), по формуле:

$$C_p(\varepsilon_{u*}^p) = \sigma_1(\varepsilon_{u*}^p) - E_a \cdot \varepsilon_{u*}^p - \sigma_a \cdot [1 - \exp(-\beta \cdot \varepsilon_{u*}^p)]. \quad (14)$$

Для остальных значений накопленной пластической деформации функция изотропного упрочнения определяется по результатам циклических испытаний при постоянном размахе деформации порядка $0.02 \div 0.025$ на основе зависимости максимального напряжения растяжения σ_N в конце цикла от номера цикла N . Тогда накопленная пластическая деформация будет равна:

$$\varepsilon_{u*}^p = \Delta\varepsilon^p / 2 + 2 \cdot \Delta\varepsilon^p \cdot N, \quad (15)$$

а значения функции изотропного упрочнения будут определяться по формуле:

$$C_p(\varepsilon_{u*}^p) = \sigma_N - E_a \cdot \Delta\varepsilon^p / 2 - \sigma_a \cdot \frac{1 - \exp(-\beta \cdot \Delta\varepsilon^p)}{1 + \exp(-\beta \cdot \Delta\varepsilon^p)}. \quad (16)$$

Энергия разрушения определяется из испытаний на малоцикловую усталость при постоянном размахе деформации, используя критерий малоцикловой прочности [4–6]. Тогда энергия разрушения будет определяться по формуле:

$$W_0 = \frac{2 \cdot \sigma_a}{\beta} \cdot \left[\beta \cdot \Delta\varepsilon^p - 2 \cdot \frac{1 - \exp(-\beta \cdot \Delta\varepsilon^p)}{1 + \exp(-\beta \cdot \Delta\varepsilon^p)} \right] \cdot N_p. \quad (17)$$

Для определения параметра нелинейности процесса накопления повреждений проводятся расчеты при двухблочных режимах циклического нагружения, на основе которых подбирается значение n_α до совпадения числа циклов до разрушения при расчетах и экспериментах.

Заключение

Базовый эксперимент, по результатам которого определяются материальные функции, достаточно прост и легко реализуем. Метод идентификации материальных функций строится на обработке экспериментальных кривых и не связан с определением пределов текучести и других величин с какими-либо допусками на деформации, что обычно вносит неоднозначность в получаемые результаты. Метод идентификации материальных функций алгоритмичен и позволяет достаточно просто проводить компьютерную обработку данных базового эксперимента и определять материальные функции.

Литература

1. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. - М.: Изд. АН СССР, 1963. - 271 с.
2. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. - М.: Изд-во МГУ, 1990. - 310 с.
3. Новожилов В.В., Кадашевич Ю.И. Микронапряжения в конструкционных материалах. - Л.: Машиностроение, 1990. - 224 с.
4. Бондарь В.С. Неупругое поведение и разрушение материалов и конструкций при сложном неизотермическом нагружении. // Автореферат диссерт... д.ф.-м.н. - Москва: МАМИ, 1990. - 40с.
5. Бондарь В.С. Неупругость. Варианты теории. - М.: Физматлит, 2004. - 144 с.
6. Бондарь В.С., Даншин В.В. Пластичность. Пропорциональные и непропорциональные нагружения. - М.: Физматлит, 2008. - 176 с.
7. Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. - М.: Физматлит, 2008. - 424 с.

Задача о растекании пластического слоя, состоящего из разных сред.

д.ф.-м.н. проф. Кадымов В.А.

Университет машиностроения

8(495)2230523; vkadymov@yandex.ru

Аннотация. Представлено одно приложение теории течения пластического слоя между сближающимися поверхностями рабочих тел инструмента, моделирующей процессы штамповки и прессования тонкостенных элементов конструкций. В рамках упрощенной постановки сформулирована краевая задача течения тонкого пластического слоя в клиновидной области, составленной из двух разных сред. Выписано точное решение задачи относительно скоростей течения и контактного давления. Выведено эволюционное уравнение для определения границ растекающегося пластического слоя. Показано, что границы клиновидных областей остаются прямыми.

Ключевые слова: краевая задача, растекание пластического слоя, эволюция границ, линия ветвления течения.

Рассматривается задача о свободном растекании между сближающимися жесткими шероховатыми плитами пластического слоя постоянной толщины [1,2,3] в клиновидной области, состоящего из двух разных сред с начальными углами раствора α_1 и α_2 соответственно (рисунок 1). Подобная задача, в условиях симметрии области, в постановке «модели идеальной жидкости» решена в [4].

Выберем неподвижную систему координат oxy , в которой в начальный момент $t = t_0$ указанная область задается углом $\beta_2 \geq 0$. При этом уравнения границ растекающейся области в начальный момент заданы уравнениями:

$$I'_1 : y = k_1 x, \quad k_1 > 0, \quad I'_2 : y = k_2 x, \quad k_2 \leq 0, \quad I'_{12} : y = k_0 x,$$