

Заключение

Базовый эксперимент, по результатам которого определяются материальные функции, достаточно прост и легко реализуем. Метод идентификации материальных функций строится на обработке экспериментальных кривых и не связан с определением пределов текучести и других величин с какими-либо допусками на деформации, что обычно вносит неоднозначность в получаемые результаты. Метод идентификации материальных функций алгоритмичен и позволяет достаточно просто проводить компьютерную обработку данных базового эксперимента и определять материальные функции.

Литература

1. Ильющин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. - М.: Изд. АН СССР, 1963. - 271 с.
2. Ильющин А.А. Механика сплошной среды. - М.: Изд-во МГУ, 1990. - 310 с.
3. Новожилов В.В., Кадашевич Ю.И. Микронапряжения в конструкционных материалах. - Л.: Машиностроение, 1990. - 224 с.
4. Бондарь В.С. Неупругое поведение и разрушение материалов и конструкций при сложном неизотермическом нагружении. // Автореферат диссерт... д.ф.-м.н. - Москва: МАМИ, 1990. - 40с.
5. Бондарь В.С. Неупругость. Варианты теории. - М.: Физматлит, 2004. - 144 с.
6. Бондарь В.С., Даншин В.В. Пластичность. Пропорциональные и непропорциональные нагружения. - М.: Физматлит, 2008. - 176 с.
7. Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. - М.: Физматлит, 2008. - 424 с.

Задача о растекании пластического слоя, состоящего из разных сред.

д.ф.-м.н. проф. Кадымов В.А.

Университет машиностроения

8(495)2230523; vkadymov@yandex.ru

Аннотация. Представлено одно приложение теории течения пластического слоя между сближающимися поверхностями рабочих тел инструмента, моделирующей процессы штамповки и прессования тонкостенных элементов конструкций. В рамках упрощенной постановки сформулирована краевая задача течения тонкого пластического слоя в клиновидной области, составленной из двух разных сред. Выписано точное решение задачи относительно скоростей течения и контактного давления. Выведено эволюционное уравнение для определения границ растекающегося пластического слоя. Показано, что границы клиновидных областей остаются прямыми.

Ключевые слова: краевая задача, растекание пластического слоя, эволюция границ, линия ветвления течения.

Рассматривается задача о свободном растекании между сближающимися жесткими шероховатыми плитами пластического слоя постоянной толщины [1,2,3] в клиновидной области, состоящего из двух разных сред с начальными углами раствора α_1 и α_2 соответственно (рисунок 1). Подобная задача, в условиях симметрии области, в постановке «модели идеальной жидкости» решена в [4].

Выберем неподвижную систему координат oxy , в которой в начальный момент $t = t_0$ указанная область задается углом $\beta_2 \geq 0$. При этом уравнения границ растекающейся области в начальный момент заданы уравнениями:

$$I'_1 : y = k_1 x, \quad k_1 > 0, \quad I'_2 : y = k_2 x, \quad k_2 \leq 0, \quad I'_{12} : y = k_0 x,$$

где: k_1, k_2, k_0 определяются через α_1, α_2 и β_2 :

$$\operatorname{tg} \beta_2 = -k_2, \operatorname{tg} (\alpha_2 - \beta_2) = k_0, \operatorname{tg} [\alpha_1 + (\alpha_2 - \beta_2)] = k_1 \quad (1)$$

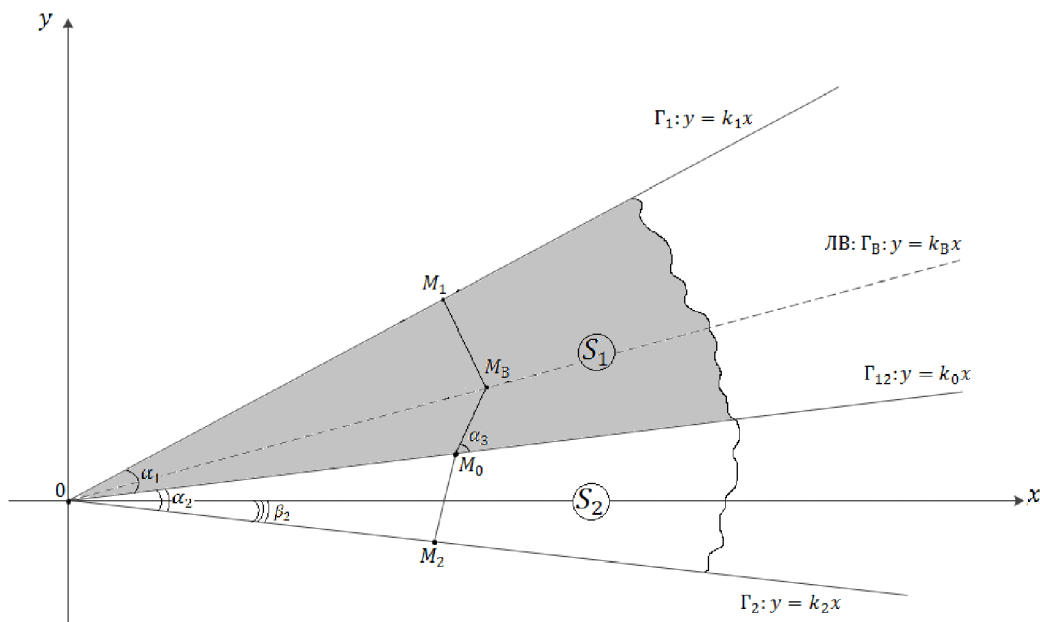


Рисунок 1 – О растекании в клиновидной области пластического слоя, состоящего из двух разных сред

Выпишем основные уравнения краевой задачи течения пластического слоя на плоскости (в размерных величинах, $t \geq t_0$):

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2 \cdot \tau_{sk}}{h} \cdot \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{2 \cdot \tau_{sk}}{h} \cdot \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad (4)$$

а также условия на неизвестной границе раздела двух сред $\Gamma_{12} (y = \varphi_0(x, t), t > t_0)$, которая в начальный момент задана уравнением $\varphi_0(x, t_0) = k_0 x$:

$$p_1 = p_2, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = v, \quad (6)$$

и на неизвестных свободных границах $\Gamma_m (y = \varphi_m(x, t), t > t_0, m = 1, 2)$, которые в начальный момент также известны ($\varphi_m(x, t_0) = k_m x$):

$$p = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} = v. \quad (8)$$

Здесь p, u, v – контактное давление и скорости течения; $\sigma_{sk} = \sqrt{3} \tau_{sk} (k = 1, 2)$ – предел текучести пластического материала в области S_1 и S_2 соответственно, причем для определенности положим, что $\sigma_{s1} \leq \sigma_{s2}$ (как показано на рисунке 1); $h = h(t)$ – известный закон изменения толщины слоя; $\lambda(t) = \ln(h_0/h(t))$ – степень деформации; $h_0 = h(t_0)$.

Пусть L_0 – характерное значение линейного размера слоя. Вводя безразмерные величины $\varepsilon = h_0/L_0$, $\delta = \sigma_{s1}/\sigma_{s2} \geq 1$, $p_0 = \sigma_{s1}/\varepsilon$, $v_0 = -(dh(t_0)/dt)/\varepsilon$, перепишем соотношения задачи в безразмерных величинах:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\bar{h}} \cdot \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad (2')$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\bar{h}} \cdot \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad \text{в } S_1 \quad (3')$$

$$\delta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\bar{h}} \cdot \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad (2'')$$

$$\delta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\bar{h}} \cdot \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad \text{в } S_2 \quad (3'')$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} - \frac{d\lambda}{d\bar{t}} = 0, \quad \text{в } S_1 \cup S_2 \quad (4')$$

$$\bar{p}_1 = \bar{p}_2, \quad (5')$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_0}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\varphi}_0}{\partial \bar{x}} = \bar{v}, \quad \text{на } \Gamma'_{12} \quad (6')$$

$$\bar{p} = 0, \quad (7')$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial \bar{x}} = \bar{v}, \quad \text{на } \Gamma_k (k=1,2) \quad (8')$$

Задача решается в безразмерных величинах. Для удобства записи черточки над безразмерными величинами ниже опускаем. Как известно [1], внутри области течения существует линия ветвления течения, образованная пересечением двух различных линий тока и на которой $u^2 + v^2 = 0$. С другой стороны, при $h = h(t)$ линиями тока служат прямые, ортогональные к контуру свободно растекающегося пластического слоя. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – некоторая точка на линии раздела двух сред Γ_{12} . Для определенности положим, что

$$\sigma_{s1} \cdot \sin \alpha_1 \geq \sigma_{s2} \cdot \sin \alpha_2. \quad (9)$$

Предположение (9) означает лишь, что линия ветвления течения в начальный момент $t = t_0$ располагается в области S_1 . Поэтому продолжим линию тока, исходящую из области S_2 , в область S_1 , отсчитывая от точки $M_0 \in \Gamma_{12}$. Для этого найдем угол преломления $\pi/2 - \alpha_3$ линии тока в точке M_0 [3]:

$$\frac{dp(s)}{ds} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{2}{\sqrt{3}h\delta} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right) = \frac{2}{\sqrt{3}h} \cos \alpha_3, \quad \delta \cdot \cos \alpha_3 = \sin \alpha_2, \quad (10)$$

где: s – параметр длины дуги вдоль линии Γ_{12} .

Формула (10) означает, что при пересечении линии раздела двух пластических сред линия тока преломляется, причем угол преломления увеличивается при прохождении в «менее плотную» среду (аналогия с оптикой). Из (10) следует, что все линии тока входят в область S_2 под постоянным углом к оси ox . Теперь, зная линию тока, исходящую из точки $M_0 \in \Gamma_{12}$, можем найти на ней точку $M_B(x_B, y_B)$ ветвления течения из следующего условия:

$$\frac{2}{\sqrt{3}h} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot (OM_0 \cdot \sin \alpha_2) + \frac{2}{\sqrt{3}h} \cdot (M_0M_B) = \frac{2}{\sqrt{3}h} \cdot \frac{(k_1 \cdot x_B - y_B)}{\sqrt{1+k_1^2}}. \quad (11)$$

В (11) справа стоит выражение для контактного давления в точке M_B , найденного

вдоль другой линии тока, исходящей от контура I'_1 , причем величина

$$s = \frac{|k_1 \cdot x_B - y_B|}{\sqrt{1+k_1^2}} = \frac{k_1 \cdot x_B - y_B}{\sqrt{1+k_1^2}}$$

есть расстояние от точки M_B до границы Γ_1 .

Находим оставшиеся в (11) величины:

$$OM_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = x_0 \cdot \sqrt{1+k_0^2}. \quad (12)$$

Уравнение прямой M_0M_B :

$$y_0 - y = \operatorname{tg}(\beta_0 + \alpha_3) \cdot (x - x_0), \quad (13)$$

где: $\beta_0 \equiv \operatorname{arctg} k_0 \geq 0$.

Из (10) получаем:

$$k_5 \equiv \operatorname{tg}(\beta_0 + \alpha_3) = \frac{\operatorname{tg} \beta_0 + \operatorname{tg} \alpha_3}{1 - \operatorname{tg} \beta_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_3} = \frac{k_0 \cdot \sin \alpha_2 + \sqrt{\delta^2 - \sin^2 \alpha_2}}{\sin \alpha_2 - k_0 \cdot \sqrt{\delta^2 - \sin^2 \alpha_2}}. \quad (14)$$

С другой стороны,

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg}[(\alpha_2 - \beta_2) + \beta_2] = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_2 - \beta_2) + \operatorname{tg} \beta_2}{1 - \operatorname{tg}(\alpha_2 - \beta_2) \cdot \operatorname{tg} \beta_2} = \frac{k_0 - k_2}{1 + k_0 \cdot k_2};$$

$$\sin \alpha_2 = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_2}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2}} = \frac{k_0 - k_2}{\sqrt{(1 + k_0 \cdot k_2)^2 + (k_0 - k_2)^2}} > 0. \quad (15)$$

Подставим (15) в (14) и найдем k_5 в зависимости от k_2 , k_0 и δ :

$$k_5 = \frac{k_0 \cdot (k_0 - k_2) + \sqrt{\delta^2 \cdot (1 + k_0 \cdot k_2)^2 + (\delta^2 - 1) \cdot (k_0 - k_2)^2}}{(k_0 - k_2) - k_0 \cdot \sqrt{\delta^2 \cdot (1 + k_0 \cdot k_2)^2 + (\delta^2 - 1) \cdot (k_0 - k_2)^2}}. \quad (16)$$

В частности, при $\delta = 1$ (т.е. пластическая среда – однородная) из (16) получаем, что

$$k_5 = -\frac{1}{k_2}. \quad (16')$$

Условие (16') означает, что при пересечении линии раздела Γ_{12} линия тока не преломляется. Из (13) получаем:

$$M_0M_B = \sqrt{(y_B - y_0)^2 + (x_B - x_0)^2} = |x_B - x_0| \cdot \sqrt{1+k_5^2}, \quad (17)$$

где учтено, что

$$y_B = y_0 + k_5 \cdot (x_B - x_0) = k_0 \cdot x_0 + k_5 \cdot (x_B - x_0). \quad (17')$$

Подставим (12), (15), (16), (17) в (11):

$$\frac{1}{\delta} \cdot (x_0 \cdot \sqrt{1+k_0^2}) \cdot \sin \alpha_2 + |x_B - x_0| \cdot \sqrt{1+k_5^2} = \frac{k_1 \cdot x_B - (y_0 + k_5 \cdot (x_B - x_0))}{\sqrt{1+k_1^2}}.$$

Разрешим последнее соотношение относительно x_B ($x_B \geq x_0$):

$$x_B = x_0 \cdot \frac{f_1(k_1, k_2, k_0, \delta)}{f_2(k_1, k_2, k_0, \delta)}, \quad (18)$$

где: $f_1 \equiv -\frac{1}{\delta} \sqrt{1+k_0^2} \sin \alpha_2 + \sqrt{1+k_5^2} + \frac{k_5 - k_0}{\sqrt{1+k_1^2}} = -\frac{1}{\delta} \frac{\sqrt{1+k_0^2} (k_0 - k_2)}{\sqrt{(1+k_0 k_2)^2 + (k_0 - k_2)^2}} + \sqrt{1+k_5^2} + \frac{k_5 - k_0}{\sqrt{1+k_1^2}};$

$$f_2 \equiv \sqrt{1+k_5^2} - \frac{k_1 - k_5}{\sqrt{1+k_1^2}}$$

Как видно из (17)', (18), линия ветвления (ЛВ) в момент $t = t_0$ есть прямая:

$$y_B = k_B \cdot x_B, \quad k_B \equiv \frac{f_1 \cdot k_5 + f_2 \cdot (k_0 - k_5)}{f_1}. \quad (19)$$

В частности, при $\delta = 1$ формула (19) упрощается:

$$k_B = \frac{k_2 \sqrt{1+k_1^2} + k_1 \sqrt{1+k_2^2}}{\sqrt{1+k_1^2} + \sqrt{1+k_2^2}}, \quad (19')$$

$$\arctg k_B - \arctg k_2 = \arctg k_1 - \arctg k_B = \frac{1}{2} \cdot (\arctg k_1 - \arctg k_2). \quad (19'')$$

Формула (19'') означает, что для однородного пластического слоя линия ветвления равноотстоит от линий свободных контуров I'_1 и I'_2 . Если дополнительно принять, что $k_2 = -k_1$, то получаем:

$$k_B = 0, \quad (19''')$$

т.е. линия ветвления совпадает с осью ox .

Получим теперь зависимости для контактного давления и скорости течения в начальный момент. Рассмотрим сперва область S_{1B} , ограниченную линиями I'_1 и I'_B . Линия тока, проходящая через точку $M(x, y) \in S_{1B}$:

$$y - y_B = -\frac{1}{k_1} \cdot (x - x_B).$$

Последнее условие, с учетом (19), разрешается относительно x_B :

$$x_B = \frac{k_1 \cdot y + x}{k_1 \cdot k_B + 1}. \quad (20)$$

Тогда,

$$p(x, y) = \frac{2}{\sqrt{3}h} \cdot \frac{(k_1 \cdot x - y)}{\sqrt{1+k_1^2}}, \quad (21)$$

$$V(x, y) = \frac{d\lambda}{dt} \cdot |x_B - x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{k_1^2}} = \frac{d\lambda}{dt} \cdot \frac{(x_B - x) \cdot \sqrt{1+k_1^2}}{k_1} = \frac{d\lambda}{dt} \cdot \frac{\sqrt{1+k_1^2}}{k_1 \cdot k_B + 1} \cdot (y - k_B \cdot x), \quad (22)$$

$$u = -V \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right) = -V \cdot \sin \beta_1 = -\frac{V \cdot k_1}{\sqrt{1+k_1^2}} = -\frac{d\lambda}{dt} (x_B - x) = -\frac{d\lambda}{dt} \cdot \frac{k_1 \cdot (y - k_B \cdot x)}{k_1 \cdot k_B + 1},$$

$$v = V \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right) = V \cdot \cos \beta_1 = \frac{V}{\sqrt{1+k_1^2}} = \frac{d\lambda}{dt} \cdot \frac{(x_B - x)}{k_1} = \frac{d\lambda}{dt} \cdot \frac{(y - k_B \cdot x)}{k_1 \cdot k_B + 1}, \quad (23)$$

где: $\beta_1 \equiv \arctg k_1 > 0$.

Рассмотрим теперь область S_{B0} , ограниченную линиями Γ_B и Γ_{12} . Линия тока, проходящая через точку $M(x, y) \in S_{B0}$, имеет вид:

$$y - y_B = k_5 \cdot (x - x_B).$$

Разрешим последнее условие относительно x_B :

$$x_B = \frac{y - k_5 \cdot x}{k_B - k_5}. \quad (24)$$

Тогда,

$$p(x, y) = p(M_B) + \frac{2}{\sqrt{3h}} \cdot (M_B M) = \frac{2}{\sqrt{3h}} \cdot \frac{(k_1 \cdot x_B - y_B)}{\sqrt{1+k_1^2}} + \frac{2}{\sqrt{3h}} \cdot \sqrt{(y-y_B)^2 + (x-x_B)^2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3h}} \cdot \left(\frac{y-k_5 \cdot x}{k_B - k_5} \right) \cdot \frac{(k_1 - k_B)}{\sqrt{1+k_1^2}} + \frac{2}{\sqrt{3h}} \cdot \left(\frac{y-k_B \cdot x}{k_B - k_5} \right) \cdot \sqrt{1+k_5^2}, \quad (25)$$

$$V(x, y) = \frac{d\lambda}{dt} \cdot (M_B M) = \frac{d\lambda}{dt} \cdot \sqrt{(x_B - x)^2 + (y_B - y)^2} = \frac{d\lambda}{dt} \cdot |x - x_B| \cdot \sqrt{1+k_5^2} =$$

$$= -\frac{d\lambda}{dt} \cdot (x_B - x) \cdot \sqrt{1+k_5^2} = -\frac{d\lambda}{dt} \cdot \sqrt{1+k_5^2} \cdot \frac{y - k_B \cdot x}{k_B - k_5}, \quad (26)$$

$$u = -V \cdot \cos(\alpha_3 + \beta_0) = -\frac{V}{\sqrt{1+k_5^2}} = -\frac{d\lambda}{dt} \cdot (x_B - x) = -\frac{d\lambda}{dt} \cdot \frac{y - k_B \cdot x}{k_B - k_5},$$

$$v = -V \cdot \sin(\alpha_3 + \beta_0) = -\frac{V \cdot \operatorname{tg}(\alpha_3 + \beta_0)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\alpha_3 + \beta_0)}} = -\frac{d\lambda}{dt} \cdot (x_B - x) \cdot k_5 = -\frac{d\lambda}{dt} \cdot \frac{(y - k_B \cdot x) \cdot k_5}{k_B - k_5}. \quad (27)$$

Рассмотрим, наконец, область S_{B_2} , ограниченную линиями Γ_{12} и Γ_2 . Линия тока, проходящая через точку $M(x, y) \in S_{B_2}$, имеет вид:

$$y = y_0 - \frac{1}{k_2} \cdot (x - x_0), \quad (28)$$

Разрешим последнее условие относительно x_0 :

$$x_0 = \frac{k_2 \cdot y + x}{k_2 \cdot k_0 + 1}. \quad (29)$$

Тогда,

$$p(x, y) = \frac{2}{\sqrt{3h\delta}} \cdot \frac{|k_2 \cdot x - y|}{\sqrt{1+k_2^2}} = \frac{2}{\sqrt{3h\delta}} \cdot \frac{-k_2 \cdot x + y}{\sqrt{1+k_2^2}}. \quad (30)$$

Скорость течения в точке M_0 допускает разрыв. Найдем скорость в точке M_0 , со стороны рассматриваемой части области течения, используя непрерывность нормальной скорости, а также условие (26):

$$V(M_{02}) = V(M_{01}) \cdot \frac{\sin \alpha_3}{\cos \alpha_2} = \frac{d\lambda}{dt} \cdot \sqrt{1+k_5^2} \cdot \frac{y_0 - k_B \cdot x_0}{k_B - k_5} \cdot \frac{\sin \alpha_3}{\cos \alpha_2}$$

С другой стороны, согласно (10) и (15),

$$\cos \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha_2}} = \frac{1+k_0 \cdot k_2}{\sqrt{(1+k_0 \cdot k_2)^2 + (k_0 - k_2)^2}}, \quad (31)$$

$$\sin \alpha_3 = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_3} = \sqrt{1 - \frac{1}{\delta^2} \cdot \sin^2 \alpha_2} = \frac{\sqrt{\delta^2 \cdot (1+k_0 \cdot k_2)^2 + (\delta^2 - 1) \cdot (k_0 - k_2)^2}}{\delta \cdot \sqrt{(1+k_0 \cdot k_2)^2 + (k_0 - k_2)^2}}. \quad (32)$$

В результате,

$$V(M_{02}) = \frac{d\lambda}{dt} \cdot \sqrt{1+k_5^2} \cdot \frac{k_0 - k_B}{k_B - k_5} \cdot \frac{\sqrt{\delta^2 \cdot (1+k_0 \cdot k_2)^2 + (\delta^2 - 1) \cdot (k_0 - k_2)^2}}{\delta \cdot (k_2 \cdot k_0 + 1)} \cdot x_0, \quad (33)$$

$$V(x, y) = V(M_{02}) + \frac{d\lambda}{dt} \cdot (M_0 M) = V(M_{02}) + \frac{d\lambda}{dt} \cdot \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \quad (34)$$

$$= V(M_{02}) + \frac{d\lambda}{dt} \cdot (x_0 - x) \cdot \frac{\sqrt{1+k_2^2}}{-k_2} = \frac{d\lambda}{dt} \cdot \psi(x, y),$$

$$\psi \equiv \frac{1}{k_2 k_0 + 1} \left[\frac{\sqrt{1+k_5^2} \cdot \frac{k_0 - k_B}{k_B - k_5} \sqrt{\delta^2 (1+k_0 k_2)^2 + (\delta^2 - 1)(k_0 - k_2)^2}}{\delta (k_2 k_0 + 1)} (k_2 y + x) - \sqrt{1+k_2^2} (y - k_0 x) \right],$$

$$u(x, y) = -V(M) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta_2\right) = -V(M) \cdot \sin \beta_2 = \frac{d\lambda}{dt} \cdot \frac{\psi \cdot k_2}{\sqrt{1+k_2^2}},$$

$$v(x, y) = -V(M) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta_2\right) = -V(M) \cdot \cos \beta_2 = -\frac{d\lambda}{dt} \cdot \frac{\psi}{\sqrt{1+k_2^2}}. \quad (35)$$

Итак, нашли распределение p, u, v во всей области течения в начальный момент. Покажем, что линии $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_{12}$ остаются прямыми. Допустим, что они остаются прямыми, то есть их можно задать уравнениями:

$$\Gamma_1: y = k_1(t)x, \quad \Gamma_2: y = k_2(t)x, \quad \Gamma_{12}: y = k_0(t)x. \quad (36)$$

Подставим (36) в кинематические условия (8'):

$$\Gamma_1: \dot{k}_1 \cdot x - k_1 \cdot \frac{d\lambda}{dt} \cdot \frac{k_1 \cdot (y - k_B \cdot x)}{k_1 \cdot k_B + 1} = \frac{d\lambda}{dt} \cdot \frac{(y - k_B \cdot x)}{k_1 \cdot k_B + 1},$$

в которой использованы формулы (23) относительно скоростей, а $y = k_1 \cdot x$. Или

$$\Gamma_1: \dot{k}_1 - \frac{d\lambda}{dt} \cdot \frac{k_1^2 \cdot (k_1 - k_B)}{k_1 \cdot k_B + 1} = \frac{d\lambda}{dt} \cdot \frac{k_1 - k_B}{k_1 \cdot k_B + 1}, \quad I'_1: \frac{dk_1}{d\lambda} = \frac{(k_1 - k_B) \cdot (1 + k_1^2)}{k_1 \cdot k_B + 1}. \quad (37)$$

Аналогично получаем дифференциальное уравнение относительно Γ_2 :

$$\Gamma_2: \dot{k}_2 \cdot x + k_2 \cdot \frac{d\lambda}{dt} \cdot \frac{\psi \cdot k_2}{\sqrt{1+k_2^2}} = -\frac{d\lambda}{dt} \cdot \frac{\psi}{\sqrt{1+k_2^2}},$$

где: ψ определяется из (34), в которой $y = k_2 x$: $\psi(x) = \psi_0 \cdot x$,

$$\psi_0 \equiv \frac{1}{k_2 \cdot k_0 + 1} \left[\frac{\sqrt{1+k_5^2} \cdot \frac{k_0 - k_B}{k_B - k_5} \sqrt{\delta^2 \cdot (1+k_0 \cdot k_2)^2 + (\delta^2 - 1) \cdot (k_0 - k_2)^2}}{\delta \cdot (k_2 \cdot k_0 + 1)} \cdot (k_2^2 + 1) - \sqrt{1+k_2^2} \cdot (k_2 - k_0) \right],$$

или

$$I'_2: \frac{dk_2}{d\lambda} = -\psi_0 \cdot \sqrt{1+k_2^2}. \quad (38)$$

В частности, при $\delta = 1$ и $k_2 = -k_1$ формулы (37) и (38) упрощаются:

$$\Gamma_1: \frac{dk_1}{d\lambda} = k_1 \cdot (1 + k_1^2), \quad (37')$$

$$\Gamma_2: \frac{dk_2}{d\lambda} = -k_2 \cdot (1 + k_2^2), \quad \psi_0 = -k_2 \cdot \sqrt{1+k_2^2}, \quad (38')$$

т.е. получили известное дифференциальное уравнение задачи о растекании однородного пластического слоя, занимающей область формы клина.

И, наконец, третье дифференциальное уравнение (6') относительно Γ_{12} :

$$I'_{12}: \dot{k}_0 \cdot x - k_0 \cdot \frac{d\lambda}{dt} \cdot \frac{y - k_B \cdot x}{k_B - k_5} = -\frac{d\lambda}{dt} \cdot \frac{(y - k_B \cdot x) \cdot k_5}{k_B - k_5},$$

где использованы формулы (27) для скоростей, в которых $y = k_0 x$. Или,

$$\Gamma_{12} : \frac{dk_0}{d\lambda} = \frac{(k_0 - k_B) \cdot (k_0 - k_5)}{k_B - k_5}. \quad (39)$$

Система нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка (37), (38), (39) в общем случае решается численными методами. В результате получаем законы (36) изменения границ пластических областей в процессе растекания.

Заключение

1. Представлено в полном виде точное решение несимметричной задачи о растекании пластического слоя, составленного из двух клиньев, «в модели идеальной жидкости».
2. Показано, что границы этих клиньев остаются прямыми в процессе растекания. Выведены уравнения для эволюции их границ.
3. Установлено, что линия ветвления течения остается прямой в процессе растекания. Выведена формула для нахождения линии ветвления течения.

Литература

1. Ильюшин А.А. // ПММ. 1954. т. 18. № 3. с. 265-288.
2. Кийко И.А. Теория пластического течения // М.: МГУ, 1978. - 75 с.
3. Белов Н.А., Кадымов В.А. // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 1. с. 46-58.
4. Белов Н.А., Кадымов В.А. // Матер. межд. научн. конф. «Совр.пробл. матем., мех. и инф-ки». Тула: ТулГУ. 2012. с. 150-157.

Многокритериальное оптимальное проектирование дисков турбомашин

д.т.н. проф. Темис Ю.М., Якушев Д.А.
 Университет машиностроения
 tm@mami.ru

Аннотация. Рассмотрена концепция использования методики многокритериального оптимального проектирования при проектировании конструкции дисков роторов для турбомашин. Конструктивная оптимизация (оптимизация формы) применена для оптимального проектирования диска компрессора в зависимости от различных факторов нагружения и критериев оптимизации. Рассмотрены критерии массы, прочности, радиального перемещения. Результаты получены с помощью программного комплекса, состоящего из модуля анализа конструкции на основе метода конечных элементов и модуля оптимизации на основе алгоритма последовательного квадратичного программирования.

Ключевые слова: оптимальное проектирование, диск компрессора

В процессе создания современных газотурбинных двигателей (ГТД) широко используют системы и средства автоматизированного проектирования. Процесс создания новой конструкции является итерационным и многостадийным, и оптимальное проектирование как один из этапов автоматизации сокращает трудоемкость проектирования, позволяя найти наилучшую конструкцию, удовлетворяющую технологическим и прочностным ограничениям и обеспечивающую минимум заданной целевой функции [1-3].

Процесс оптимального проектирования делят на несколько последовательных стадий: формирование функции цели, критериев и ограничений; параметризация формы деталей и выбор параметров управления формой; создание расчетной модели; выбор метода оптимизации; решение задачи оптимизации. Функции цели, критерии и ограничения зависят от постановки задачи оптимизации и назначения детали или конструкции. В задачах проектирования конструкции ГТД наиболее часто используют критерии минимума массы, максимума жесткости, минимума зазоров между ротором и корпусом при удовлетворении ограничений по прочности и технологичности. В задаче оптимизации формы детали определение функция цели задает набор ограничений, накладываемых на параметры проектирования (размеры и