

$$\Gamma_{12} : \frac{dk_0}{d\lambda} = \frac{(k_0 - k_B) \cdot (k_0 - k_5)}{k_B - k_5}. \quad (39)$$

Система нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка (37), (38), (39) в общем случае решается численными методами. В результате получаем законы (36) изменения границ пластических областей в процессе растекания.

Заключение

1. Представлено в полном виде точное решение несимметричной задачи о растекании пластического слоя, составленного из двух клиньев, «в модели идеальной жидкости».
2. Показано, что границы этих клиньев остаются прямыми в процессе растекания. Выведены уравнения для эволюции их границ.
3. Установлено, что линия ветвления течения остается прямой в процессе растекания. Выведена формула для нахождения линии ветвления течения.

Литература

1. Ильюшин А.А. // ПММ. 1954. т. 18. № 3. с. 265-288.
2. Кийко И.А. Теория пластического течения // М.: МГУ, 1978. - 75 с.
3. Белов Н.А., Кадымов В.А. // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 1. с. 46-58.
4. Белов Н.А., Кадымов В.А. // Матер. межд. научн. конф. «Совр.пробл. матем., мех. и инф-ки». Тула: ТулГУ. 2012. с. 150-157.

Многокритериальное оптимальное проектирование дисков турбомашин

д.т.н. проф. Темис Ю.М., Якушев Д.А.
 Университет машиностроения
 tm@mami.ru

Аннотация. Рассмотрена концепция использования методики многокритериального оптимального проектирования при проектировании конструкции дисков роторов для турбомашин. Конструктивная оптимизация (оптимизация формы) применена для оптимального проектирования диска компрессора в зависимости от различных факторов нагружения и критериев оптимизации. Рассмотрены критерии массы, прочности, радиального перемещения. Результаты получены с помощью программного комплекса, состоящего из модуля анализа конструкции на основе метода конечных элементов и модуля оптимизации на основе алгоритма последовательного квадратичного программирования.

Ключевые слова: оптимальное проектирование, диск компрессора

В процессе создания современных газотурбинных двигателей (ГТД) широко используют системы и средства автоматизированного проектирования. Процесс создания новой конструкции является итерационным и многостадийным, и оптимальное проектирование как один из этапов автоматизации сокращает трудоемкость проектирования, позволяя найти наилучшую конструкцию, удовлетворяющую технологическим и прочностным ограничениям и обеспечивающую минимум заданной целевой функции [1-3].

Процесс оптимального проектирования делят на несколько последовательных стадий: формирование функции цели, критериев и ограничений; параметризация формы деталей и выбор параметров управления формой; создание расчетной модели; выбор метода оптимизации; решение задачи оптимизации. Функции цели, критерии и ограничения зависят от постановки задачи оптимизации и назначения детали или конструкции. В задачах проектирования конструкции ГТД наиболее часто используют критерии минимума массы, максимума жесткости, минимума зазоров между ротором и корпусом при удовлетворении ограничений по прочности и технологичности. В задаче оптимизации формы детали определение функция цели задает набор ограничений, накладываемых на параметры проектирования (размеры и

размещаемость детали, технологичность изготовления) и на параметры состояния конструкции: масса, напряжения, перемещения и др. Функциональное назначение детали или конструкции задает определенные функции цели, критериев и ограничений, влияние которых на результат оптимизации может быть представлено в виде зависимостей оптимальной массы от различных предельных ограничений.

Диски компрессора высокого давления (КВД) являются ответственными деталями ГТД, работающими при высоких температурах и центробежных нагрузках. Оптимальное проектирование дисков и роторов в большинстве случаев направлено на минимизацию их массы при выполнении прочностных и жесткостных ограничений. Помимо ограничений по прочности, в задачу оптимизации включают ограничения на область возможного изменения размеров дисков. Это обусловлено как технологическими ограничениями, порядком сборки ротора, так и необходимостью сужения области изменения допустимых параметров, чтобы обеспечить адекватность измененной формы и непрерывность работы программы оптимизации.

В работе в качестве примера с помощью средств оптимального проектирования проведено расчетное исследование оптимальных форм конструкции диска КВД в зависимости от различных факторов нагружения и критериев оптимизации. Решения задачи оптимизации формы дисков различными методами рассмотрены в ряде работ [4-7].

Поиск оптимальной конструкции диска проведен в рамках топологии, в которой задан исходный вариант конструкции диска. Оптимизация выполнена для одного из дисков ротора, с учетом его работы в роторе КВД. Это обусловлено тем, что большое количество параметров при оптимизации всего ротора увеличивает время расчета целевой функции и суммарное количество итераций, а также затрудняет интерпретацию результатов. Раздельная оптимизация может быть использована как начальный этап для последующей доводки конструкции в рамках полной параметризации или проведена несколько раз для каждого диска в роторе с учетом предварительных результатов оптимизации соседних дисков до стабилизации всех оптимальных форм дисков.

При проектировании на одном режиме нагружения математическая формулировка задачи имеет вид:

$$\begin{cases} mass \rightarrow \min \\ \sigma(\vec{r}) \leq [\sigma(\vec{r})] \text{ или } k \geq [k]; \\ \vec{u}(\vec{r}_j) \cdot \vec{e}_j \leq [u]_j, \quad j = 1 \dots M; \\ h_i^{\min} \leq h_i \leq h_i^{\max}, \quad i = 1 \dots N_h. \end{cases}$$

где: $mass$ – масса конструкции; N_h – количество параметров; h_i – параметры, в качестве которых приняты параметры, определяющие форму диска; $\sigma(\vec{r})$ – поле эквивалентных напряжений; $[\sigma(\vec{r})]$ – допускаемые напряжения; $[u]_j$ – допускаемые перемещения точек \vec{r}_j вдоль направлений \vec{e}_j ; k и $[k]$ – соответственно, расчетный и допускаемый коэффициенты запаса.

Принято рассматривать коэффициенты запаса по напряжениям k_σ и по несущей способности k_b . Зависимость допускаемых напряжений или местных коэффициентов запаса по напряжениям или по несущей способности от пространственной координаты может быть вызвана неравномерным полем температуры и зависящими от последней свойствами материала, а также может отражать определенную стратегию ресурса проектируемого изделия. Например, задание зоны повышенного уровня допускаемых напряжений (слабое звено) позволит минимизировать энергию обломков при разрушении диска. Ограничения, задающие область допустимых параметров, носят, как правило, технологический или конструктивный характер.

Оптимизация формы дисков проводится с учетом критерия минимальной массы конст-

рукции при обеспечении необходимых запасов прочности. Рассмотрены критерии запаса по разрушающим оборотам и критерии запаса по эквивалентному напряжению, осредненному по толщине диска. В дальнейшем для полученной оптимальной конструкции необходимо оценить циклическую долговечность при расчете по полетному циклу.

Для оценки необходимых запасов прочности принимают [4], что запас местной прочности на радиусе

$$k_y = y_{дл} / y_i$$

соответствует наиболее нагруженному режиму (как правило, это взлетный режим).

Для оценки длительной прочности материала использована обобщенная зависимость в виде:

$$y_{дл} = f[P(T_{абс}, t^*)],$$

где: $P(T_{абс}, t^*)$ – параметр Ларсена-Миллера, t^* – время в часах до разрушения, $T_{абс}$ – абсолютная температура, и тогда можно записать:

$$P = T_{абс} \cdot (20 + \lg t^*).$$

Для расчета длительной прочности напряжения осредняют по толщине диска на всех радиусах модели, вычисляют коэффициент запаса, после чего выбирают минимальный коэффициент. Минимально допустимое значение местного коэффициента запаса по напряжениям задано единым для всего диска.

Для определения несущей способности диска турбомашин применяются представления о разрушении диска по цилиндрическому или меридиональному сечениям. Считая, что поверхность разрушения диска образуется по цилиндрическому сечению на радиусе r^* , прием действующие на ней напряжения равными $\sigma_{дл}$, где $\sigma_{дл}(T, t)$ – предел длительной прочности материала, соответствующий времени наработки на режиме и температуре T точки диска на радиусе $r^* \leq r \leq r_b$, и, принимая, что в момент разрушения напряжения, действующие на обод диска, определяются по зависимости:

$$\sigma_{r_b разр} = \sigma_{r_b} n_{разр}^2 / n^2,$$

из условий равновесия получим коэффициент запаса по разрушающим оборотам:

$$k_b = \frac{n_{разр}}{n} = \sqrt{\frac{\int_{r^*}^b \sigma_{дл}(r) h(r) dr + \sigma_{дл}(r^*) h^* r^*}{\sigma_{r_b} b h_b + \rho \omega^2 J_*(r^*)}},$$

где: $J_*(r^*) = \int_{r^*}^b h r^2 dr$; h_b – ширина обода диска; b – радиус обода; σ_{r_b} – напряжение на радиусе $r = b$; ρ – плотность материала диска.

Коэффициент запаса по разрушающим оборотам рассчитывают на заданных радиусах диска.

В процессе постановки задачи оптимизации проведена параметризация формы дисков. Для построения диска использованы 6 оптимизационных параметров, позволяющих изменять толщину полотна и размеры ступицы диска. На рисунке 1а показана параметризованная модель сечения диска ротора КВД. Параметры $b1, b2$ определяют толщины полотен дисков. Параметры $B1, h1, h2$ определяют размеры ступиц, внутренние радиусы которых не изменяются. Параметр $R3$ определяет размеры перехода от полотна к ступице. Радиусы галтелей и остальные размеры дисков в ободной части не изменяются в процессе оптимизации.

На размеры дисков могут быть наложены ограничения для обеспечения технологичности в виде интервала допустимого изменения параметра. Например, толщина полотен дисков

может быть принята не менее 3 мм.

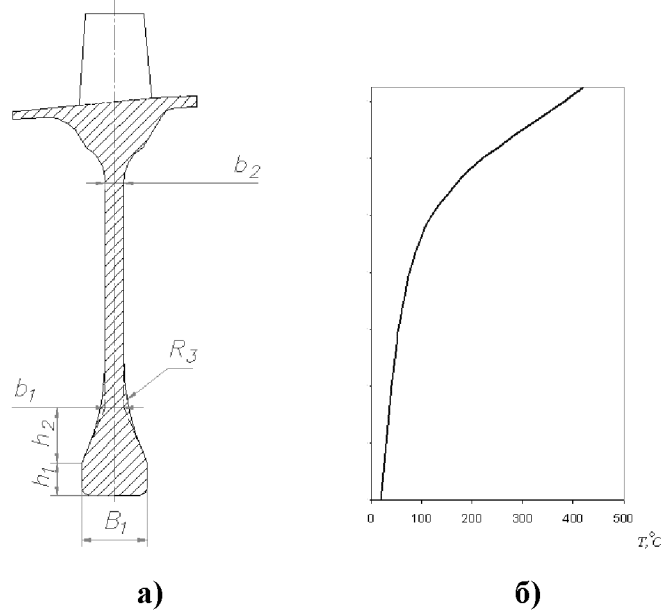


Рисунок 1 – Модель диска: а - параметризация сечения диска, б – эпюра распределения температур по радиусу

Задача оптимизации формы диска рассмотрена в осесимметричной постановке с использованием метода конечных элементов. Использован четырехузловой элемент первого порядка аппроксимации. Для моделирования нагрузок от лопатки использованы элементы, реализующие плоское напряженное состояние, с заданной толщиной. Распределение толщины на лопатке задано таким образом, чтобы учесть центробежные нагрузки от реальной трехмерной лопатки, масса и координаты центра масс которой заданы. Задание нагрузок происходит на основе режима нагружения, в который входят частота вращения ротора и распределение температуры по диску.

Двухмерная расчетная схема не отражает в должном объеме НДС конструкции в зоне соединения лопаток и диска, поэтому моделирование области замка носит условный характер, главным образом для задания нагрузок на диск. Для задач оптимизации, в которых требуется проведение сотен расчетов, упрощение модели позволит исследовать большее число вариантов конструкции с различной параметризацией и быстрее оценить поведение оптимального решения при изменении внешних параметров. Используемая упрощенная схема параметризации формы дисков позволяет быстро получить удовлетворительный вариант конструкции. При дальнейшем поиске оптимальной конструкции при проектировании окончательной конструкции ротора для большего снижения массы дисков в управляющие параметры необходимо включить дополнительные параметры проектирования: радиусы скруглений в дисках и замках, переменные по радиусу толщины полотен дисков, уточненные модели лопаток, хвостовиков и замков дисков. Также в процессе дальнейшего поиска оптимальной конструкции можно включить поиск оптимальной формы замкового соединения и обода диска.

Рассмотрена задача поиска оптимального диска при различных градиентах температур между ободом и ступицей и различных ограничениях на допускаемое радиальное перемещение обода диска с учетом критерия прочности. Анализ проведен на примере средних ступеней КВД из титанового сплава.

В процессе работы диски компрессора нагреваются, и между ободом и ступицей диска разность температур достигает на самом нагруженном взлетном режиме 600°C и более градусов. Разность температур в ступенях компрессора увеличивается последовательно к выходу из компрессора. Примерная эпюра распределения температур по радиусу диска представ-

лена на рисунке 1б. Это приводит к увеличению температурных напряжений в дисках, которые можно перераспределить, либо изменяя форму диска и, следовательно, изменяя массу, либо используя дополнительный прогрев ступиц дисков в перспективных ГТД для уменьшения разности температур.

Для эффективной работы КВД необходимо поддержание требуемого уровня радиальных зазоров при рабочих напряжениях, не превышающих допустимых значений, определяемых запасами по напряжениям и по разрушающей частоте вращения. Наибольшее изменение зазора происходит на взлетном режиме при максимальных частотах вращения и разности температур между ободом и ступицей для непрогретых дисков. Изменение радиального перемещения дисков позволит получить эффективную конструкцию КВД. Оптимальная форма детали и масса конструкции существенно зависят от ограничений, которые прикладываются к конструкции. Для решения задачи оптимизации с ограничениями применен метод последовательного квадратичного программирования [8].

На рисунке 2 приведена обобщенная зависимость относительной массы M/M_{\min} оптимальных дисков от допускаемого радиального перемещения U_r диска для различных градиентов температур ΔT между ободом и ступицей: 1 – градиент 200°C , 2 – градиент 300°C , 3 – градиент 400°C . Значение относительной массы M/M_{\min} диска рассчитывается относительно минимальной массы среди всех вариантов оптимальных дисков. Также на рисунке 2 приведены формы оптимальных дисков для различных условий нагружения и ограничений. При ослаблении ограничений на радиальные перемещения диск становится менее жестким и имеет меньшую массу. Показано, что уменьшение допускаемых радиальных перемещений на 20% приводит к увеличению массы на 50% для диска с градиентом температуры 400°C , а для диска с более нагретой ступицей и градиентом температуры 200°C приводит к увеличению массы на 70%. Различный перепад температур между ободом и ступицей позволяет оценить выигрыш по массе для различных дисков КВД при одинаковом радиальном перемещении. Для более жесткого ограничения по радиальным перемещениям разность масс оптимальных дисков изменяется нелинейно.

На рисунке 3 приведена зависимость относительной массы M/M_{\min} оптимальных дисков от градиентов температур ΔT между ободом и ступицей при допускаемом радиальном перемещении $U_r = 0.9$ мм.

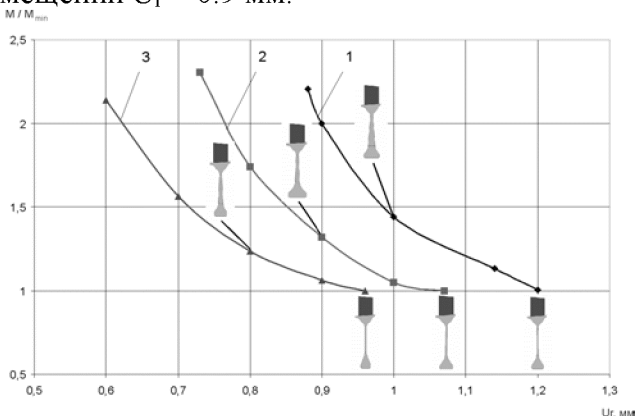


Рисунок 2 – Зависимость относительной массы оптимальных дисков от допускаемого радиального перемещения для некоторых градиентов температур между ободом и ступицей

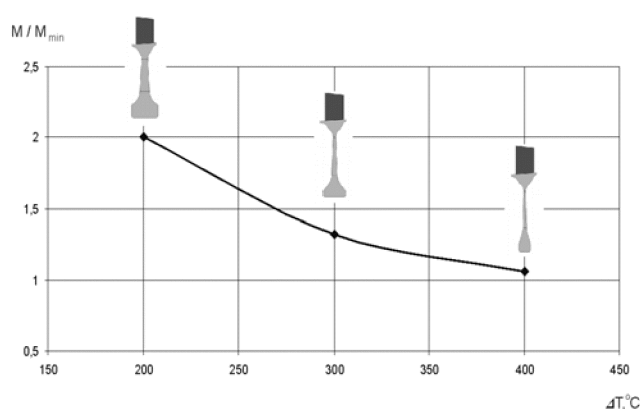


Рисунок 3 – Зависимость относительной массы оптимальных дисков от градиентов температур между ободом и ступицей при допускаемом радиальном перемещении $U_r = 0.9$ мм

На рисунке 4 приведена обобщенная зависимость относительного коэффициента запаса по напряжениям $k_\sigma/[k_\sigma]$ оптимальных дисков от допускаемого радиального перемещения U_r диска для различных градиентов температур между ободом и ступицей.

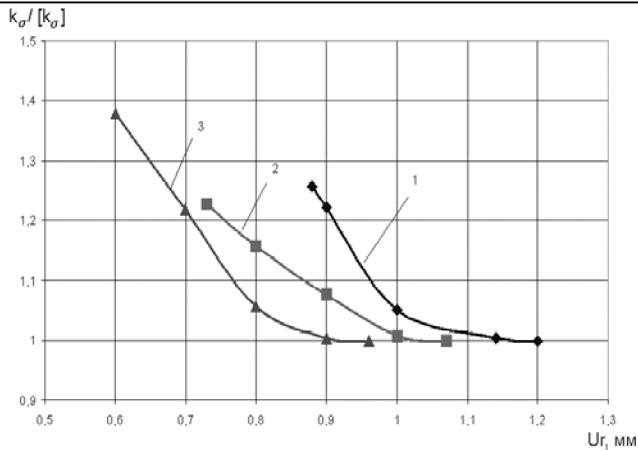


Рисунок 4 – Зависимость относительного коэффициента запаса по напряжениям от допускового радиального перемещения для некоторых градиентов температур между ободом и ступицей

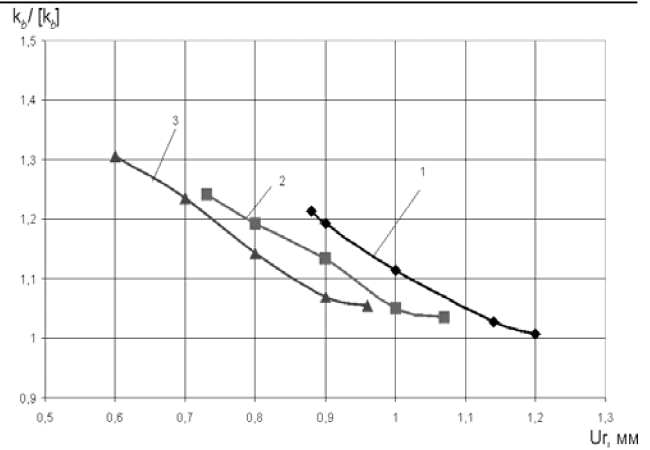


Рисунок 5 – Зависимость относительного коэффициента запаса по несущей способности от допускового радиального перемещения для некоторых градиентов температур между ободом и ступицей

На рисунке 5 приведена обобщенная зависимость относительного коэффициента запаса по несущей способности $k_b/[k_b]$ оптимальных дисков от допускового радиального перемещения U_r диска для различных градиентов температур между ободом и ступицей. Значение относительного коэффициента запаса по напряжениям $k_{\sigma}/[k_{\sigma}]$ и по несущей способности $k_b/[k_b]$ рассчитывается относительно заданного коэффициента запаса, который одинаков для всех дисков. Показано, что при увеличении допускового радиального перемещения и получаемых менее жестких дисков существенным становится ограничение на коэффициент запаса по напряжениям, что устанавливает предел дальнейшего снижения массы.

Поиск оптимального диска при различных градиентах температур между ободом и ступицей и различных ограничениях на допусковое радиальное перемещение обода диска с учетом критерия прочности показал, что результаты решения нелинейно зависят от теплового состояния диска и ограничений. Это подтверждает необходимость управлять тепловым состоянием не только дисков, но и всей конструкцией ГТД, разменивая температурные градиенты, жесткость и долговечность при минимизации массы всей конструкции.

Литература

1. Темис Ю.М., Якушев Д.А. Оптимальное проектирование конструктивных элементов. // Машиностроение. Энциклопедия / Ред. совет: К.В. Фролов и др. Самолеты и вертолеты. Т. IV-21. Авиационные двигатели. Кн. 3 / В.А. Скибин, В.И. Солонин, Ю.М. Темис и др.; под ред. В.А. Скибина, Ю.М. Темиса, В.А. Сосунова. М.: Машиностроение, 2010. с. 570-579.
2. Темис Ю.М., Якушев Д.А. Оптимальное проектирование конструктивных элементов ГТД. Техника воздушного флота, № 1(694). М.: ЦАГИ, 2009. с. 54–64.
3. Темис Ю.М., Якушев Д.А. Оптимизация конструкции деталей и узлов ГТД. // Вестник СГАУ. № 3 (27), 2011. Проблемы и перспективы развития двигателестроения. – Самара: СГАУ, 2011. – Ч. 1. с. 183-188.
4. Демьянушко И.В., Биргер И.А. Расчет на прочность вращающихся дисков. М.: Машиностроение, 1978. 247 с.
5. Демьянушко И.В., Королева Е.Ф. Оптимальное проектирование дисков турбомашин. «Известия АН СССР. Механика твердого тела», 1972, № 2. с. 176–180.
6. Братчик В.Я. Численное проектирование дисков ГТД методом динамического программирования. ТРУДЫ ЦИАМ № 996, Проблемы прочности и динамики в авиадвигателестроении: Сборник статей. Вып. 2, 1982. 192 с.
7. Темис Ю.М., Троицкий А.В. Проектирование оптимального диска турбины. Вестник

8. Schittkowski K. NLPQL: A Fortran Subroutine Solving Constrained Nonlinear Programming Problems. Annals of Operation Research, 1985.

Обобщенный метод дополнительных деформаций в задаче о кручении стержня

д.т.н. проф. Ю.М. Темис, А.А. Лазарев, О.Л. Маланова
 Университет машиностроения, МГТУ им. Н.Э. Баумана
 tm@mami.ru

Аннотация. На примере решения задачи о кручении стержня в упругопластической постановке методом граничных элементов показана эффективность обобщенного метода дополнительных деформаций. Проведено исследование скорости сходимости в зависимости от приведенного модуля сдвига и угла закрутки. Продемонстрировано существование оптимального приведенного модуля сдвига, при котором скорость сходимости метода максимальна.

Ключевые слова: пластичность, обобщенный метод дополнительных деформаций, метод граничных элементов.

При решении задач теории пластичности применяют итерационные методы: переменных параметров упругости, дополнительных деформаций, упругих решений, метод Ньютона и другие [1, 2, 3, 4]. Линеаризация на основе метода переменных параметров упругости и метода Ньютона приводит к необходимости изменения оператора задачи (пересчёта матрицы жёсткости при решении методом конечных элементов). В отличие от них методы дополнительных деформаций и упругих решений не требуют изменения оператора задачи, и приводят только к пересчёту объёмных сил на каждой итерации. Для решения нелинейных задач методом конечных элементов традиционно используют метод переменных параметров упругости и метод Ньютона (или их модификации), так как они обеспечивают более высокий порядок сходимости по сравнению с остальными методами. Однако в задачах, которые сводятся к граничным интегральным уравнениям, непосредственно применить методы, изменяющие оператор, не удаётся (в общем случае аналитически построить соответствующее фундаментальное решение затруднительно, либо невозможно), поэтому используют методы, переводящие нелинейность в объёмные силы. Основной проблемой является низкая скорость сходимости таких методов.

На примере задачи кручения стержня рассмотрим основанный на изменении оператора задачи [1] способ, позволяющий увеличить скорость сходимости. Как известно [5], задача о кручении стержня постоянного сечения приводит к интегрированию уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} &= -2G\Theta \end{aligned} \quad (1)$$

где: τ_{xy} , τ_{yz} - сдвиговые напряжения в сечении стержня, Θ - угол поворота на единицу длины, G - модуль сдвига.

Первое уравнение в (1) – уравнение равновесия, второе – следствие уравнения совместности деформаций, которое получено из условия, что каждое сечение стержня поворачивается вокруг оси стержня как жёсткое целое, а перемещение w точек сечения в направлении, перпендикулярном оси стержня, не зависит от осевой координаты z :

$$w = w(x, y). \quad (2)$$

Будем искать решение в виде: