

8. Schittkowski K. NLPQL: A Fortran Subroutine Solving Constrained Nonlinear Programming Problems. Annals of Operation Research, 1985.

Обобщенный метод дополнительных деформаций в задаче о кручении стержня

д.т.н. проф. Ю.М. Темис, А.А. Лазарев, О.Л. Маланова
Университет машиностроения, МГТУ им. Н.Э. Баумана
tm@mami.ru

Аннотация. На примере решения задачи о кручении стержня в упругопластической постановке методом граничных элементов показана эффективность обобщенного метода дополнительных деформаций. Проведено исследование скорости сходимости в зависимости от приведенного модуля сдвига и угла закрутки. Продemonстрировано существование оптимального приведенного модуля сдвига, при котором скорость сходимости метода максимальна.

Ключевые слова: пластичность, обобщенный метод дополнительных деформаций, метод граничных элементов.

При решении задач теории пластичности применяют итерационные методы: переменных параметров упругости, дополнительных деформаций, упругих решений, метод Ньютона и другие [1, 2, 3, 4]. Линеаризация на основе метода переменных параметров упругости и метода Ньютона приводит к необходимости изменения оператора задачи (пересчёта матрицы жёсткости при решении методом конечных элементов). В отличие от них методы дополнительных деформаций и упругих решений не требуют изменения оператора задачи, и приводят только к пересчёту объёмных сил на каждой итерации. Для решения нелинейных задач методом конечных элементов традиционно используют метод переменных параметров упругости и метод Ньютона (или их модификации), так как они обеспечивают более высокий порядок сходимости по сравнению с остальными методами. Однако в задачах, которые сводятся к граничным интегральным уравнениям, непосредственно применить методы, изменяющие оператор, не удаётся (в общем случае аналитически построить соответствующее фундаментальное решение затруднительно, либо невозможно), поэтому используют методы, переводящие нелинейность в объёмные силы. Основной проблемой является низкая скорость сходимости таких методов.

На примере задачи кручения стержня рассмотрим основанный на изменении оператора задачи [1] способ, позволяющий увеличить скорость сходимости. Как известно [5], задача о кручении стержня постоянного сечения приводит к интегрированию уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} &= -2G\Theta\end{aligned}\tag{1}$$

где: τ_{xy} , τ_{yz} - сдвиговые напряжения в сечении стержня, Θ - угол поворота на единицу длины, G - модуль сдвига.

Первое уравнение в (1) – уравнение равновесия, второе – следствие уравнения совместности деформаций, которое получено из условия, что каждое сечение стержня поворачивается вокруг оси стержня как жёсткое целое, а перемещение w точек сечения в направлении, перпендикулярном оси стержня, не зависит от осевой координаты z :

$$w = w(x, y).\tag{2}$$

Будем искать решение в виде:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (3)$$

где: $\Phi(x, y)$ - неизвестная функция, называемая функцией напряжения.

Подстановка (3) в первое уравнение (1) даёт тождественный ноль, а во второе – приводит к уравнению Пуассона:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2G\Theta. \quad (4)$$

На границе односвязной области функция напряжения должна удовлетворять однородному граничному условию:

$$\Phi(x, y) = 0. \quad (5)$$

Согласно деформационной теории пластичности, зависимости между деформациями и напряжениями имеют вид:

$$\tau_{xz} = \frac{G}{\psi} \cdot \gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = \frac{G}{\psi} \cdot \gamma_{yz}, \quad (6)$$

где: ψ - безразмерный коэффициент, называемый параметром пластичности [2],

$$\psi = 3 \cdot G \cdot \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}. \quad (7)$$

Зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций

$$\sigma_i = f(\varepsilon_i) \quad (8)$$

называется обобщенной кривой деформирования, и определяется экспериментально.

Запишем выражения (6) в виде

$$\tau = G \cdot \gamma - G \cdot \left(1 - \frac{1}{\psi}\right) \cdot \gamma, \quad (9)$$

где: слагаемое $\tau^e = G \cdot \gamma$ представляет собой напряжение в чисто упругом теле при заданных полных деформациях γ , а $\Delta\tau = -G \cdot (1 - 1/\psi) \cdot \gamma$ - напряжение сжатия, которое необходимо приложить в каждой точке такого тела, чтобы получить напряжение, соответствующее упругопластическому состоянию.

Если известны напряжения τ^e , можно используя кривую деформирования (8) рассчитать (7) параметр пластичности ψ , вычислить $\Delta\tau$, и найти дополнительные (пластические) деформации γ^p , которые необходимо приложить в упругом теле, чтобы получить напряжения, соответствующие упругопластическому деформированию (рисунок 1а):

$$\gamma^p = \frac{\Delta\tau}{G} = \left(1 - \frac{1}{\psi}\right) \cdot \gamma = \left(1 - \frac{1}{\psi}\right) \cdot \frac{\tau^e}{G}. \quad (10)$$

Для решения задачи упругопластического деформирования стержня методом дополнительных деформаций, модифицируем второе уравнение (1) с учётом начальных деформаций γ^0 :

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = -2G\Theta - G \cdot \left(\frac{\partial \gamma_{xz}^0}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}^0}{\partial x} \right). \quad (11)$$

Итерационный процесс расчёта начинается с нулевых дополнительных деформаций $\gamma^{0,k}$, где $k = 1$ - номер итерации.

Решаем упругую задачу, по расчетным напряжениям $\tau^{e,k}$ находим по зависимости (10) дополнительные пластические деформации для следующего шага:

$$\gamma^{0,k+1} = \left(1 - \frac{1}{\psi^k}\right) \cdot \left(\frac{\tau^{e,k}}{G} + \gamma^{0,k}\right). \quad (12)$$

В качестве критерия остановки итераций примем:

$$\frac{\int_{\Omega} |\Phi^{k+1} - \Phi^k| dS}{\int_{\Omega} |\Phi^k| dS} < \delta, \quad (13)$$

где: δ задаёт точность вычислений, а интегрирование ведётся по поперечному сечению стержня Ω .

В работе [1] предложено на этапе решения упругой задачи вместо реального модуля сдвига G использовать фиктивный модуль:

$$G_0 = \frac{G}{\psi_0}, \quad (14)$$

где: ψ_0 - некоторый параметр. Как доказано в [1], параметр ψ_0 должен лежать в интервале $1 \leq \psi_0 < 2$, и существует значение ψ_0^{opt} , при котором достигается максимальная для данного метода скорость сходимости.

Расчётные формулы принимают вид:

$$\frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial y^2} = -2G_0 \Theta - G_0 \cdot \left(\frac{\partial \gamma_{xz}^{0,k}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}^{0,k}}{\partial x} \right), \quad \gamma^{0,k+1} = \left(1 - \frac{\psi_0}{\psi^k}\right) \cdot \left(\frac{\tau^{e,k}}{G_0} + \gamma^{0,k}\right). \quad (15)$$

На рисунке 1б показана итерация метода дополнительных деформаций с использованием фиктивного модуля G_0 .

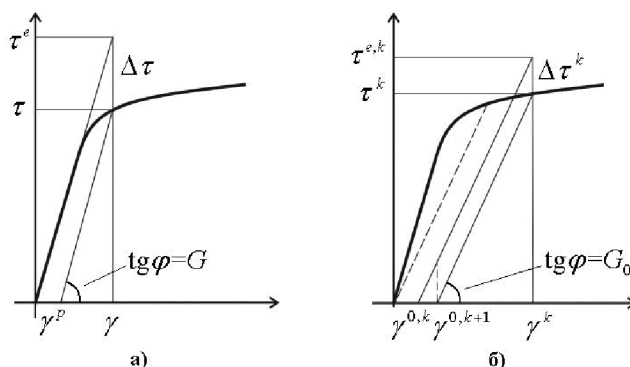


Рисунок 1 – а) расчет по методу дополнительных деформаций; б) расчет по методу обобщенных дополнительных деформаций

Для решения задачи (15), (5) используем метод граничных элементов [6]. Соответствующее граничное интегральное уравнение имеет вид

$$\zeta_i \cdot \Phi^k(x_i, y_i) + \oint_{\Gamma} \Phi^k \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} d\Gamma = \oint_{\Gamma} \Phi^* \frac{\partial \Phi^k}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Omega} \Phi^* f_{\Omega}^k d\Omega, \quad (16)$$

где: Φ^* - фундаментальное решение уравнения Лапласа, точка (x_i, y_i) лежит на границе Γ области сечения стержня Ω , а f_{Ω}^k обозначает правую часть исходного уравнения (15).

Для дискретизации границы применим элементы с постоянными значениями неизвестных на них, а для интегрирования по области используем сетку треугольников. Далее используем стандартные процедуры метода граничных элементов, подробно описанные в работах [6, 7].

Рассмотрим задачу кручения стержня, поперечное сечение которого представлено на

рисунке 2а, где: $d = 10$ мм, $b/d = 4$, $c = 22,5$ мм.

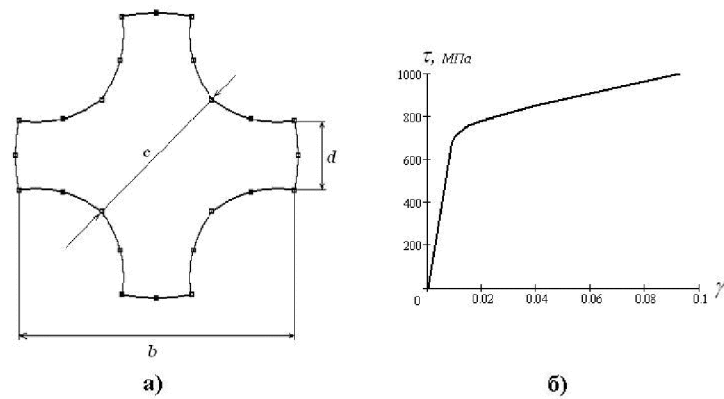


Рисунок 2 – а) геометрия области; б) диаграмма деформирования материала

Диаграмма деформирования для материала приведена на рис. 2б), предел текучести материала $\tau_T = 660$ МПа, предел прочности - $\tau_B = 1000$ МПа, модуль сдвига - $G = 77 \cdot 10^9$ Па. Расчет ведётся до достижения точности $\delta = 10^{-3}$.

При небольших значениях угла закручивания θ стержень деформируется упруго. Угол, при котором в стержне возникают пластические деформации, обозначим θ_T . Для области, изображенной на рисунке 2а, $\theta_T = 0,0005478$. Результаты расчета МГЭ напряженного состояния в рассматриваемом сечении в момент возникновения в нем пластических деформаций отображены на рисунках 3 и 4.

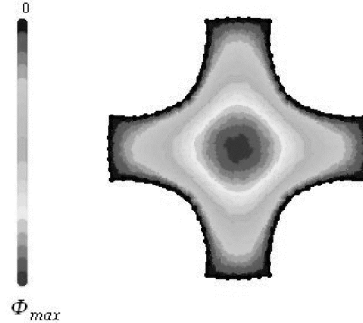


Рисунок 3 – Распределение значений функции напряжений $\Phi_{max} = 90,096$

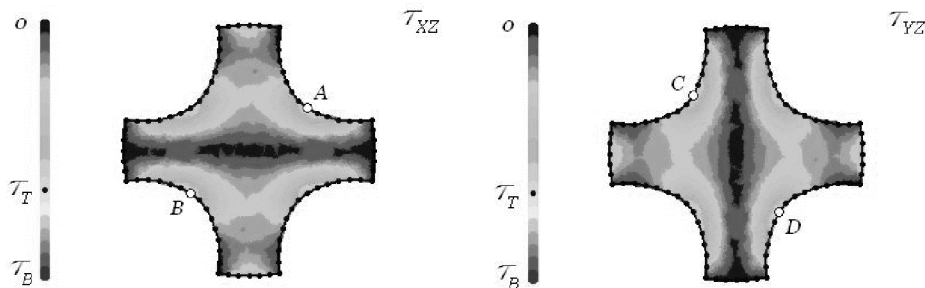


Рисунок 4 – Распределение абсолютных значений напряжений τ_{xz} и τ_{yz} в упругой

области $\theta = \theta_T$, $\tau_{xz}|_A = \tau_{yz}|_C = -\tau_T$, $\tau_{xz}|_B = \tau_{yz}|_D = \tau_T$

С момента появления в теле пластических деформаций значения напряжений продолжают увеличиваться, пока не достигнут величины предела прочности материала τ_B . Угол закручивания θ_B , при котором напряжения в теле достигают предела прочности, назовем предельным углом закручивания. Для рассматриваемой области $\theta_B = 0,0041$. Результаты

расчета МГЭ при закрутке на предельный угол отображены на рисунке 5.

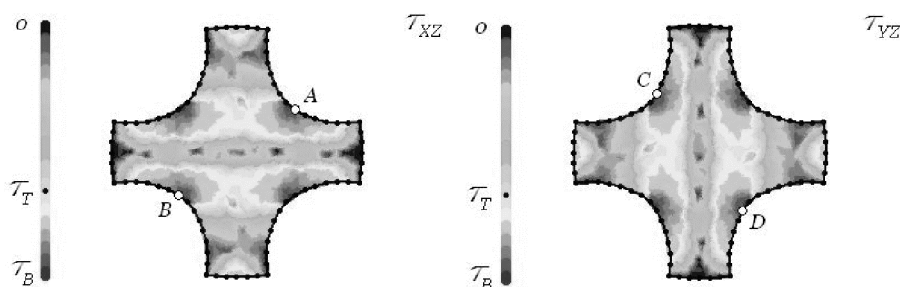


Рисунок 5 – Распределение абсолютных значений напряжений τ_{xz} и τ_{yz} в упругопластической области, в предельный момент напряженно-деформированного состояния $\theta = \theta_B$, $\tau_{xz}|_A = \tau_{yz}|_C = -\tau_B$, $\tau_{xz}|_B = \tau_{yz}|_D = \tau_B$.

Число итераций в зависимости от параметра пластичности ψ_0 для различных значений угла θ , лежащих в диапазоне от θ_T до θ_P , приведено в таблице 1 (угол θ_T соответствует моменту возникновения в сечении стержня пластических деформаций, угол θ_P - моменту, когда пластические зоны, возникающие на противоположных сторонах сечения, сливаются между собой). В таблице 1 для каждого угла закрутки отмечены значения параметра ψ_0^{opt} , при которых достигается минимальное число итераций K_{min} .

Таблица 1

Число итераций в зависимости от параметра пластичности и угла закрутки

$\theta \backslash \psi_0$	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,85
0,0006	8	6	5	4	3	3	4	6	10	18
0,0008	24	23	22	21	20	19	18	18	18	23
0,001	33	31	30	28	27	26	26	24	24	28
0,0012	32	30	30	28	27	26	25	25	23	29
0,0014	31	30	29	28	27	27	27	26	26	32
0,001628	36	34	33	31	30	29	28	27	26	31

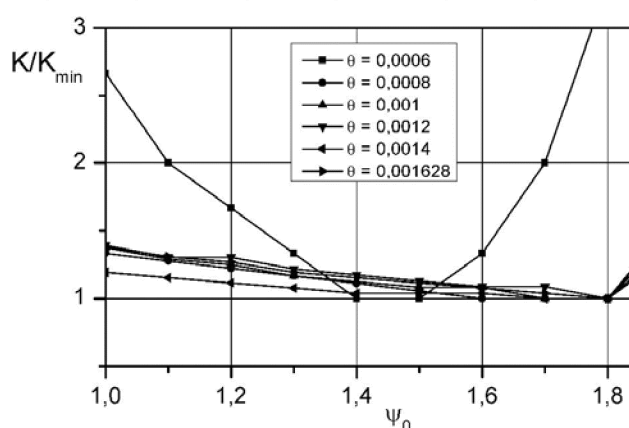


Рисунок 6 – Зависимость среднего числа итераций от параметра пластичности

На рисунке 6 приведены графики зависимости отношения числа итераций K к минимальному числу итераций K_{min} от параметра ψ_0 . Для малых углов закрутки и, как следствие, небольших пластических деформаций ($\psi < 2$), использование оптимального $\psi_0 = 1,4..1,6$ может давать более чем двукратное снижение числа итераций. При больших углах закрутки

использование оптимального $\psi_0 = 1, 6..1, 8$ уменьшает количество итераций на 20-40%.

Авторы выражают благодарность инженеру А. Румянцеву за проведенные расчеты. Работа выполнена при частичной поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект № 12-01-00109) и гранта поддержки Фундаментальных Научных Школ Российской Федерации СС-4140.2008.8.

Литература

1. Temis J.M. Iterative method convergence for solving problems of deformation theory of plasticity. Computational methods in engineering advances & applications. - World scientific. Singapore. vol. 2, 1992, p. 1276, 1281.
2. Биргер И.А. Некоторые общие методы решения задач теории пластичности. – ПММ. т. 15, вып. 6, с. 765-770, 1951.
3. Ильюшин А.А. Пластичность. – ГИТТЛ, 1948.
4. Темис Ю.М. Применение метода Ньютона-Канторовича при решении задач деформационной теории пластичности. – Труды ЦИАМ № 1256, 1988.
5. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Соппротивление материалов. - Наука, Москва, 1986.
6. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – М.:Мир, 1987.
7. Temis Y.M., Karaban V.V. Boundary element technique in torsion problems of beams with multiply connected cross-sections. – J. KSIAM. vol.5, № 2, p. 39-51, 2001.

Аппроксимации функционалов пластичности теории упругопластических процессов при неизотермическом нагружении в условиях ползучести

д.ф.-м.н. проф. Бондарь В.С., к.ф.-м.н. доц. Даншин В.В., Костин А.И.

Университет машиностроения
8(495)2230523 доб. 1318; tm@mami.ru

Аннотация. На основе уравнений теории неупругости, относящейся к классу теорий течения при комбинированном упрочнении, получен прикладной вариант теории упругопластических процессов и аппроксимации функционалов пластичности при неизотермическом нагружении в условиях ползучести.

Ключевые слова: неупругость, неизотермическое нагружение, ползучесть, функционалы пластичности

Введение

Рассматривается достаточно простой вариант теории неупругости [1, 2], относящейся к классу теорий течения при комбинированном упрочнении. Данный вариант теории неупругости прошел обширную верификацию [1, 3] на широком спектре конструкционных сталей и сплавов и программ экспериментальных исследований. Сравнение результатов расчетов и экспериментов показало надежное соответствие теории и эксперимента – отличие по компонентам напряженно-деформированного состояния не превысило $10 \div 20\%$, а по характеристикам разрушения $20 \div 30\%$.

Вариант теории упругопластических процессов

В векторном представлении А.А. Ильюшина [4, 5] уравнения теории неупругости будут иметь вид:

$$\dot{\bar{\mathcal{E}}} = \dot{\bar{\mathcal{E}}}^e + \dot{\bar{\mathcal{E}}}^p, \quad (1)$$

$$\dot{\bar{\mathcal{E}}}^e = \dot{\bar{S}} / 2G, \quad (2)$$

$$\dot{\bar{\mathcal{E}}}^p = \frac{\bar{S} - \bar{A}}{C} \dot{s}^p, \quad (3)$$

$$\dot{\bar{A}} = g_B \dot{\bar{\mathcal{E}}}^p + (g_{\mathcal{E}} \bar{\mathcal{E}}^p + g_A \bar{A}) \dot{s}^p + (g_{\mathcal{E}}^T \bar{\mathcal{E}}^p + g_A^T \bar{A}) \dot{I} - (g_{\mathcal{E}}^R \bar{\mathcal{E}}^p + g_A^R \bar{A}), \quad (4)$$