использование оптимального $\psi_0 = 1,6..1,8$ уменьшает количество итераций на 20-40%.

Авторы выражают благодарность инженеру А. Румянцеву за проведенные расчеты. Работа выполнена при частичной поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект № 12-01-00109) и гранта поддержки Фундаментальных Научных Школ Российской Федерации СС-4140.2008.8.

Литература

1. Temis J.M. Iterative method convergence for solving problems of deformation theory of plasticity. Computational methods in engineering advances & applications. - World scientific. Singapore. vol. 2, 1992, p. 1276, 1281.
2. Биргер И.А. Некоторые общие методы решения задач теории пластичности. – ПММ. т. 15, вып. 6, с. 765-770, 1951.
3. Ильюшин А.А. Пластичность. – ГИТТЛ, 1948.
4. Темис Ю.М. Применение метода Ньютона-Канторовича при решении задач деформационной теории пластичности. – Труды ЦИАМ № 1256, 1988.
5. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. - Наука, Москва, 1986.
6. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – М.:Мир, 1987.
7. Temis Y.M., Karaban V.V. Boundary element technique in torsion problems of beams with multiply connected cross-sections. – J. KSIAM. vol.5, № 2, p. 39-51, 2001.

Аппроксимации функционалов пластичности теории упругопластических процессов при неизотермическом нагружении в условиях ползучести

д.ф.-м.н. проф. Бондарь В.С., к.ф.-м.н. доц. Даншин В.В., Костин А.И.
Университет машиностроения
8(495)2230523 доб. 1318; tm@mami.ru

Аннотация. На основе уравнений теории неупругости, относящейся к классу теорий течения при комбинированном упрочнении, получен прикладной вариант теории упругопластических процессов и аппроксимации функционалов пластичности при неизотермическом нагружении в условиях ползучести.

Ключевые слова: *неупругость, неизотермическое нагружение, ползучесть, функционалы пластичности*

Введение

Рассматривается достаточно простой вариант теории неупругости [1, 2], относящейся к классу теорий течения при комбинированном упрочнении. Данный вариант теории неупругости прошел обширную верификацию [1, 3] на широком спектре конструкционных сталей и сплавов и программ экспериментальных исследований. Сравнение результатов расчетов и экспериментов показало надежное соответствие теории и эксперимента – отличие по компонентам напряженно-деформированного состояния не превысило $10 \div 20\%$, а по характеристикам разрушения $20 \div 30\%$.

Вариант теории упругопластических процессов

В векторном представлении А.А. Ильюшина [4, 5] уравнения теории неупругости будут иметь вид:

$$\dot{\bar{Э}} = \dot{\bar{Э}}^e + \dot{\bar{Э}}^p, \quad (1)$$

$$\dot{\bar{Э}}^e = \dot{\bar{S}} / 2G, \quad (2)$$

$$\dot{\bar{Э}}^p = \frac{\bar{S} - \bar{A}}{C} \dot{s}^p, \quad (3)$$

$$\dot{\bar{A}} = g_B \dot{\bar{Э}}^p + \left(g_Э \bar{Э}^p + g_A \bar{A}\right)\dot{s}^p + \left(g_Э^T \bar{Э}^p + g_A^T \bar{A}\right)\dot{T} - \left(g_Э^R \bar{Э}^p + g_A^R \bar{A}\right), \quad (4)$$

$$\dot{C} = q_Э \dot{s}^p + q_T \dot{T} - q_R \ , \tag{5}$$

$$\dot{\omega} = \alpha\, \omega^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \frac{(\overline{A} \cdot \dot{\overline{Э}}^p)}{W} - g_\omega \omega \ , \tag{6}$$

$$\dot{W} = g_W^T \dot{T} - g_W W, \tag{7}$$

где: $\dot{\overline{Э}},\ \dot{\overline{Э}}^e, \dot{\overline{Э}}^p$ – векторы скоростей деформаций, упругих и неупругих деформаций;

$\dot{\overline{S}}, \dot{\overline{A}}$ – векторы скоростей напряжений и добавочных напряжений (микронапряжений [6]);

s^p – длина дуги траектории неупругой деформации;

C – размер (радиус) поверхности нагружения, характеризующий изотропное упрочнение;

$q_Э, q_T, q_R$ – параметры изотропного упрочнения, неизотермического перехода и отжига;

$g_B, g_Э, g_A, g_Э^T,\ g_A^T,\ g_Э^R, g_A^R$ – параметры анизотропного упрочнения, неизотермического перехода и рекристаллизации;

ω – мера повреждения; α – параметр нелинейности процесса накопления повреждений;

g_ω – параметр залечивания повреждений;

W – энергия разрушения;

g_W^T, g_W – параметры неизотермического перехода и охрупчивания.

При развитых неупругих деформациях в условиях неупругого деформирования можно принять, что:

$$\overline{Э} = \overline{Э}^p, \quad s = s^p \ . \tag{8}$$

Тогда уравнения (1) – (7) примут вид:

$$\dot{\overline{Э}} = \frac{\overline{S} - \overline{A}}{C} \dot{s}, \tag{9}$$

$$\dot{\overline{A}} = g_B \dot{\overline{Э}} + \left(g_Э \overline{Э} + g_A \overline{A}\right)\dot{s} + \left(g_Э^T \overline{Э} + g_A^T \overline{A}\right)\dot{T} - \left(g_Э^R \overline{Э} + g_A^R \overline{A}\right), \tag{10}$$

$$\dot{C} = q_Э \dot{s} + q_T \dot{T} - q_R \ , \tag{11}$$

$$\dot{\omega} = \alpha\, \omega^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \frac{(\overline{A} \cdot \dot{\overline{Э}})}{W} - g_\omega \omega \ , \tag{12}$$

$$\dot{W} = g_W^T \dot{T} - g_W W \ . \tag{13}$$

Решая уравнение (9) относительно $\overline{A}$ и дифференцируя его по времени, совместно с уравнениями (10) и (11), можно получить следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \dot{\overline{S}} = &\left(\dot{C}/\dot{s} + g_B - g_A C - g_A^T C \dot{T}/\dot{s} + g_A^R C/\dot{s}\right)\dot{\overline{Э}} + \left(g_A \dot{s} + g_A^T \dot{T} - g_A^R\right)\overline{S} + \\ &+ \left(g_Э \dot{s} + g_Э^T \dot{T} - g_Э^R\right)\overline{Э} + C \frac{d^2 \overline{Э}}{ds^2} \dot{s}. \end{aligned} \tag{14}$$

Используя конкретные значения параметров неупругости [1, 3], можно определить, что последнее слагаемое в уравнении (14) как минимум на порядок меньше остальных членов и значит этим членом в уравнении (14) можно пренебречь. Тогда уравнение (14) примет вид:

$$\dot{\overline{S}} = N \dot{\overline{Э}} + \left(N_S \overline{S} + N_Э \overline{Э}\right) \dot{s} \ , \tag{15}$$

где: $N = q_Э + g_B - g_A C + \left(q_T - g_A^T C\right)\dot{T}/\dot{s} - \left(q^R - g_A^R C\right)/\dot{s}$,

$N_S = g_A + g_A^T \dot{T}/\dot{s} - g_A^R/\dot{s}$,

$N_Э = g_Э + g_Э^T \dot{T}/\dot{s} - g_Э^R/\dot{s}$.

Уравнение (15) относится к так называемой [17] «нелокальной форме» теории упругопластических процессов.

Для описания произвольных процессов деформирования необходимо ввести условия упругого и пластического состояний. Тогда с учетом таких условий [8] уравнения состояния, уравнения для внутренних переменных и кинетическое уравнение накопления повреждений окончательно примут следующий вид:

при

$$\left|\overline{S}-\overline{A}\right| < C \bigcup \left(\overline{S}-\overline{A}\right)\cdot \dot{\overline{Э}} \leq 0 \tag{16}$$

имеет место состояние упругости и:

$$\dot{\overline{S}} = 2G\dot{\overline{Э}}, \tag{17}$$

$$\tag{18}$$

$$\dot{C} = q_T \dot{T} - q_R \,, \tag{19}$$

$$\dot{W} = g_W^T \dot{T} - g_W W \,; \tag{20}$$

при

$$\left|\overline{S}-\overline{A}\right| = C \bigcap \left(\overline{S}-\overline{A}\right)\cdot \dot{\overline{Э}} > 0 \tag{21}$$

имеет место состояние пластичности и:

$$\dot{\overline{S}} = N\dot{\overline{Э}} + \left(N_S\overline{Э} + N_A\overline{A}\right)\dot{s}\,, \tag{22}$$

$$\dot{\overline{A}} = g_B\dot{\overline{Э}} + \left(g_Э\overline{Э} + g_A\overline{A}\right)\dot{s} + \left(g_Э^T\overline{Э} + g_A^T\overline{A}\right)\dot{T} - \left(g_Э^R\overline{Э} + g_A^R\overline{A}\right), \tag{23}$$

$$\dot{C} = q_Э\dot{s} + q_T\dot{T} - q_R \,, \tag{24}$$

$$\dot{W} = g_W^T\dot{T} - g_W W \,, \tag{25}$$

$$\dot{\omega} = \alpha\,\omega^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\,\frac{1}{W}\left(\overline{A}\cdot\dot{\overline{Э}}\right) - g_\omega\omega \,, \tag{26}$$

$$N = q_Э + g_B - g_A C + \left(q_T - g_A^T C\right)\dot{T}/\dot{s} - \left(q^R - g_A^R C\right)/\dot{s}\,, \tag{27}$$

$$N_S = g_A + g_A^T\dot{T}/\dot{s} - g_A^R/\dot{s}, \tag{28}$$

$$N_Э = g_Э + g_Э^T\dot{T}/\dot{s} - g_Э^R/\dot{s}\,. \tag{29}$$

Материальные функции

Определяющие функции, входящие в систему уравнений (16) – (29), выражаются [1, 2] через материальные функции, подлежащие экспериментальному определению, следующим образом:

$$g_B = E_A + \beta_A\cdot\sigma_A,\quad g_Э = \beta_A\cdot E_A,\quad g_A = -\beta_A,\quad g_Э^T = \frac{dE_A}{dT} - \frac{E_A}{\sigma_A}\cdot\frac{d\sigma_A}{dT},$$

$$g_A^T = \frac{1}{\sigma_A}\cdot\frac{d\sigma_A}{dT},\quad g_Э^R = g_Э\cdot P_A,\quad g_A^R = \left(g_B + g_A\left|\overline{A}\right|\right)P_A/\left|\overline{A}\right|,\quad q_Э = \frac{\partial C_B}{\partial s},$$

$$q_T = \frac{C}{C_B}\cdot\frac{\partial C_B}{\partial T},\quad q_R = \frac{\partial C_B}{\partial s}\cdot P_C,\quad g_\omega = \lambda,\quad g_W = \rho,\quad g_W^T = \frac{W}{W_B}\cdot\frac{dW_B}{dT},$$

$$\alpha = \left(\left(\sigma_A + E_A\left|\overline{Э}\right|\right)/\left|\overline{A}\right|\right)^{n_\alpha},\quad P_C\left(T,C,\omega\right) = \exp\left(b_C\right)\,\left|C - C_{B0}\right|^{n_C}\cdot\left(1-\omega\right)^{-m_\omega},$$

$$P_A\left(T,\ \left|\overline{A}\right|,\ \omega\right) = \exp\left(b_A\right)\,\left|\overline{A}\right|^{n_a}\cdot\left(1-\omega\right)^{-m_\omega},$$

$$\lambda\left(T,\sigma_{ii}\right) = \begin{cases} 0,\ \text{если}\quad \sigma_{ii}\geq 0\,, \\ \exp\left(b_\lambda\right)\,\left|\sigma_{ii}\right|^{\,n_\lambda},\ \text{если}\quad \sigma_{ii} < 0\,, \end{cases}$$

$$\rho\left(T,\left|\overline{S}\right|\right) = \exp\left(b_\rho\right)\,\left|\overline{S}\right|^{\,n_\rho}\,.$$

Окончательно предлагаемый прикладной вариант теории упругопластических процессов замыкают следующие материальные функции, подлежащие экспериментальному определению:

$G(T),\, K(T),\, \alpha_T(T)$ – упругие параметры;

$E_A(T),\, \sigma_A(T),\, \beta_A(T)$ – параметры анизотропного упрочнения;

$C_B(T,s)$ – функция изотропного упрочнения;

$W_B(T)$ – энергия разрушения;

$n_\alpha(T)$ – параметр нелинейности процесса накопления повреждения;

$b_C(T),\, b_A(T),\, n_C(T),\, n_A(T),\, m_\omega(T)$ – параметры изотропной и анизотропной ползучести;

$b_\lambda(T),\, b_\rho(T),\, n_\lambda(T),\, n_\rho(T)$ – параметры залечивания и охрупчивания.

Базовый эксперимент

Для определения материальных функций необходим следующий набор экспериментальных данных базового эксперимента при различных уровнях температуры:

- упругие параметры;
- диаграмма одноосного пластического растяжения до деформации $0.05 \div 0.1$;
- диаграмма одноосного пластического растяжения до деформации $0.05 \div 0.1$ после предварительного сжатия до деформации $0.01 \div 0.02$;
- циклическая пластическая диаграмма и число циклов до разрушения при одноосном растяжении сжатии с постоянным размахом деформации;
- циклическая пластическая диаграмма и число циклов до разрушения при двухблочном нагружении с увеличивающимся и уменьшающимся размахом деформации;
- данные по ползучести при постоянном напряжении растяжения: зависимость минимальной скорости ползучести от напряжения во всем диапазоне изменения напряжений от кратковременной до весьма длительной ползучести;
- данные по длительной прочности: кривая длительной прочности при растяжении, включающая все три участка, и кривая длительной прочности при сжатии, соответствующая второму участку.

Расчетно-экспериментальный метод определения материальных функций изложен в работах [1, 2].

Заключение

Представленный здесь прикладной вариант и аппроксимации функционалов пластичности теории упругопластических процессов кроме ранее разработанного варианта [8] для упругопластических процессов сложного нагружения здесь распространен на неизотермические нагружения и процессы, развивающиеся в реальном времени. В дальнейшем предполагается провести верификацию предложенного варианта теории упругопластических процессов на широком спектре материалов и программ экспериментальных исследований.

Литература

1. Бондарь В.С. Неупругое поведение и разрушение материалов и конструкций при сложном неизотермическом нагружении. // Автореферат диссерт….д.ф-м.н. М.: МАМИ, 1990. 40 с.
2. Бондарь В.С. Неупругость. Варианты теории. М.: Физматлит, 2004. 144 с.
3. Бондарь В.С., Даншин В.В. Пластичность. Пропорциональные и непропорциональные нагружения. М.: Физматлит, 2008. 176 с.
4. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд. АН СССР, 1963. 271 с.
5. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
6. Новожилов В.В., Кадашевич Ю.И. Микронапряжения в конструкционных материалах. – Л.: Машиностроение, 1990. 224 с.
7. Зубчанинов В.Г. Механика процессов пластических сред. – М.: Физматлит, 2010. – 352 с.

8. Бондарь В.С., Даншин В.В., Семенов П.В. Простейший вариант аппроксимации функционалов пластичности теории упругопластических процессов. // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2012. № 3. с. 82-90.