РАЗДЕЛ 1. НАЗЕМНЫЕ ТРАНСПОРТНЫЕ СРЕДСТВА, ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ УСТАНОВКИ И ДВИГАТЕЛИ

Математическая модель движения автомобиля как многомассовой системы

д.т.н., проф. Бахмутов С.В., Гусаков Д.Н.
МГТУ «МАМИ»

Пусть $O'X'Y'Z'$ – неподвижная система координат. Зафиксируем подвижную систему координат $OXYZ$ в центре масс автомобиля, связав ее линейные и угловые перемещения с соответствующими перемещениями подрессоренной массы, что обеспечивает постоянство моментов инерции и произведений инерции кузова как основной массы независимо от его положения в пространстве. Примем, что в начальный момент оси подвижной и неподвижной систем координат совпадают, причем плоскости XOY и $X'O'Y'$ параллельны поверхности дороги.

Для описания движения принятой расчетной модели как системы взаимосвязанных масс воспользуемся уравнениями Лагранжа в независимых координатах, которые в общем виде могут быть представлены следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}+\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}=Q_i \quad (1)$$

[1]

Из теоретической механики известно, что абсолютные скорости произвольной точки жесткого тела с координатами в подвижной системе x_j, y_j, z_j имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}_j &= V_x+\dot{r}\cdot z_j-\dot{\psi}\cdot y_j\\ \dot{y}_j &= V_y-\dot{p}\cdot z_j+\dot{\psi}\cdot x_j\\ \dot{z}_j &= V_z-\dot{r}\cdot x_j+\dot{p}\cdot y_j\end{aligned} \quad (2)$$

Соответственно кинетическая энергия произвольной массы:

$$T=\frac{1}{2}\cdot\sum \delta m_j\cdot\left(\dot{x}_j^2+\dot{y}_j^2+\dot{z}_j^2\right) \quad (3)$$

Согласно выбранному в модели расположению осей координат (рис. 1), кинетическая энергия подрессоренной массы:

$$T=\frac{1}{2}\cdot\sum \delta m_j\cdot\begin{bmatrix}\left(V_x+\dot{r}\cdot z_j-\dot{\psi}\cdot y_j\right)^2+\left(V_y-\dot{p}\cdot z_j+\dot{\psi}\cdot x_j\right)^2+\\ +\left(V_z-\dot{r}\cdot x_j+\dot{p}\cdot y_j\right)^2\end{bmatrix} \quad (4)$$

Поскольку подвижная система координат связана с подрессоренной массой, в целях определения кинетической энергии неподрессоренных масс требуется установить связи между скоростями перемещений подрессоренных и неподрессоренных масс, определяемые кинематическими характеристиками подвески, под которыми понимается отношение абсолютных скоростей перемещения неподрессоренных масс к скоростям подрессоренной массы в направлении возможных перемещений:

$$k_j^{q_i q'_i}=\frac{\partial q'_i}{\partial q_i} \quad (5)$$

Таким образом, перемещение каждой неподрессоренной массы определяется шестью кинематическими характеристиками подвески, соответствующими возможным перемещениям в пространстве.

Абсолютные скорости элементарной неподрессоренной массы δm_j по направлению осей x, y, z найдем в соответствии с общими формулами (2):

[1] Расшифровка обозначений см. приложение 1

$$\dot{x}'_j = V_x + \dot{r} \cdot z'_j - \left(\dot{\psi} + k_j^{z\psi} \cdot V_z - k_j^{p\psi} \cdot \dot{p} - k_j^{r\psi} \cdot \dot{r}\right) \cdot y'_j + k_j^{zx} \cdot V_z + k_j^{rx} \cdot \dot{r} + k_j^{px} \cdot \dot{p}$$
$$\dot{y}'_j = V_y - \left(k_j^{pp} \cdot \dot{p} - k_j^{zp} \cdot V_z - k_j^{rp} \cdot \dot{r}\right) \cdot z'_j + \left(\dot{\psi} + k_j^{z\psi} \cdot V_z - k_j^{p\psi} \cdot \dot{p} - k_j^{r\psi} \cdot \dot{r}\right) \cdot x'_j - k_j^{ry} \cdot \dot{r} - \qquad (6)$$
$$- k_j^{py} \cdot \dot{p} - k_j^{zy} \cdot V_z$$

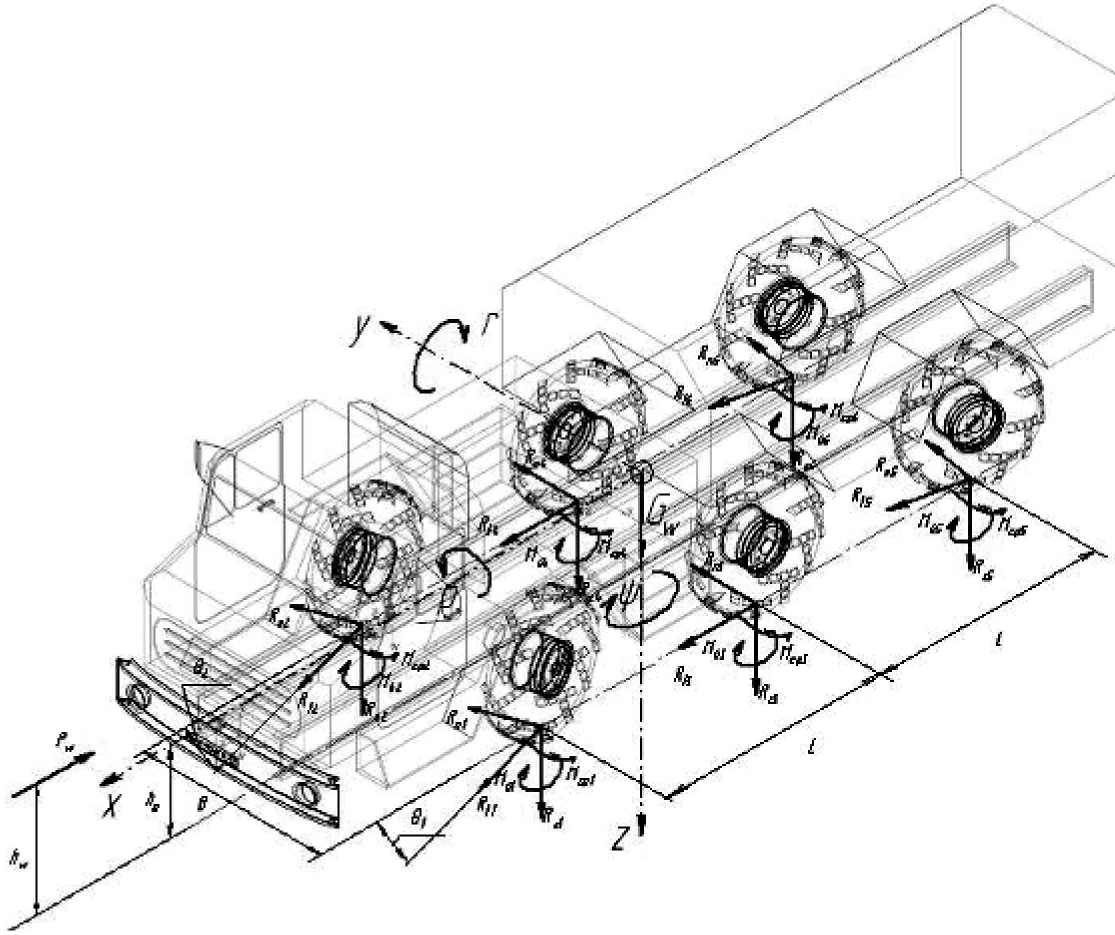

Рис. 1. Расчетная схема трехосного автомобиля и внешние силовые факторы, действующие на него.

Проанализировав характер полученных производных подвески, отметим, что координаты произвольной точки неподрессоренной массы не являются постоянными, а зависят от текущих значений r, p, z. Получим следующие выражения для x'_j, y'_j, z'_j:

$$x'_j = x'_{j0} + k_j^{rx} \cdot r + k_j^{px} \cdot p + k_j^{zx} \cdot z$$
$$y'_j = y'_{j0} - k_j^{ry} \cdot r - k_j^{py} \cdot p - k_j^{zy} \cdot z \qquad (7)$$
$$z'_j = z'_{j0} + k_j^{rz} \cdot r + k_j^{pz} \cdot p + k_j^{zz} \cdot z$$

Подставляя 1.1.8 в 1.1.7, получим:

$$\dot{x}'_j = V_x + \dot{r} \cdot \left(z'_{j0} + k_j^{rz} \cdot r + k_j^{pz} \cdot p + k_j^{zz} \cdot z\right) - \left(\dot{\psi} + k_j^{z\psi} \cdot V_z - k_j^{p\psi} \cdot \dot{p} - k_j^{r\psi} \cdot \dot{r}\right) \cdot$$
$$\cdot \left(y'_{j0} - k_j^{ry} \cdot r - k_j^{py} \cdot p - k_j^{zy} \cdot z\right) + k_j^{zx} \cdot V_z + k_j^{rx} \cdot \dot{r} + k_j^{px} \cdot \dot{p}$$
$$\dot{y}'_j = V_y - \left(k_j^{pp} \cdot \dot{p} - k_j^{zp} \cdot V_z - k_j^{rp} \cdot \dot{r}\right) \cdot \left(z'_{j0} + k_j^{rz} \cdot r + k_j^{pz} \cdot p + k_j^{zz} \cdot z\right) +$$
$$+ \left(\dot{\psi} + k_j^{z\psi} \cdot V_z - k_j^{p\psi} \cdot \dot{p} - k_j^{r\psi} \cdot \dot{r}\right) \cdot \left(x'_{j0} + k_j^{rx} \cdot r + k_j^{px} \cdot p + k_j^{zx} \cdot z\right) - k_j^{ry} \cdot \dot{r} - \qquad (8)$$
$$- k_j^{py} \cdot \dot{p} - k_j^{zy} \cdot V_z$$
$$\dot{z}'_j = k_j^{zz} \cdot V_z - \dot{r} \cdot \left(x'_{j0} + k_j^{rx} \cdot r + k_j^{px} \cdot p + k_j^{zx} \cdot z\right) + \left(k_j^{pp} \cdot \dot{p} - k_j^{zp} \cdot V_z - k_j^{rp} \cdot \dot{r}\right) \cdot$$
$$\cdot \left(y'_{j0} - k_j^{ry} \cdot r - k_j^{py} \cdot p - k_j^{zy} \cdot z\right) + k_j^{rz} \cdot \dot{r}$$

Следовательно, кинетическая энергия неподрессоренной массы:

$$
T_j = \frac{1}{2} \cdot \sum \delta m_j \cdot \left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} V_x + \dot{r} \cdot \left(z'_{j0} + k_j^{rz} \cdot r + k_j^{pz} \cdot p + k_j^{zz} \cdot z \right) - \left(\dot{\psi} + k_j^{z\psi} \cdot V_z - k_j^{p\psi} \cdot \dot{p} - k_j^{r\psi} \cdot \dot{r} \right) \cdot \\ \cdot \left(y'_{j0} - k_j^{ry} \cdot r - k_j^{py} \cdot p - k_j^{zy} \cdot z \right) + k_j^{zx} \cdot V_z + k_j^{rx} \cdot \dot{r} + k_j^{px} \cdot \dot{p} \end{array} \right)^2 + \\ + \left(\begin{array}{l} V_y - \left(k_j^{pp} \cdot \dot{p} - k_j^{zp} \cdot V_z - k_j^{rp} \cdot \dot{r} \right) \cdot \left(z'_{j0} + k_j^{rz} \cdot r + k_j^{pz} \cdot p + k_j^{zz} \cdot z \right) + \\ + \left(\dot{\psi} + k_j^{z\psi} \cdot V_z - k_j^{p\psi} \cdot \dot{p} - k_j^{r\psi} \cdot \dot{r} \right) \cdot \left(x'_{j0} + k_j^{rx} \cdot r + k_j^{px} \cdot p + k_j^{zx} \cdot z \right) - \\ k_j^{ry} \cdot \dot{r} - k_j^{py} \cdot \dot{p} - k_j^{zy} \cdot V_z \end{array} \right)^2 + \\ + \left(\begin{array}{l} k_j^{zz} \cdot V_z - \dot{r} \cdot \left(x'_{j0} + k_j^{rx} \cdot r + k_j^{px} \cdot p + k_j^{zx} \cdot z \right) + \left(k_j^{pp} \cdot \dot{p} - k_j^{zp} \cdot V_z - k_j^{rp} \cdot \dot{r} \right) \cdot \\ \cdot \left(y'_{j0} - k_j^{ry} \cdot r - k_j^{py} \cdot p - k_j^{zy} \cdot z \right) + k_j^{rz} \cdot \dot{r} \end{array} \right)^2 \end{array} \right) \qquad (9)
$$

Решение уравнений (4) и (9) относительно каждой из обобщенных координат дает левые части уравнений Лагранжа второго рода для подрессоренной и неподрессоренных масс соответственно.

При составлении уравнений движения многомассовой системы, очевидно, необходимо исходить из того, что связь элементов системы однозначно определяется кинематическими либо силовыми факторами. В рассматриваемом случае кинематическая связь задается направляющим аппаратом подвески (математически выражается при помощи коэффициентов кинематических характеристик подвески). Неизвестным фактором является силовое взаимодействие подрессоренной и неподрессоренных масс системы. Для определения силового взаимодействия масс системы условно «разрежем» автомобиль на подрессоренные и неподрессоренные массы. Очевидно, что границы такого раздела пройдут по элементам подвески (в нашем случае – двухрычажной независимой каждого из колес). Из курса сопротивления материалов известно, что две системы являются эквивалентными при равенстве силовых факторов, действующих на систему, и вызываемых ими перемещений. Таким образом, при разрыве связей необходимо ввести заменяющие их силовые факторы (см. схемы рис. 2 и 3).

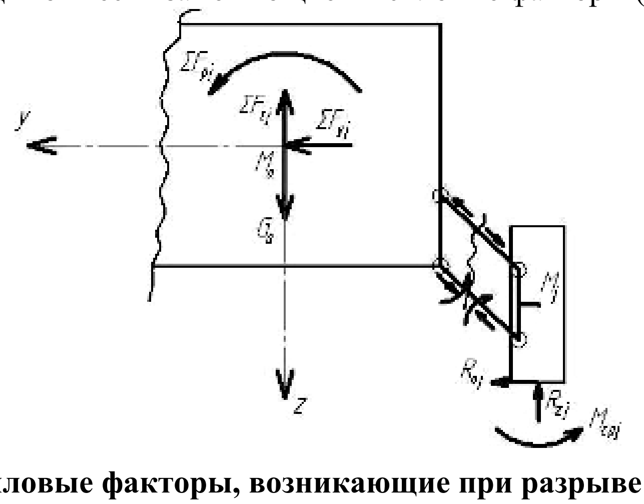

Рис. 2. Силовые факторы, возникающие при разрыве подвески (вид спереди, схематично).

Очевидно, что на подрессоренную и неподрессоренную массы при этом будут действовать равные по величине и противоположные по направлению силы (таким образом, при суммировании они взаимно сокращаются, что подтверждает внутренний характер этих сил по отношению к системе). Также логично предположить, что силовые факторы, вводимые при разрыве подвески, будут каким-то образом приложены вдоль ее рычагов (в случае линейных сил) или представлять собой скручивающие и изгибающие моменты, действующие на рычаги подвески. В любом случае величина и направление приложения данных силовых факторов будут зависеть от направляющего аппарата подвески, что не слишком удобно при расчетах ввиду необходимости учета геометрии подвески. Поэтому целесообразно указанные силовые факторы привести к центру подрессоренных масс – таким образом при составлении уравнений движения подрессоренной массы каждый из указанных силовых факторов будет главной и единственной силой (моментом), действующим на каждом из линейных (угловых) перемещений системы. Очевидно, что приведенные силы и моменты не являют собой реакции в пятне контакта колеса с дорогой по соответствующему направлению в чистом виде, а учитывают влияние каждой реакции через кинематические характеристики подвески, а также инерционной составляющей от движения неподрессоренной массы.

При составлении уравнений движения неподрессоренной массы таким образом необходимо в качестве внешних сил принимать каждую из приведенных сил (моментов), введенных при разрыве подвески, противоположную по направлению действующей на кузов автомобиля, с учетом кинематических характеристик подвески (поскольку приведенные силовые факторы приложены в центре подрессоренной массы).

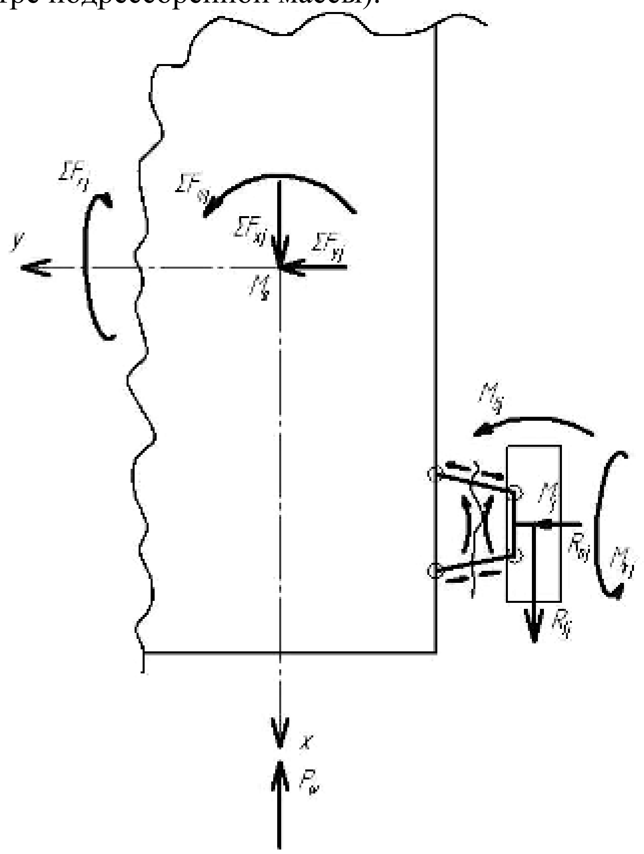

Рис. 3. Силовые факторы, возникающие при разрыве подвески (вид сверху, схематично).

Полная потенциальная энергия системы определяется суммой потенциальных энергий от продольного и поперечного крена и вертикального перемещения подрессоренной массы:

$$U = \left(c_{y12} \cdot a_{p12}^2 + c_{y34} \cdot a_{p34}^2 + c_{y56} \cdot a_{p56}^2\right) \cdot p^2 + \left(c_{y12} \cdot a_{r12}^2 + c_{y56} \cdot a_{r56}^2\right) \cdot r^2 + \\ + \left(c_{y12} \cdot a_{z12}^2 + c_{y34} \cdot a_{z34}^2 + c_{y56} \cdot a_{z56}^2\right) \cdot z^2 \qquad (10)$$

Поскольку расчетная модель автомобиль не является консервативной системой, то есть сумма кинетической и потенциальной энергий изменяется при движении системы, необходимо определить диссипативную функцию Релея.

Принимая пропорциональность между силой сопротивления амортизатора и скоростью относительного перемещения его поршня и допуская линейную зависимость между последней и обобщенной скоростью $\dot{q}_i$, определим диссипативную функцию Релея при вертикальном перемещении подрессоренной массы:

$$R_z = \left(k_{a12}^c \cdot b_{z12}^2 + k_{a34}^c \cdot b_{z34}^2 + k_{a56}^c \cdot b_{z56}^2\right) \cdot V_z^2 \quad при \; V_z > 0) \qquad (11.а)$$

$$R_z = \left(k_{a12}^o \cdot b_{z12}^2 + k_{a34}^o \cdot b_{z34}^2 + k_{a56}^o \cdot b_{z56}^2\right) \cdot V_z^2 \quad при \; V_z < 0 \qquad (11.б)$$

Для поперечного крена:

$$R_p = \frac{1}{2} \cdot \left(k^c_{a12} \cdot b^2_{p12} + k^o_{a12} \cdot b^2_{p12} + k^c_{a34} \cdot b^2_{p34} + k^o_{a34} \cdot b^2_{p34} + k^c_{a56} \cdot b^2_{p56} + k^o_{a56} \cdot b^2_{p56} \right) \cdot \dot{p}^2 \qquad (12)$$

Аналогично для продольного крена подрессоренной массы:

$$R_r = \left(k^o_{a12} \cdot b^2_{r12} + k^c_{a56} \cdot b^2_{r56} \right) \cdot \dot{r}^2 \quad при \; r > 0 \qquad (13.а)$$

$$R_r = \left(k^c_{a12} \cdot b^2_{z12} + k^o_{a56} \cdot b^2_{z56} \right) \cdot \dot{r}^2 \quad при \; r < 0 \qquad (13.б)$$

Далее определим частные производные потенциальной энергии для подрессоренной и неподрессоренных масс по обобщенным координатам и диссипативной функции по обобщенным скоростям.

Обобщенные силы уравнений Лагранжа определим как отношения работ внешних сил dA_i к соответствующим возможным перемещениям dq_i.

Согласно внешним силам, показанным на рис. 1, и внутренним силам, динамически связывающим подрессоренную и неподрессоренные массы (рис. 2 и 3), обобщенная сила Q_x для подрессоренной массы на возможном перемещении dx составит (с учетом производных подвески):

$$Q_x = \sum F_{xj} - P_w \qquad (14.а)$$

Обобщенная сила Q_y на возможном перемещении dy равна:

$$Q_y = \sum F_{yj} \qquad (14.б)$$

Для перемещения dz:

$$Q_z = G_a - \sum F_{zj} \qquad (14.в)$$

Аналогично для остальных перемещений:

$$Q_p = M_e - \sum F_{pj} \qquad (14.г)$$

$$Q_r = \sum F_{rj} \qquad (14.д)$$

$$Q_\psi = (R_{n1} + R_{n2}) \cdot L \cdot \cos\theta_{12} - (R_{n5} + R_{n6}) \cdot L \cdot \cos\theta_{56} + (R_{n2} - R_{n1}) \cdot \frac{B}{2} \cdot \sin\theta_{12} +$$
$$+ (R_{n5} - R_{n6}) \cdot \frac{B}{2} \cdot \sin\theta_{56} + (R_{t1} - R_{t2}) \cdot \frac{B}{2} \cdot \cos\theta_{12} + (R_{t3} - R_{t4}) \cdot \frac{B}{2} + (R_{t5} - R_{t6}) \cdot \frac{B}{2} \cdot \cos\theta_{56} + \qquad (14.е)$$
$$+ \sum R_{tj} \cdot \frac{B}{2} \cdot \sin\theta_j - \sum F_{\psi j}$$

где: θ_j – угол поворота колеса (равен 0 для колес средней оси, отрицателен для колес задней оси);

P_w – сила аэродинамического сопротивления.

Для неподрессоренной массы:

$$Q_{xj} = R_{tj} \cdot \cos\theta_j - R_{nj} \cdot \sin\theta_j - F_{xj} \qquad (15.а)$$

$$Q_{yj} = R_{nj} \cdot \cos\theta_j + R_{tj} \cdot \sin\theta_j - F_{yj} \qquad (15.б)$$

$$Q_{zj} = k^{zx}_j \cdot F_{xj} - k^{zy}_j \cdot F_{yj} + k^{zz}_j \cdot F_{zj} - k^{zp}_j \cdot F_{pj} + k^{z\psi}_j \cdot F_{\psi j} - R_{zj} \qquad (15.в)$$

$$Q_{pj} = k^{px}_j \cdot F_{xj} - k^{py}_j \cdot F_{yj} + k^{pz}_j \cdot F_{zj} + k^{pp}_j \cdot F_{pj} - k^{p\psi}_j \cdot F_{\psi j} -$$
$$- k_{cp} \cdot \left(k^{pp}_j \cdot p - k^{rp}_j \cdot r - k^{zp}_j \cdot z \right) \qquad (15.г)$$

$$Q_{rj} = k^{rx}_j \cdot F_{xj} - k^{ry}_j \cdot F_{yj} + k^{rz}_j \cdot F_{zj} - k^{rp}_j \cdot F_{pj} + k^{r\psi}_j \cdot F_{\psi j} - M_{ckj} \qquad 15.д)$$

$$Q_{\psi j} = F_{\psi j} - M_{\delta j}, \qquad (15.е)$$

где: k_{cp} – коэффициент сопротивления развалу,

$k_{cp} \cdot \left(k_j^{pp} \cdot p - k_j^{rp} \cdot r - k_j^{zp} \cdot z\right) = k_{cp} \cdot p_j$ – момент сопротивления развалу,

M_{ckj} – момент сопротивления качению j-го колеса,

$M_{\delta j}$ – момент сопротивления повороту j-го колеса,

F_{xj}, F_{yj}, F_{zj}, F_{pj}, F_{rj}, $F_{\psi j}$ – силовые факторы, заменяющие связи подвески, приведенные к центру масс кузова.

Запишем уравнения Лагранжа в окончательном виде.

Для подрессоренной массы:

уравнение движения по обобщенной координате x (q_1):

$$m_0 \cdot \begin{bmatrix} \dot{V}_x - \dot{\psi} \cdot V_y + \dot{r} \cdot V_z - \left(\dot{\psi}^2 + \dot{r}^2\right) \cdot x_0 + \left(\dot{r} \cdot \dot{p} - \ddot{\psi}\right) \cdot y_0 + \\ + \left(\ddot{r} + \dot{\psi} \cdot \dot{p}\right) \cdot z_0 \end{bmatrix} = \sum F_{xj} - P_w \qquad (16)$$

(потенциальная энергия и диссипативная функция на данном перемещении равны нулю).

Для неподрессоренной массы:

уравнение движения по обобщенной координате x (q_1)

$$m_j \cdot \begin{pmatrix} \dot{V}_x + \ddot{r} \cdot z'_{0j} + k_j^{rz} \cdot \ddot{r} \cdot r + k_j^{rz} \cdot \dot{r}^2 + k_j^{pz} \cdot \ddot{r} \cdot p + k_j^{pz} \cdot \dot{r} \cdot \dot{p} + k_j^{zz} \cdot \ddot{r} \cdot z + \\ + k_j^{zz} \cdot \dot{r} \cdot V_z - \ddot{\psi} \cdot y'_{0j} + k_j^{ry} \cdot \ddot{\psi} \cdot r + k_j^{ry} \cdot \dot{\psi} \cdot \dot{r} + k_j^{py} \cdot \ddot{\psi} \cdot p + \\ + k_j^{zy} \cdot \ddot{\psi} \cdot z - k_j^{z\psi} \cdot V_z \cdot y'_{0j} + k_j^{z\psi} \cdot k_j^{ry} \cdot \dot{V}_z \cdot r + \\ + k_j^{z\psi} \cdot k_j^{py} \cdot \dot{V}_z \cdot p + k_j^{z\psi} \cdot k_j^{py} \cdot V_z \cdot \dot{p} + k_j^{z\psi} \cdot k_j^{zy} \cdot \dot{V}_z \cdot z + k_j^{z\psi} \cdot k_j^{zy} \cdot V_z^2 + \\ + k_j^{p\psi} \cdot \ddot{p} \cdot y'_{0j} - k_j^{p\psi} \cdot k_j^{ry} \cdot \ddot{p} \cdot r - k_j^{p\psi} \cdot k_j^{ry} \cdot \dot{p} \cdot \dot{r} - k_j^{p\psi} \cdot k_j^{ry} \cdot \ddot{p} \cdot p - \\ - k_j^{p\psi} \cdot k_j^{ry} \cdot \dot{p}^2 - k_j^{p\psi} \cdot k_j^{zy} \cdot \ddot{p} \cdot z - k_j^{p\psi} \cdot k_j^{zy} \cdot \dot{p} \cdot V_z + k_j^{r\psi} \cdot \ddot{r} \cdot y'_{0j} - \\ - k_j^{r\psi} \cdot k_j^{ry} \cdot \ddot{r} \cdot r - k_j^{r\psi} \cdot k_j^{ry} \cdot \dot{r}^2 - k_j^{r\psi} \cdot k_j^{py} \cdot \ddot{r} \cdot p - k_j^{r\psi} \cdot k_j^{py} \cdot \dot{r} \cdot \dot{p} - \\ - k_j^{r\psi} \cdot k_j^{zy} \cdot \ddot{r} \cdot z - k_j^{r\psi} \cdot k_j^{zy} \cdot \dot{r} \cdot V_z + k_j^{zx} \cdot \dot{V}_z + k_j^{rx} \cdot \ddot{r} + k_j^{px} \cdot \ddot{p} \end{pmatrix} -$$

$$- m_j \cdot \begin{pmatrix} V_y + k_j^{zp} \cdot V_z \cdot z'_{0j} + k_j^{zp} \cdot k_j^{rz} \cdot V_z \cdot r + \\ + k_j^{zp} \cdot k_j^{pz} \cdot V_z \cdot p + k_j^{zp} \cdot k_j^{zz} \cdot V_z \cdot z - k_j^{pp} \cdot z'_{0j} \cdot \dot{p} - k_j^{pp} \cdot k_j^{rz} \cdot \dot{p} \cdot r - k_j^{pp} \cdot k_j^{pz} \cdot \dot{p} \cdot p - \\ - k_j^{pp} \cdot k_j^{zz} \cdot \dot{p} \cdot z + k_j^{rp} \cdot z'_{0j} \cdot \dot{r} + k_j^{rp} \cdot k_j^{rz} \cdot \dot{r} \cdot r + k_j^{rp} \cdot k_j^{pz} \cdot \dot{r} \cdot p + k_j^{rp} \cdot k_j^{zz} \cdot \dot{r} \cdot z + \\ + \dot{\psi} \cdot x'_{0j} + k_j^{rx} \cdot \dot{\psi} \cdot r + k_j^{px} \cdot \dot{\psi} \cdot p + k_j^{zx} \cdot \dot{\psi} \cdot z + k_j^{z\psi} \cdot V_z \cdot x'_{0j} + k_j^{z\psi} \cdot k_j^{rx} \cdot V_z \cdot r + \\ + k_j^{z\psi} \cdot k_j^{px} \cdot V_z \cdot p + k_j^{z\psi} \cdot k_j^{zx} \cdot V_z \cdot z - k_j^{p\psi} \cdot \dot{p} \cdot x'_{0j} - k_j^{p\psi} \cdot k_j^{rx} \cdot \dot{p} \cdot r - k_j^{p\psi} \cdot k_j^{px} \cdot \dot{p} \cdot p - \\ - k_j^{p\psi} \cdot k_j^{zx} \cdot \dot{p} \cdot z - k_j^{r\psi} \cdot \dot{r} \cdot x'_{0j} - k_j^{r\psi} \cdot k_j^{rx} \cdot \dot{r} \cdot r - k_j^{r\psi} \cdot k_j^{px} \cdot \dot{r} \cdot p - k_j^{r\psi} \cdot k_j^{zx} \cdot \dot{r} \cdot z \end{pmatrix} \cdot \qquad (17)$$

$$\cdot \left(\dot{\psi} + k_j^{z\psi} \cdot V_z - k_j^{p\psi} \cdot \dot{p} - k_j^{r\psi} \cdot \dot{r}\right) +$$

$$+ m_j \cdot \begin{pmatrix} k_j^{zz} \cdot V_z - \dot{r} \cdot x'_{0j} - k_j^{rx} \cdot \dot{r} \cdot r - k_j^{px} \cdot \dot{r} \cdot p - k_j^{zx} \cdot \dot{r} \cdot z - \\ - k_j^{zp} \cdot V_z \cdot y'_{0j} + k_j^{zp} \cdot k_j^{ry} \cdot V_z \cdot r + k_j^{zp} \cdot k_j^{py} \cdot V_z \cdot p + k_j^{zp} \cdot k_j^{zy} \cdot V_z \cdot z - \\ - k_j^{rp} \cdot \dot{r} \cdot y'_{0j} + k_j^{rp} \cdot k_j^{ry} \cdot \dot{r} \cdot r + k_j^{rp} \cdot k_j^{py} \cdot \dot{r} \cdot p + k_j^{rp} \cdot k_j^{zy} \cdot \dot{r} \cdot z + k_j^{pp} \cdot \dot{p} \cdot y'_{0j} - \\ - k_j^{pp} \cdot k_j^{ry} \cdot \dot{p} \cdot r - k_j^{pp} \cdot k_j^{py} \cdot \dot{p} \cdot p - k_j^{pp} \cdot k_j^{zy} \cdot \dot{p} \cdot z + k_j^{rz} \cdot \dot{r} \end{pmatrix} \cdot \dot{r} =$$

$$= R_{tj} \cdot \cos\theta_j - R_{nj} \cdot \sin\theta_j - F_{xj}$$

Таким образом, мы получаем систему, состоящую из шести уравнений движения для каждой из масс (уравнения 16 для подрессоренной массы и группа уравнений 17 для каждой из неподрессоренных масс j). Совместное решение уравнений этой системы представляет собой математическую модель движения автомобиля.

Выводы

Получена универсальная многомассовая система уравнений движения автомобиля, в которой математическое описание конструкции направляющего аппарата подвески заменено передаточной функцией – кинематической характеристикой подвески. Представлен способ вычисления инерционных характеристик отдельных масс в общей координатной системе.

Приложение 1

Обозначения и индексация переменных:

I_x, I_y, I_z – моменты инерции в первоначальной системе координат;

$I_{x'}$, $I_{y'}$, $I_{z'}$ – моменты инерции в новой системе координат;

x', y', z' – соответствующие смещения осей новой системы координат относительно первоначальной;

P_{xy}, P_{yz}, P_{xz} – произведения инерции в первоначальной системе координат;

$P_{x'y'}$, $P_{y'z'}$, $P_{x'z'}$ – произведения инерции в новой системе координат;

T – кинетическая энергия системы;

U – потенциальная энергия системы;

R – диссипативная функция Релея;

Q_i – обобщенная сила;

q_i – обобщенная координата;

$\dot{q}_i$ – обобщенная скорость;

I_{x0}, I_{y0}, I_{z0} и P_{xy0}, P_{xz0}, P_{yz0} – моменты инерции и произведения инерции подрессоренной массы относительно осей x, y, z;

x_0, y_0, z_0 – координаты центра подрессоренной массы;

V_x, V_y, V_z, $\dot{p}$, $\dot{r}$, $\dot{\psi}$ – линейные и угловые скорости по соответствующим осям координат;

q_i – возможное перемещение подрессоренной массы;

q'_i – возможное перемещение неподрессоренной массы;

j – номер неподрессоренной массы;

P_w – сила аэродинамического сопротивления;

R_{tj}, R_{nj}, R_{zj} – продольная (боковая, вертикальная) реакция j-го колеса;

F_{xj} – эквивалентный силовой фактор, вводимый при разрыве подвески, действующий в направлении соответствующей оси;

G_a – вес автомобиля;

M_a – обозначение центра масс автомобиля;

M_{kj} – крутящий момент j-го колеса;

$M_{\delta j}$ – момент сопротивления повороту j-го колеса;

M_{cpj} – момент сопротивления развалу j-го колеса.

Параметрическая унификация конструктивных параметров автомобиля при его конструировании и производстве

к.ф-м.н., доц. Гадельшин Т.К., Гадельшин Д.Т.
МГТУ «МАМИ»

Введение

За более чем вековую историю развития автомобилизации мы можем наблюдать, что автомобили все больше и больше влияют на различные стороны жизни и деятельности лю-