

место. И как показывает анализ, если руководствоваться рекомендациями работы [3], то исходное отношение натяжений должно быть $m = \frac{F_1}{F_2} = 8,33$ (здесь F_1 и F_2 - силы натяжения

ведущей и ведомой ветвей ремня). Окончательно с некоторым запасом можно рекомендовать для передач с подпружиненными натяжными шкивами $m = 8$, а не $m = 5$, как это принято в документах ISO [5]. Это обеспечит увеличение ресурса ремня не только без снижения тяговой способности передачи, но и с некоторым ее увеличением. Следует отметить, что, несмотря на значительное количество работ, посвященных самонатяжным ремненным передачам, ремень в них, как правило, рассматривается в виде гибкой нерастяжимой нити. Как показали многолетние исследования В.К. Мартынова [6], получить современную и точную методику расчета и проектирования ременной передачи не представляется возможным. Кроме того, требуются дополнительные экспериментальные исследования для установления оптимальных норм предварительного натяжения ремня для рассматриваемого типа передач.

Литература

1. Терешкин Л.В. Приводы генераторов пассажирских вагонов. - М.: Транспорт, 1990, 152 с.
2. Самошкин С.Л., Доронин И.С., Чернышов А.А. Приводы генераторов индивидуальных систем энергоснабжения вагонов локомотивной тяги: Обзор. - М.: ЦНИИТЭИтяжмаш, 1986. 44с.
3. Баловнев Н.П. Анализ методов расчета клиноременных передач. В сб. Агрегатирование и приводы сельскохозяйственных машин. М.: НПО ВИСХОМ, 1985 с. 60-71.
4. РТМ23.2.90-85. Методика проектирования и расчета клиноременных передач сельскохозяйственных машин с натяжными подпружиненными шкивами, обеспечивающими постоянство натяжения ведомой ветви. - М.: ВИСХОМ, 1984. - 34 с.
5. Пронин Б.А., Овчинникова А.А. Расчет клиноременных передач // Вестник машиностроения. 1982. № 3. с. 23-26.
6. Мартынов В.К. Разработка теории, методов расчета и проектирования современных передач трением гибкой связью. Автореферат дис. доктора техн. наук: 05.02.02 Тула. 2004 г.

Некоторые проблемы, возникающие при создании многомассовой математической модели движения автомобиля и методы их решения

д.т.н., проф. Бахмутов С.В., Гусаков Д.Н.
МГТУ «МАМИ»

Статья посвящена анализу особенностей получения многомассовой модели движения автомобиля, независимо от его конструкции и сложностей, возникающих при ее создании. Предложена методика написания уравнений движения неподдрессоренных масс в общей подвижной системе координат. Описывается роль кинематических характеристик подвески.

Очевидно, что при составлении системы уравнений, представляющей собой математическое описание автомобиля, определяющим фактором является число переменных. Оно, в свою очередь, суммируется исходя из количества масс системы и числа степеней свободы каждой из них. При исследовании управляемости и устойчивости автомобиля рассматривается общая схема движения, в которой основными массами являются кузов (поддрессоренная масса) и колеса (неподдрессоренные массы).

Главная задача – координатное согласование всех масс, входящих в систему, другими словами – выбор системы координат, единой для всех масс (только в этом случае становится возможным совместное решение уравнений, входящих в математическое описание автомобиля). Как известно, наибольшее удобство представляет собой подвижная система координат, привязанная к какой-либо массе. Такой подход позволяет вычислять координаты подвижной системы относительно неподвижной (базовой), которые, в свою очередь, используются для вычисления перемещений автомобиля. Удобство состоит в том, что моменты инер-

ции массы, с которой жестко связана система координат, остаются постоянными.

В случае многомассовой системы возникает проблема, обусловленная вычислением моментов инерции масс, центр которых не совпадает с центром выбранной подвижной системой координат. Логично привязать подвижную систему координат к кузову автомобиля (неподдрессоренной массе), в центре масс автомобиля. Таким образом, остается задача вычисления моментов инерции неподдрессоренных масс. Эта задача может быть решена двумя способами. В первом случае координаты неподдрессоренных масс (колес) остаются независимыми, к ним привязываются индивидуальные системы координат, а связь систем осуществляется посредством углов Брайнта. Данный вариант неудобен тем, что на каждом шагу интегрирования необходимо пересчитывать все силовые и координатные факторы, входящие в уравнения, с учетом изменяющегося взаимного положения систем координат. Кроме того, несвязанные системы при определенной погрешности интегрирования могут «разойтись» - т.е. после возвращения системы в состояние покоя взаимные линейные и угловые координаты систем могут не соответствовать начальным. Второй вариант предполагает использование единой системы координат. В этом случае силовые факторы, как внешние, так и внутренние, входят во все уравнения системы в едином виде. Однако в таком случае моменты инерции неподдрессоренных масс являются переменными и должны некоторым образом пересчитываться на каждом шаге интегрирования.

В качестве примера рассмотрим исследуемый трехосный автомобиль (тип трансмиссии и остальные параметры в данном случае не играют роли), рис. 1.

Для вычисления приведенных инерционных характеристик колес воспользуемся формулами для переноса моментов и произведений инерции в параллельную и повернутую системы координат.

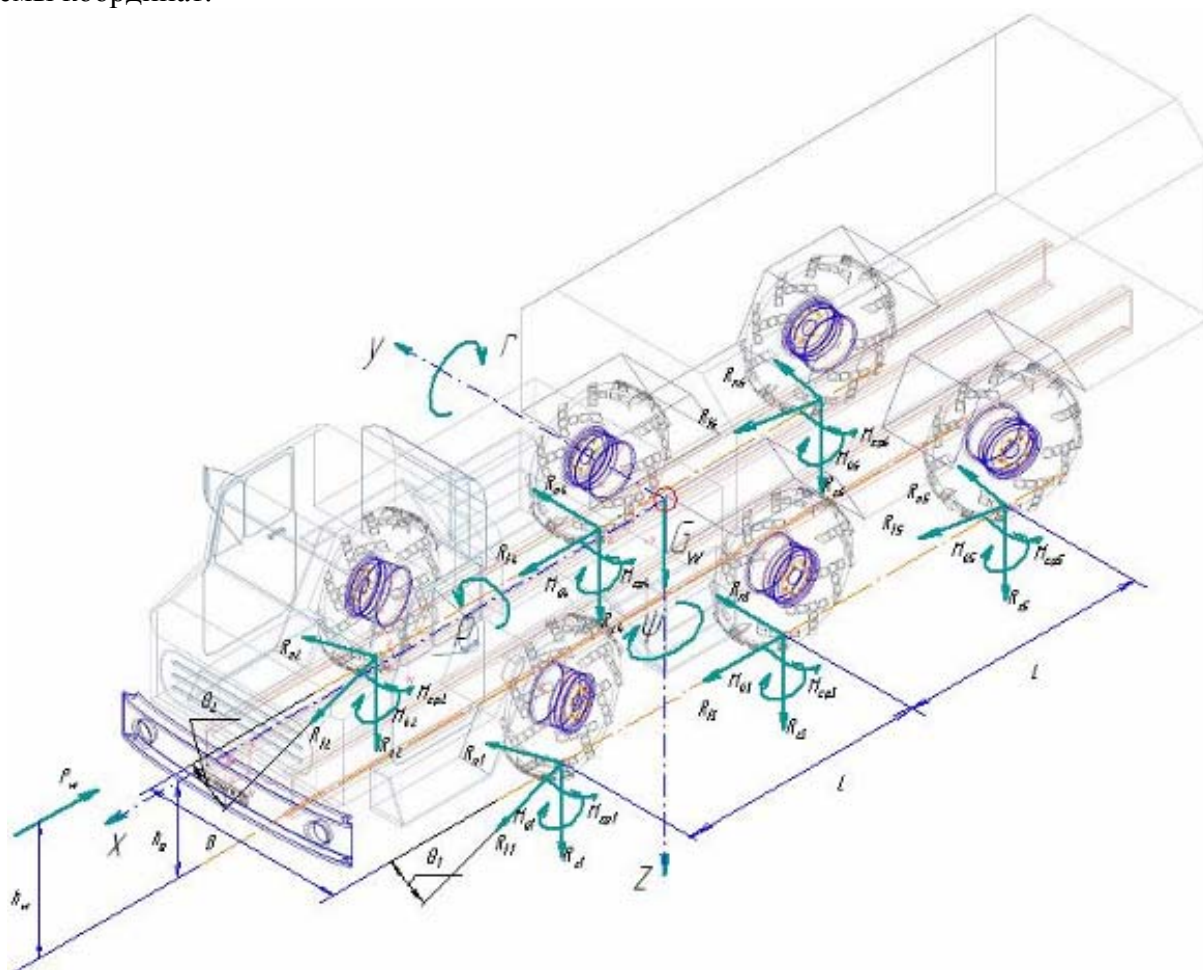


Рис.1. Расчетная схема трехосного автомобиля и внешние силовые факторы, действующие на него.

Для переноса моментов и произведений инерции в параллельную систему координат из

главной используются сокращенные формулы⁷:

$$I_{x'} = I_x + m \times (y'^2 + z'^2) \quad (1.1.a)$$

$$I_{y'} = I_y + m \times (x'^2 + z'^2) \quad (1.1.б)$$

$$I_{z'} = I_z + m \times (y'^2 + x'^2) \quad (1.1.в)$$

$$P_{x'y'} = P_{xy} + m \times x' \times y' \quad (1.2.a)$$

$$P_{x'z'} = P_{xz} + m \times x' \times z' \quad (1.2.в)$$

Когда производится перенос моментов и произведений инерции в повернутую систему координат с началом, совпадающим с началом исходной системы координат, целесообразно использование направляющих косинусов, связывающих оси. В таблице 1 связь координат представлена при помощи коэффициентов (оси x , y , z – первоначальные, а x' , y' , z' – повернутые):

Таблица 1.

Новые координаты	Первоначальные координаты		
	x	y	z
x'	α_1	β_1	γ_1
y'	α_2	β_2	γ_2
z'	α_3	β_3	γ_3

Новые координаты выражаются через первоначальные при помощи коэффициентов в горизонтальных строках:

$$x' = \alpha_1 \times x + \beta_1 \times y + \gamma_1 \times z$$

(координаты y' и z' вычисляются аналогично)

Обратный переход осуществляется при помощи коэффициентов в вертикальных строках:

$$x = \alpha_1 \times x' + \alpha_2 \times y' + \alpha_3 \times z' \quad (и т.д.)$$

Моменты инерции в повернутой системе координат в общем виде выразятся:

$$I_{x'} = \alpha_1^2 \times I_x + \beta_1^2 \times I_y + \gamma_1^2 \times I_z - 2 \times \beta_1 \times \gamma_1 \times P_{yz} - 2 \times \alpha_1 \times \beta_1 \times P_{xy} - 2 \times \alpha_1 \times \gamma_1 \times P_{xz} \quad (2.1.a)$$

$$I_{y'} = \alpha_2^2 \times I_x + \beta_2^2 \times I_y + \gamma_2^2 \times I_z - 2 \times \beta_2 \times \gamma_2 \times P_{yz} - 2 \times \alpha_2 \times \beta_2 \times P_{xy} - 2 \times \alpha_2 \times \gamma_2 \times P_{xz} \quad (2.1.б)$$

$$I_{z'} = \alpha_3^2 \times I_x + \beta_3^2 \times I_y + \gamma_3^2 \times I_z - 2 \times \beta_3 \times \gamma_3 \times P_{yz} - 2 \times \alpha_3 \times \beta_3 \times P_{xy} - 2 \times \alpha_3 \times \gamma_3 \times P_{xz} \quad (2.1.в)$$

Произведения инерции относительно повернутых осей:

$$P_{x'y'} = -\alpha_1 \times \alpha_2 \times I_x - \beta_1 \times \beta_2 \times I_y - \gamma_1 \times \gamma_2 \times I_z + P_{xy} \times (\alpha_1 \times \beta_2 + \alpha_2 \times \beta_1) + P_{xz} \times (\alpha_1 \times \gamma_2 + \alpha_2 \times \gamma_1) + P_{yz} \times (\beta_1 \times \gamma_2 + \beta_2 \times \gamma_1) \quad (2.2. a)$$

$$P_{x'z'} = -\alpha_1 \times \alpha_3 \times I_x - \beta_1 \times \beta_3 \times I_y - \gamma_1 \times \gamma_3 \times I_z + P_{xy} \times (\alpha_1 \times \beta_3 + \alpha_3 \times \beta_1) + P_{xz} \times (\alpha_1 \times \gamma_3 + \alpha_3 \times \gamma_1) + P_{yz} \times (\beta_1 \times \gamma_3 + \beta_3 \times \gamma_1) \quad (2.2.б)$$

$$P_{y'z'} = -\alpha_2 \times \alpha_3 \times I_x - \beta_2 \times \beta_3 \times I_y - \gamma_2 \times \gamma_3 \times I_z + P_{xy} \times (\alpha_2 \times \beta_3 + \alpha_3 \times \beta_2) + P_{xz} \times (\alpha_2 \times \gamma_3 + \alpha_3 \times \gamma_2) + P_{yz} \times (\beta_2 \times \gamma_3 + \beta_3 \times \gamma_2) \quad (2.2.в)$$

⁷ принятые обозначения см. в приложении 1 к статье.

Очевидно, что в целях упрощения моделирования моменты и произведения инерции неподдресоренных масс рациональнее приводить к центру пятна контакта колес с дорогой. В таком случае внешние силовые факторы, действующие на автомобиль со стороны дороги, будут приложены в точках, к которым приведены инерционные характеристики неподдресоренных масс, и появляется возможность избежать дополнительных вычислений, связанных с переносом внешних сил.

Для описания движения принятой расчетной модели как системы взаимосвязанных масс воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода в независимых координатах, которые в общем виде могут быть представлены следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (3)$$

Согласно выбранному в модели расположению осей координат (рис. 1.), кинетическая энергия поддресоренной массы:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \sum \delta m_j \cdot \left[(V_x + \dot{r} \cdot z_j - \dot{\psi} \cdot y_j)^2 + (V_y - \dot{p} \cdot z_j + \dot{\psi} \cdot x_j)^2 + (V_z - \dot{r} \cdot x_j + \dot{p} \cdot y_j)^2 \right] \quad (4)$$

С учетом шести обобщенных координат ($q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$, $q_4 = p$, $q_5 = r$, $q_6 = \psi$), характеризующих положение жесткого тела в пространстве, левые части уравнений Лагранжа для поддресоренной массы будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T_0}{\partial q_1} &= m_0 \cdot \left[\dot{V}_x - \dot{\psi} \cdot V_y + \dot{r} \cdot V_z - (\dot{\psi}^2 + \dot{r}^2) \cdot x_0 + (\dot{r} \cdot \dot{p} - \dot{\psi} \ddot{r}) \cdot y_0 + \right. \\ &\quad \left. + (\ddot{r} + \dot{\psi} \cdot \dot{p}) \cdot z_0 \right] \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T_0}{\partial q_2} &= m_0 \cdot \left[\dot{V}_y - \dot{p} \cdot V_z + \dot{\psi} \cdot V_x + (\dot{\psi} + \dot{p} \cdot \dot{r}) \cdot x_0 - (\dot{\psi}^2 + \dot{p}^2) \cdot y_0 + \right. \\ &\quad \left. + (\dot{\psi} \cdot \dot{r} - \ddot{p}) \cdot z_0 \right] \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_3} \right) - \frac{\partial T_0}{\partial q_3} &= m_0 \cdot \left[\dot{V}_z - \dot{r} \cdot V_x + \dot{p} \cdot V_y + (\dot{p} \cdot \dot{\psi} - \ddot{r}) \cdot x_0 + (\ddot{p} + \dot{r} \cdot \dot{\psi}) \cdot y_0 - \right. \\ &\quad \left. - (\dot{p}^2 + \dot{r}^2) \cdot z_0 \right] \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_4} \right) - \frac{\partial T_0}{\partial q_4} &= I_{x_0} \cdot \ddot{p} + (\dot{V}_z - \dot{r} \cdot V_x + \dot{p} \cdot V_y) \cdot m_0 \cdot y_0 + (\dot{p} \cdot V_z - \dot{V}_y - \dot{\psi} \cdot V_x) \cdot m_0 \cdot z_0 + \\ &\quad + (\dot{p} \cdot \dot{\psi} - \ddot{r}) \cdot P_{xy0} - (\dot{p} \cdot \dot{r} + \ddot{\psi}) \cdot P_{xz0} + (\dot{\psi}^2 - \dot{r}^2) \cdot P_{yz0} + \dot{r} \cdot \dot{\psi} \cdot (I_{z0} - I_{y0}) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_5} \right) - \frac{\partial T_0}{\partial q_5} &= I_{y_0} \cdot \ddot{r} + (\dot{r} \cdot V_x - \dot{p} \cdot V_y - \dot{V}_z) \cdot m_0 \cdot x_0 + (\dot{V}_x - \dot{\psi} \cdot V_y + \dot{r} \cdot V_z) \cdot m_0 \cdot z_0 - \\ &\quad - (\dot{\psi} \cdot \dot{r} + \ddot{p}) \cdot P_{xy0} + (\dot{p}^2 - \dot{\psi}^2) \cdot P_{xz0} + (\dot{r} \cdot \dot{p} - \dot{\psi} \ddot{r}) \cdot P_{yz0} + \dot{p} \cdot \dot{\psi} \cdot (I_{x0} - I_{z0}) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_6} \right) - \frac{\partial T_0}{\partial q_6} &= I_{z_0} \cdot \ddot{\psi} + (\dot{\psi} \cdot V_x + \dot{V}_y - \dot{p} \cdot V_z) \cdot m_0 \cdot x_0 + (\dot{\psi} \cdot V_y - \dot{r} \cdot V_z - \dot{V}_x) \cdot m_0 \cdot y_0 + \\ &\quad + (\dot{r}^2 - \dot{p}^2) \cdot P_{xy0} + (\dot{\psi} \cdot \dot{r} - \ddot{p}) \cdot P_{xz0} - (\dot{\psi} \cdot \dot{p} + \ddot{r}) \cdot P_{yz0} + \dot{p} \cdot \dot{r} \cdot (I_{y0} - I_{x0}) \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку подвижная система координат связана с поддресоренной массой, в целях определения кинетической энергии неподдресоренных масс требуется установить связи между скоростями перемещений поддресоренных и неподдресоренных масс, определяемые кинематическими характеристиками подвески, под которыми понимается отношение абсолютных скоростей перемещения неподдресоренных масс к скоростям поддресоренной массы в направлении возможных перемещений:

$$k_j^{q_i q'_i} = \frac{\partial q'_i}{\partial q_i} \quad (6)$$

Таким образом, перемещение каждой неподдресоренной массы определяется шестью кинематическими характеристиками подвески, соответствующими возможным перемещени-

ям в пространстве.

Абсолютные скорости элементарной неподрессоренной массы δm_j по направлению осей x, y, z найдем в соответствии с общими формулами (4):

$$\begin{aligned} \dot{x}'_j &= V_x + \dot{r} \cdot (z'_{j0} + k_j^{rz} \cdot r + k_j^{pz} \cdot p + k_j^{zz} \cdot z) - (\dot{\psi} + k_j^{z\psi} \cdot V_z - k_j^{p\psi} \cdot \dot{p} - k_j^{r\psi} \cdot \dot{r}) \cdot \\ &\cdot (y'_{j0} - k_j^{ry} \cdot r - k_j^{py} \cdot p - k_j^{zy} \cdot z) + k_j^{zx} \cdot V_z + k_j^{rx} \cdot \dot{r} + k_j^{px} \cdot \dot{p} \\ \dot{y}'_j &= V_y - (k_j^{pp} \cdot \dot{p} - k_j^{zp} \cdot V_z - k_j^{rp} \cdot \dot{r}) \cdot (z'_{j0} + k_j^{rz} \cdot r + k_j^{pz} \cdot p + k_j^{zz} \cdot z) + \\ &+ (\dot{\psi} + k_j^{z\psi} \cdot V_z - k_j^{p\psi} \cdot \dot{p} - k_j^{r\psi} \cdot \dot{r}) \cdot (x'_{j0} + k_j^{rx} \cdot r + k_j^{px} \cdot p + k_j^{zx} \cdot z) - k_j^{ry} \cdot \dot{r} - \\ &- k_j^{py} \cdot \dot{p} - k_j^{zy} \cdot V_z \\ \dot{z}'_j &= k_j^{zz} \cdot V_z + \dot{r} \cdot (x'_{j0} + k_j^{rx} \cdot r + k_j^{px} \cdot p + k_j^{zx} \cdot z) + (k_j^{pp} \cdot \dot{p} - k_j^{zp} \cdot V_z - k_j^{rp} \cdot \dot{r}) \cdot \\ &\cdot (y'_{j0} - k_j^{ry} \cdot r - k_j^{py} \cdot p - k_j^{zy} \cdot z) + k_j^{rz} \cdot \dot{r} \end{aligned} \quad (7)$$

Конечные формулы, определяющие законы движения поддрессоренных и неподрессоренных масс по каждой из координат, соответствующих степеням свободы, получаются путем дифференцирования общих формул (4) по соответствующим обобщенным координатам.

Очевидно, что если координаты неподрессоренных масс вычисляются путем пересчета координат поддрессоренных масс, не представляется возможным использовать их в качестве независимых переменных.

При разработке математической модели предлагается в качестве независимых переменных, описывающих влияние неподрессоренных масс на движение автомобиля, использовать эквивалентные силовые факторы, вводимые при «разрыве» подвески (рис. 2). Таким образом, эти переменные представляют собой внутренние силовые факторы, учитывающие инерцию неподрессоренных масс. Очевидно, что удобнее будет не вводить математическое описание подвески, поскольку в таком случае неизбежно возникнет усложнение модели из-за геометрического описания направляющего аппарата, а использовать приведенные к центру подвижной системы координат силовые факторы. Таким образом, на поддрессоренную массу по каждой из выбранных обобщенных координат действует один приведенный силовой фактор со стороны каждой из неподрессоренных масс. В свою очередь для определения силового фактора, действующего по обобщенной координате на неподрессоренную массу, необходимо пересчитать приведенные силы, приложенные в центре подвижных координат (с противоположным знаком), используя коэффициенты – кинематические характеристики подвески.

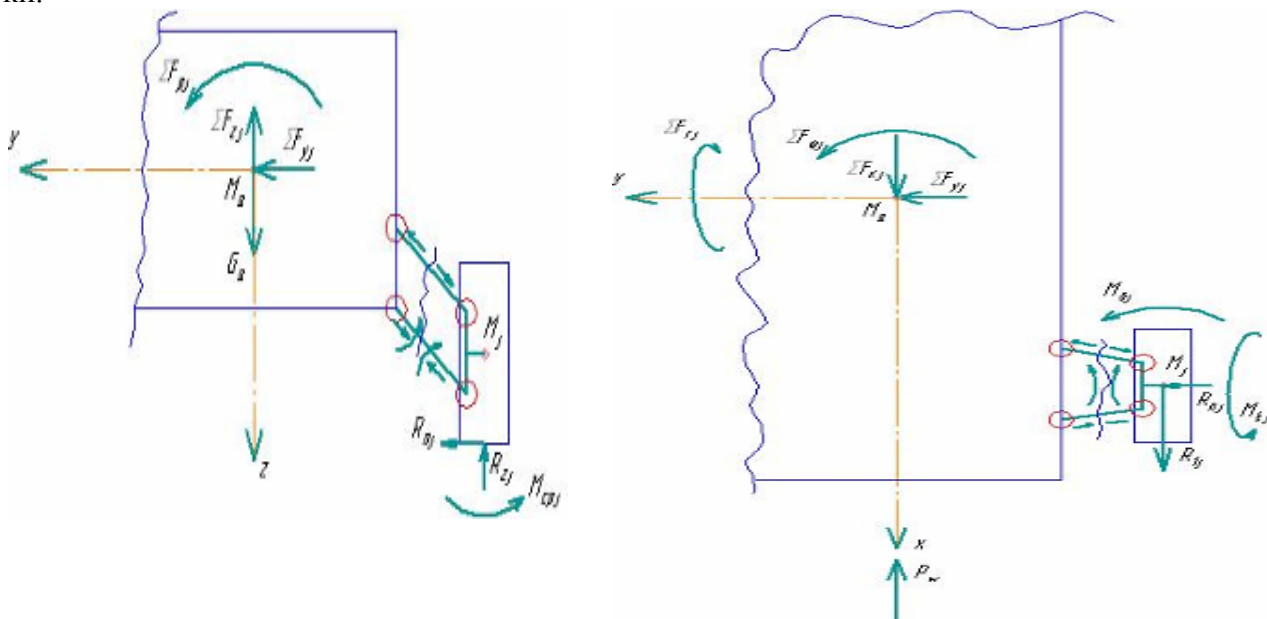


Рис. 2. Силовые факторы, возникающие при разрыве подвески.

Выводы

Предложенная методика вычисления моментов инерции составляющих систему масс в единой системе координат позволяет представить математическое описание движения объекта в виде системы уравнений, что повышает точность математического моделирования. Использование кинематических характеристик подвески дает возможность избежать сложного математического описания работы ее направляющих элементов.

Приложение 1.

Обозначения и индексация переменных, входящих в уравнения:

I_x, I_y, I_z – моменты инерции в первоначальной системе координат;

$I_{x'}, I_{y'}, I_{z'}$ – моменты инерции в новой системе координат;

x', y', z' – соответствующие смещения осей новой системы координат относительно первоначальной;

P_{xy}, P_{yz}, P_{xz} – произведения инерции в первоначальной системе координат;

$P_{x'y'}, P_{y'z'}, P_{x'z'}$ – произведения инерции в новой системе координат;

T – кинетическая энергия системы;

U – потенциальная энергия системы;

R – диссипативная функция Релея;

Q_i – обобщенная сила;

q_i – обобщенная координата;

\dot{q}_i – обобщенная скорость;

I_{x0}, I_{y0}, I_{z0} и $P_{xy0}, P_{xz0}, P_{yz0}$ – моменты инерции и произведения инерции поддрессоренной массы относительно осей x, y, z ;

x_0, y_0, z_0 – координаты центра поддрессоренной массы;

$V_x, V_y, V_z, \dot{p}, \dot{r}, \dot{\psi}$ – линейные и угловые скорости по соответствующим осям координат;

q_i – возможное перемещение поддрессоренной массы;

q'_i – возможное перемещение неподдрессоренной массы;

j – номер неподдрессоренной массы;

P_w – сила аэродинамического сопротивления;

R_{tj}, R_{nj}, R_{zj} – продольная (боковая, вертикальная) реакция j -го колеса;

F_{xj} – эквивалентный силовой фактор, вводимый при разрыве подвески, действующий в направлении соответствующей оси;

G_a – вес автомобиля;

M_a – обозначение центра масс автомобиля;

M_{kj} – крутящий момент j -го колеса;

$M_{\delta j}$ – момент сопротивления повороту j -го колеса;

$M_{срj}$ – момент сопротивления развалу j -го колеса.

Математическая модель качения эластичного колеса по деформируемому грунту

к.т.н., с.н.с. Чистов М.П., Наумов А.Н.
МГТУ «МАМИ», 21 НИИИ АТ МО РФ

Статья посвящена описанию взаимодействия эластичного колеса с деформируемым грунтом. В приведенной математической модели сделан ряд допущений, позво-