Выводы

Предложенная методика вычисления моментов инерции составляющих систему масс в единой системе координат позволяет представить математическое описание движения объекта в виде системы уравнений, что повышает точность математического моделирования. Использование кинематических характеристик подвески дает возможность избежать сложного математического описания работы ее направляющих элементов.

Приложение 1.

Обозначения и индексация переменных, входящих в уравнения:

I_x, I_y, I_z – моменты инерции в первоначальной системе координат;

$I_{x'}$, $I_{y'}$, $I_{z'}$ – моменты инерции в новой системе координат;

x', y', z' – соответствующие смещения осей новой системы координат относительно первоначальной;

P_{xy}, P_{yz}, P_{xz} – произведения инерции в первоначальной системе координат;

$P_{x'y'}$, $P_{y'z'}$, $P_{x'z'}$ – произведения инерции в новой системе координат;

T – кинетическая энергия системы;

U – потенциальная энергия системы;

R – диссипативная функция Релея;

Q_i – обобщенная сила;

q_i – обобщенная координата;

$\dot{q}_i$ – обобщенная скорость;

I_{x0}, I_{y0}, I_{z0} и P_{xy0}, P_{xz0}, P_{yz0} – моменты инерции и произведения инерции подрессоренной массы относительно осей x, y, z;

x_0, y_0, z_0 – координаты центра подрессоренной массы;

V_x, V_y, V_z, $\dot{p}$, $\dot{r}$, $\dot{\psi}$ – линейные и угловые скорости по соответствующим осям координат;

q_i – возможное перемещение подрессоренной массы;

q'_i – возможное перемещение неподрессоренной массы;

j – номер неподрессоренной массы;

P_w – сила аэродинамического сопротивления;

R_{tj}, R_{nj}, R_{zj} – продольная (боковая, вертикальная) реакция j-го колеса;

F_{xj} – эквивалентный силовой фактор, вводимый при разрыве подвески, действующий в направлении соответствующей оси;

G_a – вес автомобиля;

M_a – обозначение центра масс автомобиля;

M_{kj} – крутящий момент j-го колеса;

$M_{\delta j}$ – момент сопротивления повороту j-го колеса;

M_{cpj} – момент сопротивления развалу j-го колеса.

Математическая модель качения эластичного колеса по деформируемому грунту

к.т.н., с.н.с. Чистов М.П., Наумов А.Н.
МГТУ «МАМИ», 21 НИИИ АТ МО РФ

Статья посвящена описанию взаимодействия эластичного колеса с деформируемым грунтом. В приведенной математической модели сделан ряд допущений, позво-

ляющий значительно упростить соответствующие инженерные расчеты.

В общем случае взаимодействие колеса с полотном пути можно разделить на 3 части: механика поверхности движения, механика колеса и шины, механика взаимодействия колеса с дорожно-грунтовым основанием. Данная статья посвящена краткому описанию взаимодействия эластичного колеса с деформируемой поверхностью движения и получению основных формул, характеризующих этот процесс.

В результате взаимодействия колеса с поверхностью движения образуется соответствующая зона контакта, представляющая собой пространственную поверхность. С целью упрощения задачи рассмотрения процессов взаимодействия колеса с поверхностью движения предполагается, что контактные напряжения по ширине контакта постоянны. Таким образом, задача переходит из трехмерного пространства в двухмерное, т.е. от рассмотрения контактной поверхности, характеризуемой тремя координатами, переходят к рассмотрению контактной двухмерной линии.

Учитывая, что параметры грунта крайне нестабильны и могут изменяться в значительных диапазонах в течение дня, с целью снижения трудоемкости инженерных расчетов целесообразно использовать упрощенную форму контактной линии взаимодействия колеса с грунтом.

В математической модели качения одиночного эластичного колеса по деформируемому грунту, разработанной М.П. Чистовым совместно со специалистами 21 НИИИ АТ МО РФ [1], были приняты следующие допущения:

рассматриваемое равномерное качение по ровному горизонтальному участку грунта со скоростью около 1 м/сек.;

нормальное напряжение или давление в контакте колеса с грунтом определяется законами механики грунтов через глубину погружения элементов беговой дорожки колеса и распределяется равномерно по всей ширине контакта беговой дорожки;

положение и величина плоской зоны контакта определяется хордой экваториальной окружности шины с высотой сегмента, равной ее радиальному прогибу, а нормальное давление по всей площади этой зоны принимается равномерным;

криволинейная зона располагается от входа беговой дорожки в контакт с грунтом до плоской зоны и принимается цилиндрической формы со свободным радиусом колеса *r*;

изменение (увеличение) ширины шины в контакте с грунтом при ее прогибе вследствие незначительного влияния этого изменения на глубину погружения колеса в грунт для современных шин регулируемого давления с протектором высокой проходимости не учитывается;

увеличение глубины образуемой колеи при появлении горизонтальных сил (в зависимости от режима качения) определяется в функции поправки на буксование колеса;

расстояние от поверхности недеформируемого грунта до плоской зоны постоянна (глубина погружения колеса при качении) соответствует глубине образуемой колеи.

Схема качения эластичного колеса по деформируемому грунту представлена на рис. 1, где: H – глубина колеи, $z_ш$ – прогиб шины, $B_к$ – ширина беговой дорожки колеса.

Криволинейная зона контактной линии располагается от входа беговой дорожки в контакт с поверхностью движения и принимается цилиндрической формы со свободным радиусом колеса r.

Расстояние от поверхности недеформируемого грунта до плоской зоны контакта равно глубине образуемой колеи Н.

По теореме Пифагора длина плоской части контактной линии:

$$l_h = 2\sqrt{2rz_ш - z_ш^2}\,. \qquad (1)$$

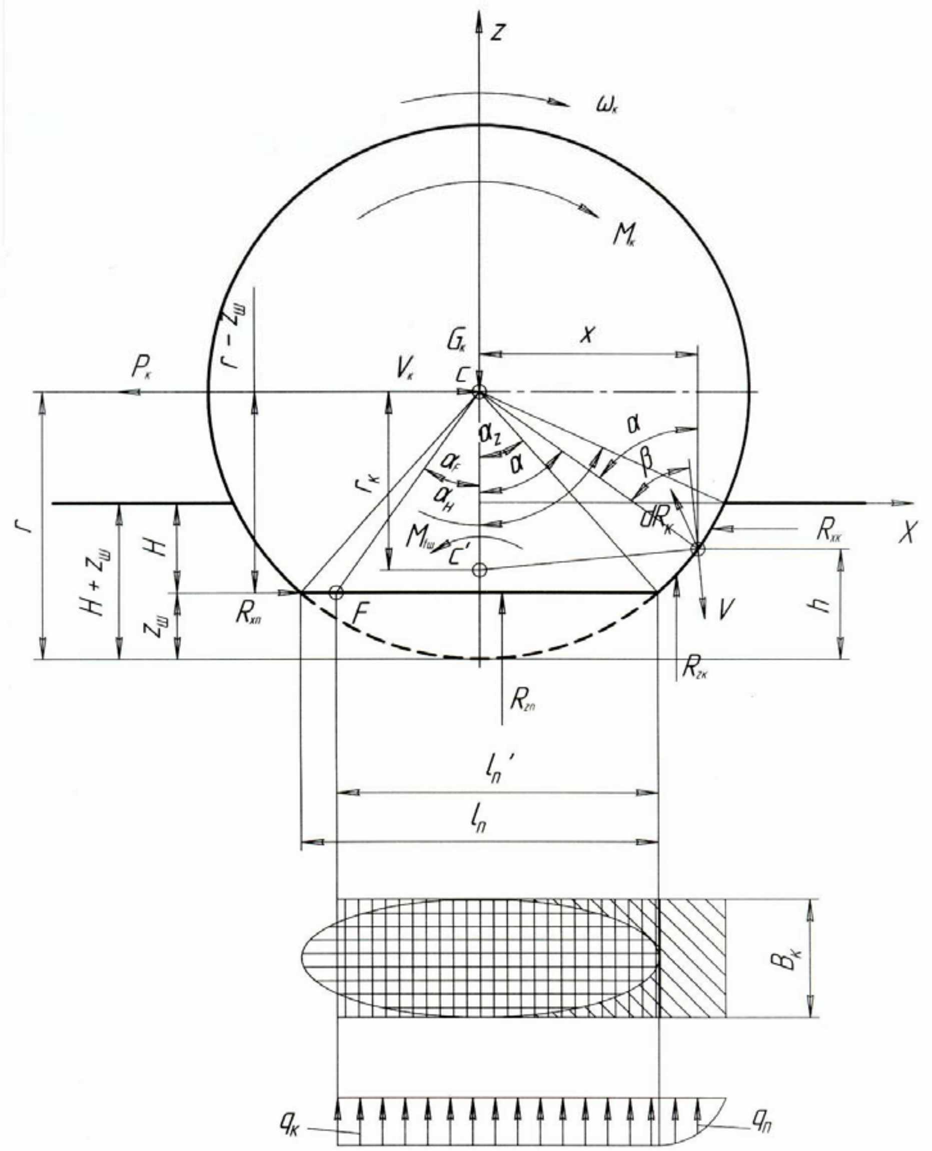

Рис. 1. Расчетная схема движения эластичного колеса по деформируемой поверхности движения при $r_к \le r_{к0}$

Исходная зависимость, уточняющая общеизвестное уравнение М.Н.Летошнева по определению вертикального давления в контакте колеса с грунтом через коэффициент k_q снижения нормального удельного сопротивления грунта вдавливания на глубину Нр от скольжения, выглядит следующим образом:

$$q = 10^{2\mu} k_q p_г \left(\frac{H + z_ш - h}{H_p} \right)^{\mu}, \qquad (2)$$

где: $p_г$ – удельное сопротивление грунта смятию колесом на глубину Hp;

μ – степенной коэффициент изменения указанного сопротивления по глубине вдавливания;

Hp = 0,01 м – глубина погружения штампа, определяющая удельное сопротивление грунта смятию $p_г$.

Из анализа результатов экспериментальных исследований качения колесных движителей по деформируемым грунтам для указанного поправочного коэффициента предлагается эмпирическое выражение:

$$k_q = 1 - th\left(0{,}8 s_б'\right). \qquad (3)$$

При $s_б^{'} > 0$ ($r_к < r_{к0}$) $$s_б^{'} = s_б = \frac{r_{к0} - r_к}{r_{к0}} \quad (4)$$

При $s_б^{'} < 0$ ($r_к > r_{к0}$) $$s_б^{'} = \frac{r_к - r_{к0}}{r_к} \quad (5)$$

В формулах (4) и (5) $r_{к0}$ - радиус качения без буксования, $r_к$ - радиус качения в текущем режиме.

Радиус качения эластичного колеса без буксования:

$$r_{к0} = \frac{\sqrt{2r \cdot z_ш - z_ш^2}}{\arcsin \dfrac{\sqrt{2r \cdot z_ш - z_ш^2}}{r}}. \quad (6)$$

С учетом принятой расчетной схемы (рис. 1) и допущениями вертикальная реакция в криволинейной части контактной линии

$$R_{zк} = \int_{z_ш}^{H+z_ш} dR_{zк} = \int_{z_ш}^{H+z_ш} qB_к dx. \quad (7)$$

В плоской зоне $q_n = const$ и $R_{zn} = q_n \cdot F_n$, где F_n - площадь плоской зоны контакта.

Условие равновесия вертикальных сил, действующих на колесо:

$$G_к = R_z, \; R_z = R_{zк} + R_{zn} \quad (8)$$

$$R_{zк} = 10^{2\mu} k_q p_г B_к \left[\int_{z_ш}^{H+z_ш} \left(\frac{H + z_ш - h}{H_p} \right)^{\mu} \frac{r - h}{\sqrt{2rh - h^2}} dh \right], \quad (9)$$

$$R_{zn} = 10^{2\mu} k_q p_г F_n \left(\frac{H}{H_p} \right)^{\mu}. \quad (10)$$

С учетом выражений (9) и (10) уравнение (8) можно записать в виде:

$$G_к - 10^{2\mu} k_q p_г \left[B_к \int_{z_ш}^{H+z_ш} \left(\frac{H + z_ш - h}{H_p} \right)^{\mu} \frac{r - h}{\sqrt{2rh - h^2}} dh + \left(\frac{H}{H_p} \right)^{\mu} F_n \right] = 0. \quad (11)$$

Площадь плоской зоны контакта:

$$F_n = (2 - 0{,}215 k_F) B_к \sqrt{2rz_ш - z_ш^2}, \quad (12)$$

где k_F – поправочный коэффициент площади отпечатка шин, который может быть выражен зависимостью:

$$k_F = \frac{r - 0{,}5d}{2r_{пр}}, \quad (13)$$

где: d – посадочный диаметр шины,

$r_{пр}$ – радиус кривизны профиля беговой дорожки шины.

В полученном уравнении (11), если задаваться пробуксовкой $s_б$, остаются два неизвестных: Н и $z_ш$.

Для их определения необходимо составить второе уравнение, которое можно получить из выражения вертикальной реакции в плоской зоне и радиального прогиба $z_ш$:

$$z_ш = \frac{R_{zn}}{c_ш}, \quad (14)$$

$$c_ш z_ш - 10^{2\mu} k_q p_г \left(\frac{H}{H_p} \right)^{\mu} F_n = 0. \quad (15)$$

Значения текущей радиальной жесткости шин в функции давления воздуха $p_в$ [5]:

$$c_ш = K_1 \cdot th\left[K_2\left(K_3 + p_в\right)\right], \tag{16}$$

где: K_1, K_2, K_3 – коэффициенты уравнения регрессии,

$p_в$ – давление воздуха в шине.

Полученные уравнения (11) и (15) позволяют по вертикальной нагрузке на колесо определить глубину образуемой колеи H и прогиб шины $z_ш$ с учетом влияния на них продольных сил (через пробуксовку колес) и давления воздуха в шинах. На базе указанных уравнений можно вывести формулы для определения продольных сил, а также крутящего момента и сопротивления качению колеса при его взаимодействии с грунтом.

Для нахождения продольных сил целесообразно воспользоваться известным из механики грунтов законом Кулона, который с уточнениями Я.С. Агейкина [2, 4] по коэффициентам насыщенности и очищаемости протектора, а также с учетом среза грунта торцевыми ребрами грунтозацепов выглядит следующим образом:

$$\tau_{\max} = \left[k_H k_ш + \left(1 - k_H\right) tg\varphi_0\right]\sigma + c_0 k_0 \left[\left(1 - k_H\right) + 2\left(1 - k_{HT}\right)\frac{F_T}{F_Д}\right], \tag{17}$$

здесь: k_H, k_0 – коэффициенты насыщенности и очищаемости протектора,

$k_ш$ – коэффициент трения материала шины о грунт,

φ_0 и c_0 – угол внутреннего трения и удельного сцепления грунта,

k_{HT} – коэффициент насыщенности протектора по торцу шины,

F_T и $F_Д$ – площади торца (бокового кольца шины) по высоте боковых ребер грунтозацепов и беговой дорожки шины в контакте с грунтом.

Для упрощения формул примем:

$$k_H k_ш + \left(1 - k_H\right) tg\varphi_0 = tg\psi, \tag{18}$$

$$c_0 k_0 \left[\left(1 - k_H\right) + 2\left(1 - k_{HT}\right)\frac{F_T}{F_Д}\right] = k_c. \tag{19}$$

В уравнениях (17) и (19)

$$k_{HT} \approx \frac{l_{TГ}}{l_Г}, \tag{20}$$

$$F_T \approx 2\pi r h_{TГ}, \; F_Д \approx 2\pi r B_к, \tag{21}$$

где: $h_{TГ}$, $l_Г$ и $l_{TГ}$ - высота грунтозацепов в торце, его шаг и ширина посередине высоты.

С учетом вышеизложенного формула (19) примет вид:

$$k_c = c_0 k_0 \left[\left(1 - k_H\right) + r\left(1 - \frac{l_{TГ}}{l_Г}\right)\frac{h_{TГ}}{B_к}\right]. \tag{22}$$

Таким образом, получена возможность определения максимального по сцеплению тангенциального напряжения $\tau_{\max}$, с помощью которого через накопленный сдвиг и относительный сдвиг можно определить развиваемую колесом максимальную силу тяги. Однако как максимальное, так и текущее значение τ зависит от относительного сдвига $X_{сд}$ элементов беговой дорожки, а при $X_{сд} = 0 \;\; \tau = 0$.

Для выражения текущих значений τ через закон Кулона и соответствующий сдвиг можно воспользоваться методом интерполяции сплайнами кривой $\tau\left(X_{сд}\right)$. При этом использование кубических сплайнов позволяет получить максимальное приближение рассматриваемой функции к экспериментальной с обеспечением упомянутых выше условий. В общем виде эта функция выражена как

$$\tau = \sigma tg\psi A(X_{сд}) + k_c B(X_{сд}), \tag{23}$$

$$A(X_{сд}) = \begin{cases} 0{,}4\left(1-\left|\dfrac{X_{сд}}{s_{бт}}\right|\right)^3 - 1{,}4\left(1-\left|\dfrac{X_{сд}}{s_{бт}}\right|\right)^2 + 1 & при \quad X_{сд} < s_б \\ 1 \quad при \quad s_{бт} \le X_{сд} \le 1 \end{cases}, \tag{24}$$

$$B(X_{сд}) = \begin{cases} A(X_{сд}) \quad при \quad |X_{сд}| \le |s_{бт}| \\ \dfrac{3(1-|X_{сд}|)^2}{(1-|X_{сд}|)^2} - \dfrac{2(1-|X_{сд}|)^3}{(1-|X_{сд}|)^3} \quad при \quad s_{бт} \le X_{сд} \le 1. \\ 0 \quad при \quad X_{сд} > 1 \end{cases} \tag{25}$$

К криволинейной зоне контакта $\sigma \equiv dR_r$ и $\tau \equiv dR_T$. Соотношение (23) примет вид:

$$dR_T = dR_r tg\psi \cdot A(X_{сд}) + k_c B(X_{сд}) r B_к d\alpha. \tag{26}$$

Учитывая, что $dR_{zк} = dR_r \cos\alpha + dR_T \sin\alpha$, получим выражение для определения элементарной радиальной составляющей:

$$dR_r = \frac{dR_{zк} - k_c B(X_{сд}) r B_к \sin\alpha d\alpha}{\cos\alpha + tg\psi \cdot \sin\alpha \cdot A(X_{сд})}. \tag{27}$$

Тогда $$dR_T = \frac{(dR_{zк} - k_c B(X_{сд}) r B_к \sin\alpha d\alpha) tg\psi \cdot A(X_{сд})}{\cos\alpha + tg\psi \cdot \sin\alpha \cdot A(X_{сд})} + k_c B(X_{сд}) r B_к d\alpha \tag{28}$$

Принимая во внимание, что $dR_{xк} = dR_T \cos\alpha - dR_r \sin\alpha$, получим:

$$dR_{xк} = \frac{(dR_{zк} - k_c B(X_{сд}) r B_к \sin\alpha d\alpha)(tg\psi \cdot \cos A(X_{сд}) - \sin\alpha)}{\cos\alpha + tg\psi \cdot A(X_{сд})} + k_c B(X_{сд}) r B_к \cos d\alpha. \tag{29}$$

В плоской зоне контакта в соответствии с принятыми допущениями и расчетной схемой нормальное давление в контакте:

$$\sigma = q_{zп} = 10^{2\mu} k_q p_г \left(\frac{H}{H_р}\right)^{\mu} = \frac{c_ш z_ш}{F_п} = const. \tag{30}$$

Из уравнения (26)

$$dR_{xп} = [q_{zп} tg\psi \cdot A(X_{сдп}) + k_c B(X_{сдп})] r B_к d\alpha. \tag{31}$$

Из полученных уравнений можно получить суммарную продольную силу (реакцию) в контакте колеса с поверхностью движения:

$$P_к = R_x = R_{xк} + R_{xп}. \tag{32}$$

При этом положительные значения суммарной продольной реакции R_x соответствуют развиваемой колесом при соответствующем буксовании силе тяги $P_к$ и отрицательные - толкающей силе.

Значения крутящего момента на колесе будут складываться из моментов от элементарных вертикальных сил dR_z с соответствующим им плечом по оси X в криволинейной $M_{Rzк}$ и плоской $M_{Rzп}$ зонах, от горизонтальных (продольных) элементарных сил dR_x с плечом по оси *Z*, а также момента сопротивлению шин.

$$M_к = M_{Rzк} + M_{Rzп} + M_{Rxк} + M_{Rxп} + M_{fш}. \tag{33}$$

Составляющие крутящего момента можно выразить следующим образом:

$$M_{Rzк} = r\int_{\alpha_z}^{\alpha_F} dR_{zк} \sin\alpha, \tag{34}$$

$$M_{Rxк} = r\int_{\alpha_z}^{\alpha_F} dR_{xк} \cos\alpha, \tag{35}$$

$$M_{Rxn} = R_{xn}(r - z_ш), \tag{36}$$

$$M_{Rzn} = \frac{c_ш z_ш}{F_n} \cdot \Delta F_n x_{\Delta F}, \tag{37}$$

$$M_{fш} = f_{шH} c_{шH} z_ш (r - z_ш). \tag{38}$$

В уравнении (38) $f_{шH}$ и $c_{шH}$ - коэффициенты сопротивления качению и радиальные жесткость с номинальным значением давления воздуха в шине,

$$x_{\Delta F} = \frac{1.785}{2}\sqrt{2rz_ш - z_ш^2}, \ \Delta F_n = 0.215\sqrt{2rz_ш - z_ш^2} B_к.$$

Полученное математическое описание процесса прямолинейного качения эластичного колеса по деформируемому грунту при известных нагрузочных и размерных параметрах колеса, показателях жесткостных характеристик и характеристик протектора его эластичной шины, а также механических параметрах грунта, позволяет расчетным путем определять все показатели этого качения, например, в функции буксования колеса.

Так, коэффициент сопротивления качению колеса можно получить по следующим формулам [3]:

$$P_{fк} = \frac{M_{кα} - P_к α \cdot r_к}{α \cdot r_к} = \frac{M_к}{r_к} - P_к, \tag{39}$$

$$f_к = \frac{\frac{M_к}{r_к} - P_к}{R_z} = \frac{P_{fк}}{R_z} = \frac{P_{fг} + P_{fш}}{R_z} = f_{гк} + f_ш. \tag{40}$$

Из выражений, описывающих качение одиночного колеса, можно вывести математическую модель движения автомобиля.

Экспериментальные исследования с определением показателей качения эластичного колеса по деформируемой поверхности движения, проведенные в 21 НИИИ АТ МО РФ, подтверждают корректность вышеуказанных выражений и свидетельствуют о возможности их использования при построении математической модели прямолинейного движения автомобиля.

Литература

1. ВЧ 63539 «Исследование путей повышения проходимости армейских многоцелевых автомобилей по деформируемым грунтам», отчет о НИР, 1997 г., инв. № 7869
2. Агейкин Я.С. Проходимость автомобилей. – М.: Машиностроение, 1981, 232 с.
3. Фалькевич Б.С. Теория автомобиля. – М.: Машиностроение, 1963, 239 с.
4. Барахтанов Л.В., Беляков В.В., Кравец В.Н. Проходимость автомобиля. – Н. Новгород, Нижегородский гос. техн. ун-т., 1996, 200 с.
5. Чистов М.П., Коваленко А.Н. Расчетное определение некоторых характеристик автомобильных шин. Рукопись депон. В НИИИавтопрома 14.12.84 № 1127 ап -84 ДЕП. 1984, 12с.

Технологическое решение проблемы эксплуатационного дисбаланса гибких роторов турбоагрегатов

к.т.н. Корнеев Н.В.
МГТУ «МАМИ»

В статье рассмотрены основные принципы и разработана новая технология вибростабилизации гибких роторов турбоагрегатов. Разработан и создан уникальный стенд для вибростабилизации. Приведены результаты экспериментальных исследований.

Стабильность геометрии ротора, т.е. неизменность его геометрии в процессе эксплуатации, существенно влияет на его эксплуатационный дисбаланс и определяется множеством факторов, среди которых важную роль играют внутренние напряжения в его конструкции