

РАЗДЕЛ 3. ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

Эластика Эйлера и ее приложения

д.т.н., проф. Мартынов В.К.
МГТУ «МАМИ»

Эластика Эйлера – это кривая на поверхности отрицательной гауссовой кривизны. Уравнение элаستيку используется в практике инженерных расчетов для большого класса задач, когда необходимо описать поведение деформируемого упругого тела под нагрузкой при наличии больших смещений от начального состояния, а применение формул сопротивления материалов или теории упругости приводит к существенным погрешностям. Таково, например, описание поведения продольно сжатого стержня за пределом потери устойчивости, описание траектории движения стального каната при огибании им блоков в подъемных механизмах, описание деформированного состояния упругих элементов приборов и др.

Уравнение элаستيку Эйлера является частным случаем более полного нелинейного дифференциального уравнения синус-Гордона. Имеет решение в эллиптических интегралах. Благодаря особенностям граничных условий допускает солитонное решение.

Одной из первых работ по применению уравнения элаستيку Эйлера в инженерной практике явилась статья Н.М. Огибалова, А.Л. Рабиновича, Н.М. Федотова [1], позднее, которая цитировалась без изменений в ряде публикаций, например [2], а примененный к решению подход использовался также при описании поведения ремня в ременных передачах. Однако трудности использования результатов в эллиптических интегралах в расчетной практике заставляли искать приближенные методы и упрощение конечных формул, которые не всегда адекватно освещали истинное поведение рассматриваемой модели. В качестве примера из работы [2] приведем результат решения задачи об оценке величины отклонения e стального каната от огибаемого им блока радиуса r под натяжением силой F :

$$e = \frac{r}{2 \cdot k^2 \cdot (k^2 - 1)} \quad (1)$$

$$\text{где: } k^2 = \frac{2 \cdot F \cdot r^2}{E \cdot I}; \quad (2)$$

E - модуль упругости троса при изгибе;

I – момент инерции его поперечного сечения.

Очевидно, что при $k^2 \rightarrow 1$, т.е. $E \cdot I = 2 \cdot F \cdot r^2$, что может быть реально осуществлено, имеем абсурдный результат $e \rightarrow \infty$. Рассмотрим подробнее эту же задачу, принимая за основу иные, чем в работе [1], углы, которые показаны на расчетной схеме рис. 1.

Поместим начало прямоугольных координат в точку касания канатом блока (рис. 1).

В любой точке, расположенной на канате на расстоянии S , угол наклона касательной Θ измеряется по отношению к направлению линии действия силы F . Для бесконечно малого элемента dS имеем:

$$\frac{dx}{dS} = \cos \Theta; \quad \frac{dy}{dS} = \sin \Theta \quad (3)$$

кривизну

$$\chi = \frac{1}{\rho} = \frac{d\Theta}{dS} \quad (4)$$

В начале координат угол Θ равен углу жесткости Θ_0 .

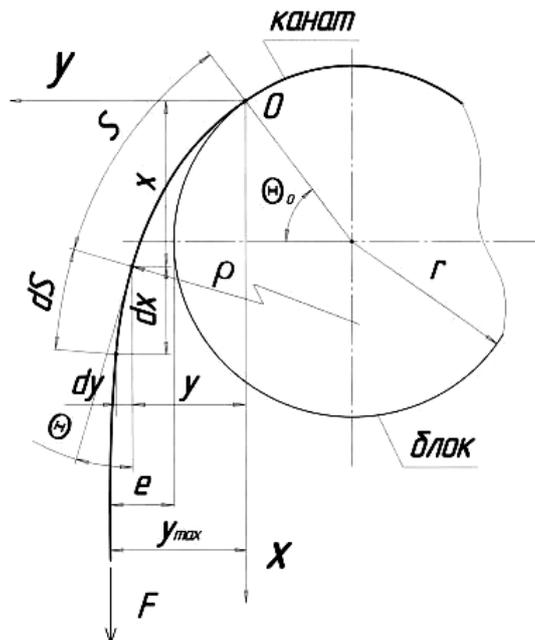


Рис. 1. Модель огибания стальным канатом блока.

Элементарный момент упругих сил для рассматриваемого элемента

$$dM = -E \cdot I \cdot \left[\left(\frac{\partial \Theta}{\partial S} \right)_{s+ds} - \left(\frac{\partial \Theta}{\partial S} \right)_s \right].$$

Применяя теорему Лагранжа о среднем значении, получим

$$dM = -E \cdot I \cdot \frac{d^2 \Theta}{dS^2} \cdot dS \tag{5}$$

Тот же момент от действия силы F определится в виде:

$$dM = -F \cdot dy \tag{6}$$

Знак минус принят исходя из реальности условий задачи. Действительно, проинтегрировав (6), получим

$$M = -F \cdot y + K.$$

Постоянную K найдем при $y = 0$, когда $M = \frac{E \cdot I}{r}$, т.е. $K = \frac{E \cdot I}{r}$.

В итоге

$$M = \frac{E \cdot I}{r} - F \cdot y, \tag{7}$$

что соответствует реальному понижению величины момента силы при увеличении y .

В предельном случае, т.е. на линии действия самой силы F , когда $y = y_{\max}$, имеем $M = 0$. Откуда следует

$$y_{\max} = \frac{E \cdot I}{F \cdot r} \tag{8}$$

что совпадает с условием равновесия.

Объединяя уравнения (5) и (6), имеем

$$\frac{d^2 \Theta}{dS^2} = \frac{F}{E \cdot I} \cdot \frac{dy}{dS},$$

или с учетом (3), обозначив

$$\lambda^2 = \frac{F}{E \cdot I}, \quad (9)$$

получаем уравнение эластики Эйлера:

$$\frac{d^2\Theta}{dS^2} = \lambda^2 \cdot \sin \Theta. \quad (10)$$

Для его решения перепишем уравнение в виде:

$$\frac{d\left(\frac{d\Theta}{dS}\right)}{dS} = \lambda^2 \cdot \frac{dy}{dS},$$

что приводит к выражению

$$d\left(\frac{d\Theta}{dS}\right) = \lambda^2 \cdot dy,$$

которое можно проинтегрировать.

При этом необходимо учесть знак минус у постоянной первого интегрирования $-C_1$, так как только в этом случае будем иметь уменьшение кривизны при возрастании y :

$$\frac{d\Theta}{dS} = \lambda^2 \cdot y - C_1.$$

Постоянную C_1 найдем из начальных условий: $y = 0$; $\frac{d\Theta}{dS} = \frac{1}{r}$, что дает $C_1 = -\frac{1}{r}$.

В итоге

$$\frac{d\Theta}{dS} = \lambda^2 \cdot y - \frac{1}{r}. \quad (11)$$

С учетом (3) это можно представить как

$$\frac{\sin \Theta \cdot d\Theta}{dy} = \lambda^2 y - \frac{1}{r}.$$

Проинтегрировав повторно, имеем

$$\cos \Theta = \frac{y}{r} - \lambda^2 \cdot \frac{y^2}{2} + C_2.$$

При условии $y = 0$; $\Theta = \Theta_0$ постоянную интегрирования C_2 найдем в виде:

$$C_2 = \cos \Theta_0.$$

Окончательно

$$\cos \Theta - \cos \Theta_0 = \frac{y}{r} - \lambda^2 \cdot \frac{y^2}{2}. \quad (12)$$

Если в полученное выражение подставить значение $y = y_{\max}$ по формуле (8), соответствующее $\Theta = 0$, то получим известное уравнение

$$1 - \cos \Theta_0 = 2 \cdot \sin^2 \frac{\Theta_0}{2} = \frac{E \cdot I}{2 \cdot F \cdot r^2} = \frac{1}{2 \cdot \lambda^2 \cdot r^2}. \quad (13)$$

которое при малых Θ представляют в виде:

$$\Theta_0 \approx \sqrt{\frac{E \cdot I}{F \cdot r^2}} = \frac{1}{\lambda \cdot r}. \quad (14)$$

Объединяя уравнения (11) и (12), результат переписем в виде:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\lambda \cdot r} - \lambda \cdot y \right)^2 = 1 - \cos \Theta = 2 \cdot \sin^2 \frac{\Theta}{2}$$

или

$$y = \frac{1}{\lambda^2 \cdot r} - \frac{2}{\lambda} \cdot \sin \frac{\Theta}{2}. \quad (15)$$

Подставив полученное выражение в (11), имеем:

$$\frac{d\Theta}{dS} = -2 \cdot \lambda \cdot \sin \frac{\Theta}{2}$$

или

$$\frac{d\left(\frac{\Theta}{2}\right)}{\sin \frac{\Theta}{2}} = -\lambda \cdot dS.$$

Интегрируя, получим

$$\ln \left(\operatorname{tg} \frac{\Theta}{4} \right) = -\lambda \cdot S + C_3.$$

При $S = 0$, $\Theta = \Theta_0$, что определяет

$$C_3 = \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\Theta_0}{4} \right).$$

В итоге это дает известное солитонное решение эластики Эйлера –

$$\operatorname{tg} \frac{\Theta}{4} = \operatorname{tg} \frac{\Theta_0}{4} \cdot e^{-\lambda \cdot S}. \quad (16)$$

При малых Θ имеем:

$$\Theta \approx \Theta_0 \cdot e^{-\lambda \cdot S} = \frac{1}{\lambda \cdot r \cdot e^{\lambda \cdot S}}. \quad (17)$$

Вернемся к решению задачи, сформулированной в начале текста, т.е. к нахождению отклонения e (рис. 1) стального каната от огибаемого им блока. Предварительно переписем для сравнения уравнения (1) и (2) в принятых обозначениях:

$$k^2 = \frac{2 \cdot F \cdot r^2}{E \cdot I} = 2 \cdot \lambda^2 \cdot r^2;$$

$$e = \frac{r}{2 \cdot k^2 \cdot (k^2 - 1)} = \frac{1}{4 \cdot \lambda^2 \cdot r \cdot (2 \cdot \lambda^2 \cdot r^2 - 1)}.$$

Как следует из рис. 1,

$$e = y_{\max} - r \cdot (1 - \cos \Theta_0)$$

или с использованием уравнений (8) и (13)

$$e = \frac{E \cdot I}{2 \cdot F \cdot r} = \frac{y_{\max}}{2} = \frac{1}{2 \cdot \lambda^2 \cdot r}. \quad (18)$$

Как видим, сравниваемые результаты различны, причем даже при $2 \cdot \lambda^2 \cdot r^2 = 1$, когда отклонение e в первом случае стремится к бесконечности, в действительности, более реальной, оно достигает во втором случае лишь значения r .

Полученные выше формулы позволяют решить задачу и о связи натяжений ведущей F_1 и ведомой F_2 ветвей ременной передачи, имеющих место при передаче момента нагрузки с начальным значением на холостом ходу F_0 при условии сохранения постоянства межцентрового расстояния a между шкивами, когда нарушается справедливость известного уравнения Понселе

$$F_1 + F_2 = 2 \cdot F_0, \quad (19)$$

отмеченная на практике.

Ограничимся приближенным решением, считая малыми углы Θ . Предварительно рассмотрим различие длины ветви l между шкивами и ее проекции на ось координат, считая, что при $S = \frac{l}{2}$ $\Theta = 0$. Расчетная модель в этом случае, сохраняется прежней с той лишь разницей, что вместо блока имеем шкив, вместо каната – ремень. Для элементарного участка dS разность длины и проекции на ось координат составит $d\Delta$:

$$d\Delta = dS - dx = dS \cdot \left(1 - \frac{dx}{dS}\right) = dS \cdot (1 - \cos \Theta) = 2 \cdot dS \cdot \sin^2 \frac{\Theta}{2} \approx dS \cdot \frac{\Theta^2}{2}. \quad (20)$$

Используя уравнение (17), после интегрирования получаем:

$$\Delta = -\frac{e^{-2\lambda \cdot S}}{4 \cdot \lambda^3 \cdot r^2} + C_4.$$

При $S = 0$ $\Delta = 0$, т.е. $C_4 = \frac{1}{4 \cdot \lambda^3 \cdot r^2}$.

В итоге разность половины длины ветви и ее проекции на ось координат составит

$$\Delta = \frac{1}{4 \cdot \lambda^3 \cdot r^2} \cdot (1 - e^{-2\lambda \cdot S}) \text{ при } 0 \leq S \leq \frac{l}{2}.$$

Пренебрегая малой величиной $e^{-2\lambda \cdot S}$, для всей ветви имеем:

$$\Delta_{\text{в}} = 2 \cdot \Delta \approx \frac{1}{2 \cdot \lambda^3 \cdot r^2} = \frac{(E \cdot I)^{\frac{3}{2}}}{2 \cdot r^2} \cdot F^{-\frac{3}{2}}. \quad (21)$$

Под нагрузкой в ременной передаче ведущая ветвь, натягиваясь силой F_1 и распрямляясь от начального положения, укорачивается по сравнению с ним на $-\delta_{\text{в1}}$, т.е.

$$-\delta_{\text{в1}} = \frac{(E \cdot I)^{\frac{3}{2}}}{2 \cdot r^2} \cdot \left(F_1^{-\frac{3}{2}} - F_0^{-\frac{3}{2}}\right).$$

Ведомая ветвь увеличивает свою кривизну, за счет чего снижается начальное натяжение F_0 до значения F_2 , а длина ветви увеличивается на $+\delta_{\text{в2}}$ -

$$+\delta_{\text{в2}} = \frac{(E \cdot I)^{\frac{3}{2}}}{2 \cdot r^2} \cdot \left(F_2^{-\frac{3}{2}} - F_0^{-\frac{3}{2}}\right).$$

При сохранении постоянства полной длины ремня в контуре передачи приращения

длин ветвей должны быть равны. Откуда следует

$$F_0^{-\frac{3}{2}} - F_1^{-\frac{3}{2}} = F_2^{-\frac{3}{2}} - F_0^{-\frac{3}{2}}.$$

В итоге получаем скорректированное для передач с $a = \text{const}$ уравнение Понселе в виде:

$$F_1^{-\frac{3}{2}} + F_2^{-\frac{3}{2}} = 2 \cdot F_0^{-\frac{3}{2}}. \quad (22)$$

Оно совпадает с ранее полученным в работе [3], нашедшем надлежащее экспериментальное подтверждение.

Рассмотренная теория является приближенной. Однако она приводит к точному уравнению эластики Эйлера (уравнение (10)) и ее солитонному решению (уравнение (16)), исключает результаты решения в эллиптических интегралах. Последние будут иметь место при известном точном решении в натуральных координатах $\Theta; S$. Полученные же результаты значительно проще, к тому же они дают достаточную для инженерных расчетов точность.

Литература

1. Огибалов П.М., Рабинович А.Л., Федотов Н.М. О силах взаимодействия между тросом и шкивом. // Прикладная математика и механика, т. 3, вып. 3, АН СССР, 1939 (новая серия), с. 111 -124;
2. Куровский Ф.М. Теория плоских механизмов с гибкими звеньями. М., МАШГИЗ, 1963, 204 с.;
3. Мартынов В.К. Прикладная теория передач трением гибкой связью. // Проблемы машиностроения и автоматизации, 1993, с. 71-80;

Конечные прогибы круговых цилиндрических оболочек перед потерей устойчивости под действием равномерного внешнего давления

к.т.н., проф. Матвеев Е.А., Фролов А.Б.
МГТУ «МАМИ»

Для описания осесимметричного деформирования круговой цилиндрической оболочки под действием равномерного поперечного давления или находящейся в условиях всестороннего сжатия равномерным давлением используются уравнения Маргерра. Рассмотрено опирание и заделка оболочки на опорных контурах при условиях их свободного осевого смещения или его отсутствия. Для рассматриваемых краевых задач получено аналитическое решение в элементарных функциях и построена основная ветвь нагружения оболочки.

1. Введение.

Для описания процесса деформирования и последующей потери устойчивости пологих цилиндрических оболочек долгое время применяли геометрически нелинейные уравнения, в основном уравнения Маргерра для пологих оболочек [1, 2]. По-видимому, тот факт, что цилиндрическая оболочка теряет устойчивость с волнообразованием по окружности, явился причиной того, что при использовании таких уравнений основное внимание уделялось описанию явления неосесимметричной потери устойчивости, без выделения осесимметричного деформирования до потери устойчивости в отдельный этап. В результате возможность получения аналитического решения уравнений Маргерра, описывающих осесимметричное деформирование оболочки до её неосесимметричной потери устойчивости, оказалось за пределами внимания исследователей. Настоящая работа частично восполняет этот пробел.

2. Постановка задачи.

При описании деформаций срединной поверхности полой круговой цилиндрической оболочки конечного прогиба (см. рис. 1) учитывается квадрат углов поворота нормали.

Известные из курса теории пластин и оболочек деформационные соотношения с использованием закона Гука после применения принципа Лагранжа дают уравнения равновесия для нагруженной оболочки, являющиеся осесимметричным вариантом уравнений Мар-