

длин ветвей должны быть равны. Откуда следует

$$F_0^{-\frac{3}{2}} - F_1^{-\frac{3}{2}} = F_2^{-\frac{3}{2}} - F_0^{-\frac{3}{2}}.$$

В итоге получаем скорректированное для передач с $a = \text{const}$ уравнение Понселе в виде:

$$F_1^{-\frac{3}{2}} + F_2^{-\frac{3}{2}} = 2 \cdot F_0^{-\frac{3}{2}}. \quad (22)$$

Оно совпадает с ранее полученным в работе [3], нашедшем надлежащее экспериментальное подтверждение.

Рассмотренная теория является приближенной. Однако она приводит к точному уравнению эластики Эйлера (уравнение (10)) и ее солитонному решению (уравнение (16)), исключает результаты решения в эллиптических интегралах. Последние будут иметь место при известном точном решении в натуральных координатах $\Theta; S$. Полученные же результаты значительно проще, к тому же они дают достаточную для инженерных расчетов точность.

Литература

1. Огибалов П.М., Рабинович А.Л., Федотов Н.М. О силах взаимодействия между тросом и шкивом. // Прикладная математика и механика, т. 3, вып. 3, АН СССР, 1939 (новая серия), с. 111 -124;
2. Куровский Ф.М. Теория плоских механизмов с гибкими звеньями. М., МАШГИЗ, 1963, 204 с.;
3. Мартынов В.К. Прикладная теория передач трением гибкой связью. // Проблемы машиностроения и автоматизации, 1993, с. 71-80;

Конечные прогибы круговых цилиндрических оболочек перед потерей устойчивости под действием равномерного внешнего давления

к.т.н., проф. Матвеев Е.А., Фролов А.Б.
МГТУ «МАМИ»

Для описания осесимметричного деформирования круговой цилиндрической оболочки под действием равномерного поперечного давления или находящейся в условиях всестороннего сжатия равномерным давлением используются уравнения Маргерра. Рассмотрено опирание и заделка оболочки на опорных контурах при условиях их свободного осевого смещения или его отсутствия. Для рассматриваемых краевых задач получено аналитическое решение в элементарных функциях и построена основная ветвь нагружения оболочки.

1. Введение.

Для описания процесса деформирования и последующей потери устойчивости пологих цилиндрических оболочек долгое время применяли геометрически нелинейные уравнения, в основном уравнения Маргерра для пологих оболочек [1, 2]. По-видимому, тот факт, что цилиндрическая оболочка теряет устойчивость с волнообразованием по окружности, явился причиной того, что при использовании таких уравнений основное внимание уделялось описанию явления неосесимметричной потери устойчивости, без выделения осесимметричного деформирования до потери устойчивости в отдельный этап. В результате возможность получения аналитического решения уравнений Маргерра, описывающих осесимметричное деформирование оболочки до её неосесимметричной потери устойчивости, оказалось за пределами внимания исследователей. Настоящая работа частично восполняет этот пробел.

2. Постановка задачи.

При описании деформаций срединной поверхности полой круговой цилиндрической оболочки конечного прогиба (см. рис. 1) учитывается квадрат углов поворота нормали.

Известные из курса теории пластин и оболочек деформационные соотношения с использованием закона Гука после применения принципа Лагранжа дают уравнения равновесия для нагруженной оболочки, являющиеся осесимметричным вариантом уравнений Мар-

гера для полой цилиндрической оболочки:

$$\frac{dN_{xx}}{dx} = 0, \quad D \frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{N_{\theta\theta}}{R} - N_{xx} \frac{d^2 w}{dx^2} = q \quad (1)$$

Здесь $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ – цилиндрическая жёсткость стенки оболочки, q – внешнее давление, $N_{xx} = B(e_{xx} + \nu e_{\theta\theta})$ и $N_{\theta\theta} = B(e_{\theta\theta} + \nu e_{xx})$ – продольные и окружные удельные усилия, $B = Eh/(1-\nu^2)$ и h – жёсткость стенки оболочки на растяжение-сжатие и толщина стенки оболочки соответственно.

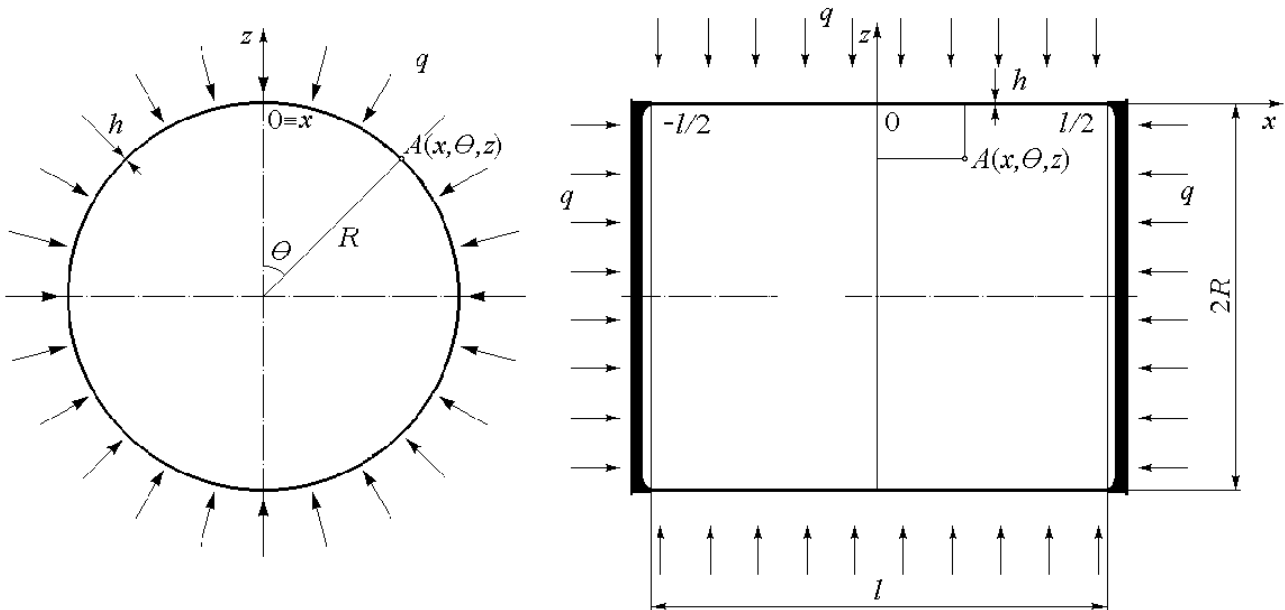


Рис. 1.

При свободном перемещении в продольном направлении краев оболочки продольные удельные усилия N_{xx} на них будут равны нулю, а граничные условия примут вид:

$$\begin{aligned} N_{xx} = w = \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 & \quad \text{для опирания и} \\ N_{xx} = w = \frac{dw}{dx} = 0 & \quad \text{для заделки} \end{aligned} \quad (2)$$

При всестороннем приложении давления граничные запишутся в виде:

$$\begin{aligned} N_{xx} = -\frac{1}{2}qR, \quad w = \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 & \quad \text{для опирания и} \\ N_{xx} = -\frac{1}{2}qR, \quad w = \frac{dw}{dx} = 0 & \quad \text{для заделки} \end{aligned} \quad (3)$$

При закреплении в продольном направлении краев граничные условия запишутся как:

$$\begin{aligned} u = w = \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 & \quad \text{для опирания и} \\ u = w = \frac{dw}{dx} = 0 & \quad \text{для заделки} \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения равновесия (1) и граничные условия (2), (3) или (4) образуют корректно поставленную краевую задачу, которая в общем случае является нелинейной.

3. Решение задачи. Решение краевых задач для уравнений равновесия (1) с граничными

условиями (2–4) строится аналогично [2] для линейной задачи.

Второе уравнение равновесия (1) в безразмерной форме имеет вид:

$$\frac{d^4 w^*}{d\xi^4} - 12N_0^* \frac{d^2 w^*}{d\xi^2} + \mu^4 w^* = \frac{\mu^4}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left(q^* + \frac{6\nu}{\mu^2} N_0^* \right) \quad (5)$$

где: $\xi = x/l$, $w^* = w/h$, $N_0^* = N_0 l^2 / (Bh^2)$, $q^* = \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{qR^2}{Eh^2}$ и $\mu = \sqrt[4]{12(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{l^2}{Rh}}$.

Для первого случая граничных условий (2) краевые задачи для уравнения (5) имеет вид:

$$\frac{d^4 w^*}{d\xi^4} + \mu^4 w^* = \frac{\mu^4}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} q^*$$

где: $w^* = \frac{d^2 w^*}{d\xi^2} = 0$ при $\xi = \pm 1/2$ для опирания и $w^* = \frac{dw^*}{d\xi} = 0$ при $\xi = \pm 1/2$ для заделки.

Решение этих краевых задач запишется в следующей форме:

$$w^* = \frac{w_0^*}{1-A} (1 - A \operatorname{ch} \alpha \xi \cos \alpha \xi + B \operatorname{sh} \alpha \xi \sin \alpha \xi)$$

где: $w_0^* = w^*(0) = \frac{q^*}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} (1-A)$, $\alpha = \frac{\mu}{\sqrt{2}}$,

для опирания

$$A = \frac{\operatorname{ch}(\alpha/2) \cos(\alpha/2)}{\operatorname{sh}^2(\alpha/2) + \cos^2(\alpha/2)}, \quad B = -\frac{\operatorname{sh}(\alpha/2) \sin(\alpha/2)}{\operatorname{sh}^2(\alpha/2) + \cos^2(\alpha/2)},$$

для заделки

$$A = \frac{\operatorname{ch}(\alpha/2) \sin(\alpha/2) + \operatorname{sh}(\alpha/2) \cos(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2) + \operatorname{sh}(\alpha/2) \operatorname{ch}(\alpha/2)}, \quad B = \frac{\operatorname{sh}(\alpha/2) \cos(\alpha/2) - \operatorname{ch}(\alpha/2) \sin(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2) + \operatorname{sh}(\alpha/2) \operatorname{ch}(\alpha/2)}$$

Для второго случая (3)

$$\frac{d^4 w^*}{d\xi^4} + q^* \mu^2 \frac{d^2 w^*}{d\xi^2} + \mu^4 w^* = \frac{(2-\nu)\mu^4}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} q^*$$

где: $w^* = \frac{d^2 w^*}{d\xi^2} = 0$ при $\xi = \pm 1/2$ для опирания и $w^* = \frac{dw^*}{d\xi} = 0$ при $\xi = \pm 1/2$ для заделки.

Решение уравнения (5) для случая граничных условий (3) примет вид:

Если $0 \leq q^* < 2$, то

$$w^* = \frac{w_0^*}{1-A} (1 - A \operatorname{ch} \alpha \xi \cos \beta \xi + B \operatorname{sh} \xi \sin \beta \xi) \quad (6)$$

где: $w_0^* = w^*(0) = \frac{q^*(2-\nu)}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}} (1-A)$, $\alpha = \frac{\mu}{2} \sqrt{2-q^*}$, $\beta = \frac{\mu}{2} \sqrt{2+q^*}$,

для опирания

$$A = \frac{(\alpha^2 - \beta^2) \operatorname{sh}(\alpha/2) \sin(\beta/2) + 2\alpha\beta \operatorname{ch}(\alpha/2) \cos(\beta/2)}{2\alpha\beta [\operatorname{sh}^2(\alpha/2) + \cos^2(\beta/2)]}, \quad B = \frac{(\alpha^2 - \beta^2) \operatorname{ch}(\alpha/2) \cos(\beta/2) - 2\alpha\beta \operatorname{sh}(\alpha/2) \sin(\beta/2)}{2\alpha\beta [\operatorname{sh}^2(\alpha/2) + \cos^2(\beta/2)]}$$

для заделки

$$A = \frac{\alpha \operatorname{ch}(\alpha/2) \sin(\beta/2) + \beta \operatorname{sh}(\alpha/2) \cos(\beta/2)}{\alpha \sin(\beta/2) \cos(\beta/2) + \beta \operatorname{sh}(\alpha/2) \operatorname{ch}(\alpha/2)}, \quad B = \frac{\alpha \operatorname{sh}(\alpha/2) \cos(\beta/2) - \beta \operatorname{ch}(\alpha/2) \sin(\beta/2)}{\alpha \sin(\beta/2) \cos(\beta/2) + \beta \operatorname{sh}(\alpha/2) \operatorname{ch}(\alpha/2)}$$

Если $q^* = 2$, то $w^* = \frac{w_0^*}{1-A} (1 - A \cos \mu \xi - B \xi \sin \mu \xi)$,

$$w_0^* = w^*(0) = \frac{q^*(2-\nu)}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}} (1-A)$$

где:

для опирания и заделки соответственно:

$$A = \frac{4 - \mu \operatorname{tg}(\mu/2)}{4 \cos(\mu/2)}, \quad B = \frac{\mu}{2 \cos(\mu/2)}, \quad \text{и} \quad A = \frac{2 \sin(\mu/2) + \mu \cos(\mu/2)}{\mu + \sin \mu}, \quad B = \frac{2 \mu \sin(\mu/2)}{\mu + \sin \mu}$$

Если $q^* > 2$, то $w^* = \frac{w_0^*}{1-A} (1 - A \cos \alpha \xi + B \cos \beta \xi)$,

$$w^* = w_0^*(0) = \frac{q^*(2-\nu)}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}} (1-A+B), \quad \alpha = \frac{\mu}{\sqrt{2}} \sqrt{q^* + \sqrt{q^{*2} - 4}}, \quad \beta = \frac{\mu}{\sqrt{2}} \sqrt{q^* - \sqrt{q^{*2} - 4}}$$

где:

для опирания:

$$A = \frac{\beta^2}{(\beta^2 - \alpha^2) \cos(\alpha/2)}, \quad B = \frac{\alpha^2}{(\beta^2 - \alpha^2) \cos(\beta/2)},$$

для заделки:

$$A = \frac{\beta \sin(\beta/2)}{\beta \sin(\beta/2) \cos(\alpha/2) - \alpha \sin(\alpha/2) \cos(\beta/2)}, \quad B = \frac{\alpha \sin(\alpha/2)}{\beta \sin(\beta/2) \cos(\alpha/2) - \alpha \sin(\alpha/2) \cos(\beta/2)}$$

Для третьего случая (5) краевые задачи имеют вид:

$$\frac{d^4 w^*}{d\xi^4} - 12N_0^* \frac{d^2 w^*}{d\xi^2} + \mu^4 w^* = \frac{\mu^4}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left(q^* + \frac{6\nu}{\mu^2} N_0^* \right)$$

где: $w^* = \frac{d^2 w^*}{d\xi^2} = 0$ при $\xi = \pm 1/2$ для опирания и $w^* = \frac{dw^*}{d\xi} = 0$ при $\xi = \pm 1/2$ для заделки.

Решение рассматриваемых краевых задач имеет следующий вид:

$$w^* = \frac{w_0^*}{1-A} (1 - A \operatorname{ch} \alpha \xi \cos \beta \xi + B \operatorname{sh} \xi \sin \beta \xi) \quad (7)$$

где коэффициенты А и В совпадают с коэффициентами для решения (8), а

$$w_0^* = w^*(0) = \frac{q^*(1-A)}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} + \frac{6\nu}{\mu^2} N_0^*, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu^2 + 6N_0^*}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu^2 - 6N_0^*}$$

Прогиб оболочки (7) в случае граничных условий (4), в отличие от случаев (2-3) определяется не только внешним давлением q^* , но и постоянной N_0^* , имеет вид:

$$N_0^* = \frac{w_0^{*2}}{8(1-A)^2} \left\{ [\alpha(A^2 - B^2) - 2AB\beta] \operatorname{sh} \alpha \cos \beta - [\beta(A^2 - B^2) + 2\alpha AB] \operatorname{ch} \alpha \sin \beta - \right. \\ \left. - [(\alpha^2 - \beta^2)(A^2 - B^2) - 4\alpha\beta AB] + (\alpha^2 + \beta^2)(A^2 + B^2) \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha}{\alpha} - \frac{\sin \beta}{\beta} \right) \right\} - \\ - \frac{\nu \mu^2 w_0^*}{\sqrt{3(1-\nu^2)}(1-A)} \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha A + \beta B}{\alpha^2 + \beta^2} \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha B - \beta A}{\alpha^2 + \beta^2} \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right) \quad (8)$$

3. Результаты расчётов. Поведение рассматриваемых оболочек, деформирующихся осесимметрично, однозначно описывается двумя параметрами: коэффициентом Пуассона ν и параметром тонкостенности μ , причем к последнему оболочки более чувствительны.

Однако, как показывают расчёты, даже влияние этого параметра на внешний вид её траекторий нагружения для всех рассмотренных граничных условий незначительно. Характерный вид траекторий нагружения при $\nu = 0.3$ и $\mu = 18$ для случаев опирания и заделки показан на рис. 2 и 3 соответственно.

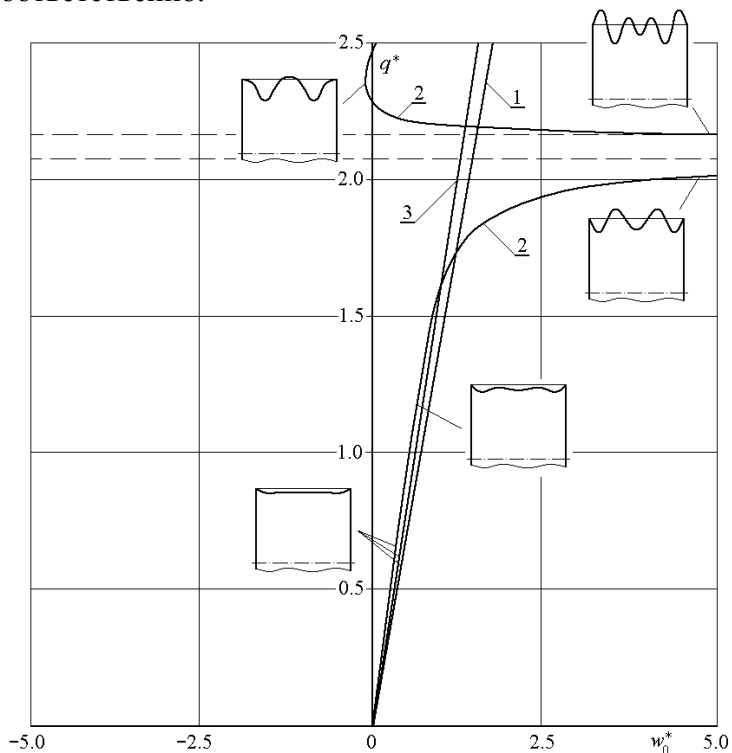


Рис. 2.

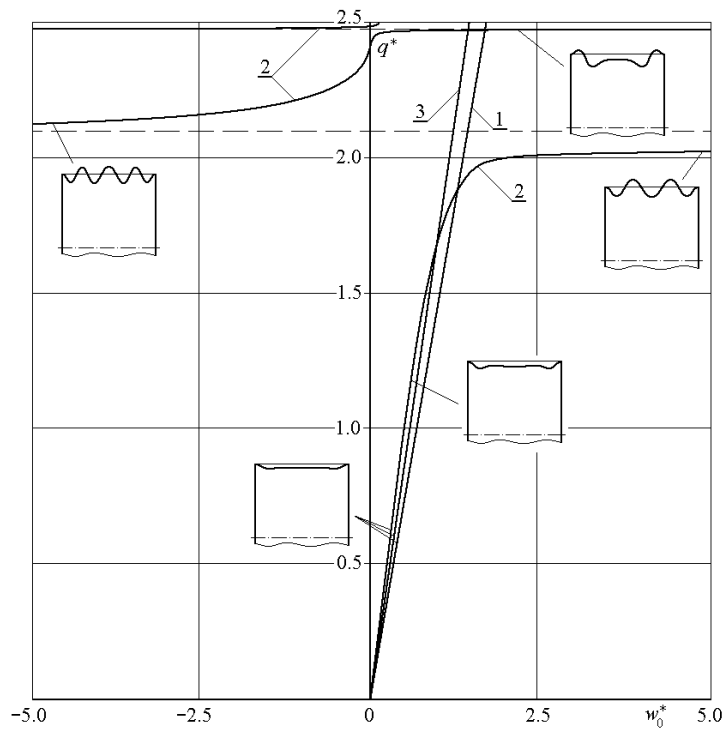


Рис. 3

На них цифрой 1 обозначены траектории нагружения для оболочек со свободно смещающимися в продольном направлении краями, цифрой 2 отмечен случай всестороннего сжатия оболочки равномерным давлением при свободно смещающихся в продольном направлении краях, а цифрой 3 – траектории нагружения для оболочек, у которых на краях запрещены продольные перемещения. Для некоторых точек приведённых траекторий нагружения на рис. 2 и 3 показаны продольные сечения оболочки с профилем её деформированной срединной поверхности.

Заключение.

Полученное аналитическое решение задачи об осесимметричном деформировании цилиндрической оболочки имеет непреходящую ценность, как и любое другое точное решение в линейной и нелинейной теории стержней, пластин и оболочек, к тому же оно описывает основную ветвь траектории нагружения оболочки перед неосесимметричной потерей устойчивости. Точность определения координат точек бифуркации и построение закритических ветвей деформирования оболочки зависит от точности построения основной, докритической траектории нагружения. Поэтому представленное решение может рассматриваться как эталонное для численных подходов, применяемых к решению задач о неосесимметричной потере устойчивости и закритическом поведении цилиндрических оболочек, на этапе расчёта их предварительного деформированного состояния.

Литература

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука. 1967, 984 с.
2. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 359 с.
3. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 636с.

Программное и математическое обеспечение автоматизированных прецизионных лазерных измерительных систем с двумя оптически обращёнными каналами

Сиротский А.А.
МГТУ «МАМИ»

Задачи высокоточного и автоматизированного контроля актуальны для всех отраслей современного машиностроения. Значительная часть задач контроля в машиностроении может быть эффективно решена только применением компьютеризированных лазерных измерительных систем с двумя оптически обращёнными каналами (ЛИС ДОК). Рассмотрены программные средства наблюдения, сбора, записи и хранения измерительной информации, а также средства и методы автоматизированной обработки данных и визуализации объектов контроля. Описаны разработанные программно-алгоритмические решения для автоматизации многоканальных прецизионных измерительных систем, которые могут быть интегрированы в действующие АСУ ТП.

Лазерные измерительные системы (ЛИС) весьма перспективны, они свободны от большинства недостатков, присущих иным методам контроля. Прежде всего, они не подвержены влиянию электромагнитных помех и наводок, легко встраиваются в действующие технологические процессы, могут быть успешно автоматизированы и интегрированы в автоматизированные системы управления технологическими процессами и производствами (АСУ ТП). При этом важнейшей составляющей участка контроля являются средства компьютеризации и автоматизации, обеспечивающие гибкость контроля и взаимодействие со смежными системами управления.

Отличительной особенностью лазерных измерительных систем с двумя оптически обращёнными каналами (ЛИС ДОК) является наличие оптического блока формирования двух оптически обращённых каналов (ДОК). Оптическая часть системы ДОК обеспечивает разделение исходного лазерного луча на два луча, оптически обращённых друг относительно дру-