Литература

1. Дятлова Н.М., Темкина В.Я., Попов К.И. Комплексоны и комплексонаты металлов. М.: Химия 1988. 554 с.
2. Дятлова Н.М., Горичев И.Г. и др. Влияние комплексонов на кинетику растворения оксидов металлов. // Координационная химия. 1986. Т. 12. № 1. с. 3-27.
3. Марченко З. Фотометрическое определение элементов. М.: Мир. 1971. 501 с.
4. Blesa M.A. ,Weisz A. D., Morando P.J., Salfity J.A., Magaz G. E., Regazzoni A.E. The interaction of metal oxide surface with complexing agents dissoived in water. // Coordination Chemistry Reviews. 2000. V.196. p. 31-61.
5. Frenier W.W., Growcock F.B. Mechanism of Iron Oxide Dissolution. A Review of Resent Literature. // Corrosion (NACE). 1984. V.40. № 12. p. 663-668.
6. Nowack B., Sigg L Adsorption of EDTA and Metal-EDTA Complexes onto Goethite. // J. Colloid Interface Sci. 1996. V177. № 2. p. 106-121.
7. Suter D., Stumm W. Dissolution of Hydrous Iron(III) Oxides by Reductive Mechanisms. // Langmuir. 1991. № 7. p. 809-813.
8. Stumm W., Sulzberger B., Sinniger J. The coordination chemistry of the oxide-electrolyte interface: the Dependence of Surface Reactivity (Dissolution, Redo Reactions) on Surface Structure. // Croat. Chem. Acta. 1990. V.63. № 242 3. p. 277-312.
9. Blesa M.A., Boch E.B., Maroto A.J.G., Regazzoni A.E. Adsorption of EDTA and Iron-EDTA Complexes on Magnetite and the Mechanism of Dissolution of Magnetite by EDTA. // J. Colloid Interface Sci. 1984. V.98. № 2. p. 295-305.
10. Borchi E.B., Regazzoni A.E., Maroto J.G., Blesa M.A. Reductive Dissolution of Magnetite by Solutions Containing EDTA and Fe2+. // J. Colloid Interface Sci. 1989. V.130. № 2. p. 299-309.
11. Blesa M.A., Marinovich H.A., Baumgartner E.C., Maroto A.J.G. Mechanism of Dissolution of Magnetite by Oxalic Acid-Ferrous Ion Solutions.// Inorg.Chem. 1987. V.26. p. 3713-3717.
12. Rueda E.H., Grassi R.L., Blesa M.A. Adsorption and Dissolution in the System Goethite/Aqueous EDTA. // J. Colloid Interface Sci. 1985. V.106. № 1. p. 243-246.

О растекании тонкого пластического слоя

к.т.н. доц. Бодунов М.А., к.ф.-м.н. Бодунов Д.М., к.ф.-м.н. доц.Исаев В.П., к.ф.-м.н. доц. Кийко Л.К.

МГТУ «МАМИ»

d-bodounov@mail.ru

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 09-08-00799-а

<u>Ключевые слова</u>: *течение в тонком слое, линии тока, контур области, уравнение растекания.*

Задача о форме контура тонкого пластического слоя, сжимаемого параллельными сближающимися плоскостями, впервые поставлена в диссертации В.Н. Безухова; математически это задача Коши для нелинейного эволюционного уравнения. В [1] получены некоторые решения этой задачи и доказана предельная теорема: если начальный контур – замкнутая кусочно-гладкая кривая, то при больших степенях сжатия он как угодно мало отличается от окружности. Результаты [1] обобщены на случай сжимаемого материала [2], упруго-деформируемых плоскостей [3], анизотропии материала слоя и контактного трения [4]. Исследованы некоторые задачи о возможной неустойчивости течения.

В представленной работе приводится общая постановка задачи течения в тонком слое [5, 6]; выделяется, как основная, кинематическая часть задачи – определение линий тока и контура области, поскольку давление со стороны слоя на поверхности контакта находится простой квадратурой.

Уравнение растекания изучается в классе автомодельных решений; под ними подразумеваются такие решения нелинейных уравнений в частных производных, конкретный вид которых определяется интегрированием некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. *Постановка задачи.* Представим себе тонкий слой идеально-пластического материала, который в начальный момент времени занимает в плоскости Oxy область S_0, ограниченную кусочно-гладким контуром Γ_0: $y_0 = \varphi_0(x_0)$. Слой сжимается жесткими поверхностями, движение которых задано, поэтому толщина слоя $h(x,y,t)$ - известная функция координат и времени. Состояние в слое определяют три функции: давление со стороны слоя на поверхности $p(x,y,t)$ и вектор скорости $\overline{V} = \{u(x,y,t), v(x,y,t)\}$. При условиях $\left|\partial h/\partial x\right|^2 << 1$, $\left|\partial h/\partial y\right| << 1$ эти функции подчиняются системе уравнений [5, 6]

$$grad\ p = -\frac{2\tau_S}{h}\frac{\overline{V}}{\left|\overline{V}\right|};\ \frac{1}{h}\frac{dh}{dt} + div\overline{V} = 0. \tag{1.1}$$

Обозначим Γ: $y_0 = \varphi(x_0, t)$ - контур в момент времени $t > 0$; функция $\varphi(x_0,t)$ определяется в процессе решения задачи, индексом «ноль» помечаются точки, принадлежащие контуру. Внутри области существует линия разветвления течения $y = \gamma(x, x_0, t)$, на которой $\overline{V} = 0$ и которая также находится в процессе решения задачи. Система (1.1) дополняется граничным условием:

$$x_0, y_0 = \varphi(x_0,t) \in \Gamma,\ p = \lambda\sigma_S, \tag{1.2}$$

здесь: $\sigma_S = \sqrt{3}\tau_S$ - предел текучести материала слоя, λ - множитель порядка единицы.

Отметим важное для дальнейшего следствие уравнений (1.1): линии тока и уровня ортогональны контуру.

Задача об определении давления p (при известном контуре Γ) выделяется; действительно, из (1.1) и (1.2) имеем

$$\left|grad\ p\right|^2 = \frac{4\tau_S^2}{h^2},\ p\Big|_{\Gamma} = \lambda\sigma_S, \tag{1.3}$$

после чего $\overline{V}$ находится из последнего уравнения (1.1) и соотношения $u\left(\partial p/\partial y\right) = v\left(\partial p/\partial x\right)$.

Обозначим $\varsigma = (p - \lambda\sigma_S)/(2\tau_S)$; тогда нетрудно показать [7,8], что решение задачи (1.3) записывается в форме функционала

$$\varsigma = \int\limits_{\omega}\frac{dS}{h(\xi,y)} = \int\limits_{x_0}^{x}\frac{\left(1+y'^2\right)^{1/2}d\xi}{h(\xi,y)}, \tag{1.4}$$

в котором ω - линия тока: $y = f(x,\alpha,\beta)$; её явный вид находится из уравнения Эйлера-Лагранжа как экстремаль функционала (1.4)

$$hy'' + \left(1+y'^2\right)\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x}y'\right) = 0, \tag{1.5}$$

параметры α, β находятся из граничных условий

$$f(x_0,\alpha,\beta) = \varphi(x_0 t),\ \varphi'(x_0 t) f'(x_0,\alpha,\beta) = -1. \tag{1.6}$$

Линия разветвления течения γ определяется как проекция на плоскость xy ребра эпюры давления.

Для завершения постановки задачи необходимо определить контур Γ в произвольный момент времени $t > 0$ (будем называть это задачей о растекании). Выделим элементарную полоску, ограниченную соседними линиями тока, отрезком dS_0 дуги контура и соответствующим отрезком проекции ребра; условие сохранения массы имеет вид:

$$\iint_\sigma \left(\rho \overline{V}\right)_n d\sigma = 0,$$

здесь σ - боковая поверхность выделенной полоски, n - внешняя нормаль к ней.

После элементарных преобразований получим [9]

$$\int_{x_1}^{x_0} \frac{\partial f}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} dx = V_n h\left(x_0, y_0, t\right) \frac{dS_0}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} h\left(x_0, y_0, t\right), \tag{1.7}$$

при этом учтено, что вследствие условий (1.6) уравнение линии тока может быть записано в виде: $y = f\left(x, x_0, t\right)$. Нижний предел интегрирования x_1 в общем случае не определяется, поскольку построить общее решение уравнения (1.5) не представляется возможным.

Итак, представлена полная система уравнений (1.4), (1.5), (1.7), граничных и начальных условий, на основе которых задача о течении в слое может быть исследована, во всяком случае, современными численными методами. Видно, что основную трудность составляет «кинематическая» часть задачи, поскольку давление определяется простой квадратурой (1.4). Именно кинематика течения – задача о растекании – будет предметом последующего изложения. Рассмотрим только частный случай $h = h(t)$, в котором оказывается возможным заметно продвинуть аналитическое исследование задачи и получить новые точные или приближенные решения. Из (1.5) следует, что линии тока – это двухпараметрическое семейство нормалей к контуру; на основании (1.6) получаем

$$f\left(x, x_0, t\right) = \frac{x_0 - x}{\varphi'} + \varphi\left(x_0, t\right), \tag{1.8}$$

здесь и далее штрих обозначает производную $\partial \varphi / \partial x_0$. Для производной $\partial f / \partial x_0$ находим

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = \frac{x - x_0}{\varphi'} + \frac{1 + \varphi'^2}{\varphi'}. \tag{1.9}$$

След ребра определяется контуром, поэтому его уравнение будет иметь вид $y = \gamma\left(x, x_0, t\right)$; приравняв это к (1.8), получим неявное уравнение для определения x_1:

$$\gamma\left(x_1, x_0, t\right) = \frac{x_0 - x_1}{\varphi'} + \varphi\left(x_0, t\right). \tag{1.10}$$

Подставим (1.9) в (1.10) и проинтегрируем

$$\left[\frac{\left(x_1 - x_0\right)^2}{2} \cdot \frac{\varphi''}{\varphi'^2} + \left(x_1 - x_0\right) \cdot \frac{1 + \varphi'^2}{\varphi'}\right] \frac{\partial h}{\partial t} = -h \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{1.11}$$

Введем степень деформации соотношением: $\tau = \ln\left(h_0 / h\right)$, h_0 - начальная толщина слоя; из (1.11) окончательно получим

$$\frac{x_1 - x_0}{2} \cdot \frac{\varphi''}{\varphi'^2} + \left(x_1 - x_0\right)^2 \cdot \frac{1 + \varphi'^2}{\varphi'} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}, \tag{1.12}$$

вместе с начальным условием: $\varphi\left(x_0, 0\right) = \varphi_0\left(x_0\right)$ это составляет задачу Коши.

Предположим, что область S симметрична относительно оси x и такова, что след ребра - конечный или бесконечный ее отрезок; тогда $\gamma(x, x_0, t) = 0$, и из (1.10) следует $x_1 = x_0 + \varphi \cdot \varphi'$, уравнение (1.12) приобретает вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \varphi + \varphi \cdot \varphi'^2 + \frac{1}{2}\varphi^2 \cdot \varphi''. \tag{1.13}$$

2. *Решение в форме «бегущей волны».*

Будем искать автомодельное решение уравнение (1.13) в следующем виде

$$\varphi = f(\xi) \cdot \varphi_2(t),\quad \xi = x - a \cdot \varphi_1(t), \tag{2.1}$$

после подстановки в (1.13) получим

$$\frac{\varphi_2' - \varphi_2}{\varphi_2^3} \cdot f - \frac{a\varphi_1'}{\varphi_2^2} \cdot f' = f \cdot f'^2 + \frac{1}{2} f^2 \cdot f''. \tag{2.2}$$

Для того, чтобы это уравнение стало обыкновенным дифференциальным уравнением относительно функции $f(\xi)$, следует положить

$$\frac{\varphi_2' - \varphi_2}{\varphi_2^3} = \frac{c_1}{2},\quad \frac{a\varphi_1'}{\varphi_2^2} = -\frac{c_2}{2}, \tag{2.3}$$

из (2.2) после этого будем иметь

$$f^2 \cdot f'' + 2f \cdot f'^2 = c_2 f' + c_1 f. \tag{2.4}$$

Как видно, уравнение (2.4) не зависит явно от переменной ξ, поэтому допускает понижение порядка заменой $f' = p(f)$; для второй производной имеем $f'' = p \cdot p'$, поэтому (2.4) обращается в уравнение Абеля второго рода

$$f^2 pp' = -2fp^2 + c_2 p + c_1 f. \tag{2.5}$$

Стандартной заменой $pf^2 = u(f)$ это уравнение приводится к виду

$$uu' = c_2 u + c_1 f^3. \tag{2.6}$$

К сожалению, общее решение этого уравнения построить не удается, поэтому рассмотрим частные случаи.

а) $c_1 = 0$; уравнение (2.4) приобретает вид

$$\left(f^2 f'\right)' = c_2 f'$$

и интегрируется

$$f^2 f' = c_2 f + a_1.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными имеет общее решение

$$\int \frac{f^2 df}{c_2 f + a_1} = \xi + a_2 = \frac{1}{c_2^2}\left[-2a_1(c_2 f + a_1) + \frac{(c_2 f + a_1)^2}{2} + a_1^2 \ln|c_2 f + a_1|\right]. \tag{2.7}$$

Отметим, что при $c_1 = 0$ из (2.2) получаем $\varphi_2 = e^t$, $\varphi_1 = a^2 - \left(\frac{c_2}{4a}\right)e^{2t}$. Уравнение (2.7) может быть исследовано численно.

б) $c_2 = 0$; из уравнения (2.6), которое приобретает вид $uu' = c_1 f^3$, получаем после интегрирования

$$u^2 = \frac{c_1}{2} f^4 + a_1; \quad u = \pm\left(\frac{c_1}{2} f^4 + a_1\right)^{1/2}.$$

Функция $u(f)$ введена заменой $p(f) f^2 = u(f)$, поэтому имеем далее

$$p(f) = \frac{df}{d\xi} = \frac{u(f)}{f^2} = \pm \frac{\left(\frac{c_1}{2} f^4 + a_1\right)^{1/2}}{f^2}.$$

Функцию $f(\xi)$ отсюда находим в форме эллиптического интеграла

$$\int \frac{f^2 df}{\left(\frac{c_1}{2} f^4 + a_1\right)^{1/2}} = \pm \xi + a_2.$$

Исследование этого решения следует проводить в зависимости от области изменения переменной ξ и параметров c_1, a_1, a_2.

Литература

1. В.Н. Безухов. Об осадке пластического слоя некруговой формы в плане// Дисс… канд. физ.-мат.н., М., 1955, 78 с.
2. П.М. Огибалов, И.А. Кийко, Л.К. Кийко. Растекание тонкого пластического слоя// Прикл. механика, 1988, т. 24, № 10, с. 88-94.
3. В.А. Кадымов, С.К. Быстриков. Некоторые новые решения нестационарных задач пластического слоя по деформируемым поверхностям// Известия ТулГУ, Сер. Матем. Мех. Информ., 2006, т. 11, в. 2, с. 54-60.
4. И.А. Кийко. Анизотропия в процессах течения тонкого пластического слоя// Прикл. матем. мех., 2006, т. 70, в. 2, с. 345-351.
5. А.А Ильюшин. Вопросы теории течения пластического вещества по поверхностям// Прикл. матем. мех., 1953, т. 18, в. 3, с. 265-288.
6. А.А. Ильюшин. Полная пластичность в процессах течения между жесткими поверхностями, аналогия с песчаной насыпью и некоторые приложения// Прикл. матем. мех., 1955, т. 19, в. 6, с. 693-713.
7. И.А. Кийко. Вариационный принцип в задачах течения тонкого слоя пластического вещества// Докл. АН СССР, 1964, т. 157, № 3, с. 551-553.
8. И.А. Кийко. Теория вязкопластических течений// Упругость и неупругость, М., Изд-во URSS, 2006, 480 с.
9. И.А. Кийко. Некоторые вопросы теории вязкопластических течений// Проблемы фундаментальной механики в теории обработки давлением. Труды расширенного научного семинара, М., МГТУ «МАМИ», 2008, с. 227.

Бигармонические модулированные осесимметрические формы цилиндрических оболочек и критические линии и точки на траектории нагружения по линейной теории

к.ф.-м.н. проф. Король Е.З.
МГТУ «МАМИ»
(495) 369-96-65, 8-916-852-30-09

Ключевые слова: *критическое состояния оболочек, действие осесимметрических продольных нагрузок*

Введение

При непрерывном параметрическом нагружении оболочки [1-6] наблюдается прежде