

$$u^2 = \frac{c_1}{2} f^4 + a_1, \quad u = \pm \left(\frac{c_1}{2} f^4 + a_1 \right)^{1/2}.$$

Функция $u(f)$ введена заменой $p(f)f^2 = u(f)$, поэтому имеем далее

$$p(f) = \frac{df}{d\xi} = \frac{u(f)}{f^2} = \pm \frac{\left(\frac{c_1}{2} f^4 + a_1 \right)^{1/2}}{f^2}.$$

Функцию $f(\xi)$ отсюда находим в форме эллиптического интеграла

$$\int \frac{f^2 df}{\left(\frac{c_1}{2} f^4 + a_1 \right)^{1/2}} = \pm \xi + a_2.$$

Исследование этого решения следует проводить в зависимости от области изменения переменной ξ и параметров c_1 , a_1 , a_2 .

Литература

1. В.Н. Безухов. Об осадке пластического слоя некруговой формы в плане// Дисс... канд. физ.-мат.н., М., 1955, 78 с.
2. П.М. Огибалов, И.А. Кийко, Л.К. Кийко. Растекание тонкого пластического слоя// Прикл. механика, 1988, т. 24, № 10, с. 88-94.
3. В.А. Кадымов, С.К. Быстриков. Некоторые новые решения нестационарных задач пластического слоя по деформируемым поверхностям// Известия ТулГУ, Сер. Матем. Мех. Информ., 2006, т. 11, в. 2, с. 54-60.
4. И.А. Кийко. Анизотропия в процессах течения тонкого пластического слоя// Прикл. матем. мех., 2006, т. 70, в. 2, с. 345-351.
5. А.А. Ильющин. Вопросы теории течения пластического вещества по поверхностям// Прикл. матем. мех., 1953, т. 18, в. 3, с. 265-288.
6. А.А. Ильющин. Полная пластичность в процессах течения между жесткими поверхностями, аналогия с песчаной насыпью и некоторые приложения// Прикл. матем. мех., 1955, т. 19, в. 6, с. 693-713.
7. И.А. Кийко. Вариационный принцип в задачах течения тонкого слоя пластического вещества// Докл. АН СССР, 1964, т. 157, № 3, с. 551-553.
8. И.А. Кийко. Теория вязкопластических течений// Упругость и неупругость, М., Изд-во URSS, 2006, 480 с.
9. И.А. Кийко. Некоторые вопросы теории вязкопластических течений// Проблемы фундаментальной механики в теории обработки давлением. Труды расширенного научного семинара, М., МГТУ «МАМИ», 2008, с. 227.

Бигармонические модулированные осесимметрические формы цилиндрических оболочек и критические линии и точки на траектории нагружения по линейной теории

к.ф.-м.н. проф. Король Е.З.
МГТУ «МАМИ»

(495) 369-96-65, 8-916-852-30-09

Ключевые слова: критическое состояния оболочек, действие осесимметрических продольных нагрузок

Введение

При непрерывном параметрическом нагружении оболочки [1-6] наблюдается прежде

всего появление новых осцилляций при одном и том же виде модуляции. Для их описания используются [5-10], линейные или квазилинейные дифференциальные уравнения четвёртого и выше порядков с параметрическими, не зависящими от координат естественными коэффициентами жёсткости, при решении которых применяются методы продолжения по параметру [5,6]. Устойчивость и критические состояния оболочки связываются [7] с характерными точками (ветвления, перескока и пр.) на так называемой кривой жёсткости («внешняя нагрузка ~ прогиб характерной точки»). Точность такого «локального» критерия зависит не только от выбора характерной точки.

Ниже даётся обобщённая постановка [11] и решение задачи анализа собственных форм, основанная на введении понятий траектории нагружения механической системы, изопараметрических траекторий - линий уровня собственных частот (длин волн) и сдвига фаз, кратных числу полуволн, и установления бинарных критических точек, параметры которых удовлетворяют условиям ортогональности и изогональности или изоклинности.

1. *Постановка краевой задачи. Траектория нагружения. Соотношения связности. Изопараметрические линии уровней частот (ЛУЧ) и сдвига фазы. Точки бинарности.*

Осциллирующие формы, описываемые дифференциальными параметрическими уравнениями четвёртого порядка, подразделяются [11] на основные и переходные (или разделительные). К основным модуляциям (рис.1) относятся: гиперболически – гармоническая модуляция $K_{\alpha\beta}^{(4)}$, бигармоническая $Z_{\beta_1\beta_2}^{(4)}$ и гармонически - гиперболическая $T_{\beta\nu_2}^{(4)}$ модуляции.

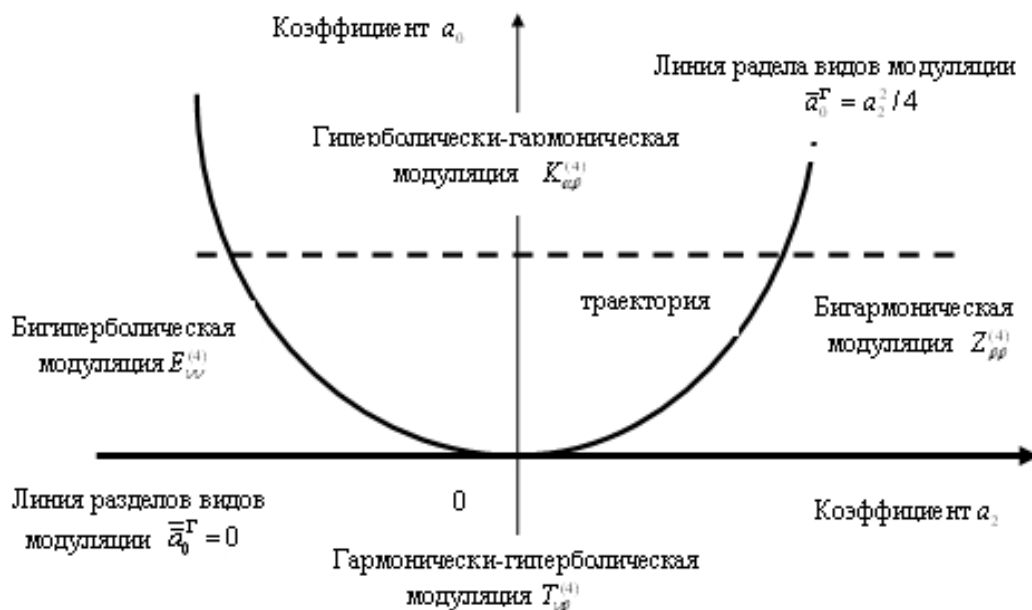


Рисунок 1 - Области различных видов дифференциальных операторов четвёртого порядка: гиперболически-гармонического $K_{\alpha\beta}^{(4)}$, бигармонического $Z_{\beta\beta}^{(4)}$ и гармонически-гиперболического $T_{\beta\nu}^{(4)}$ осцилляторов и бигиперболического звена $E_{\nu\nu}^{(4)}$;
полиномиально-гар-монического $Z_{\beta\beta}^{(4)} = K_{0\beta}^{(4)}$ и гармонически-
полиномиального $Z_{\beta 0}^{(4)} = T_{0\beta}^{(4)}$, полиномиально-гиперболического $E_{\nu\nu}^{(4)} = K_{00}^{(4)}$ и
гиперболически-полиномиального $T_{\nu 0}^{(4)} = E_{0\nu}^{(4)}$

К переходным модуляциям: полиномиально-гармоническая $K_{0\beta}^{(4)} = Z_{\beta 0}^{(4)}$ и гармониче-

ски-полиномиальная $Z_{0\beta_1}^{(4)} = T_{\beta_0}^{(4)}$ модуляции $K_{\alpha\beta}^{(4)}$ и $K_{0\beta}^{(4)} = Z_{\beta_1 0}^{(4)}$ мультипликативны и представимы произведением гармонических функций на гиперболические или на полиномиальные. Модуляции $Z_{\beta_1\beta_2}^{(4)}$ и $T_{\beta\nu_2}^{(4)}$ аддитивны и представимы суммой двух гармонических функций или гармонической и гиперболической или полиномом соответственно. Аддитивные составляющие с постоянными параметрами - несущие, а с переменными - модулирующие.

В пространстве коэффициентов дифференциального уравнения (рисунок 1) как параметрически изменяемых функций выделяются области (значения) К-разбиения этих коэффициентов, соответствующих указанным видам модуляции. Области К-разбиения подобны областям D-разбиения, применяемым в теории устойчивости колебаний механических многопараметрических систем. Отличие состоит в том, что среди возможных форм допускаются мультипликативные модуляции, амплитуды и сдвиги фаз которых зависят от координат, а в качестве фазовых координат используются не структурные параметры (амплитуда A , частота β и сдвиг фазы ω), а естественные коэффициенты жёсткости (a_2, a_0) уравнения. Границам раздела (парабола и прямая), отделяющим области основных видов модуляции, соответствуют переходные модуляции.

Коэффициенты жёсткости параметрически изменяются в процессе нагружения и задают в плоскости $(a_2 \sim a_0)$ траекторию нагружения. Структурные параметры (β_1, β_2) - частоты бигармонической двухчастотной модуляции связаны соотношениями связности с коэффициентами жёсткости уравнения и произвольными постоянными интегрирования C_n .

Из соотношений связности следуют выражения характеристических изопараметрических линий - линий уровня квадратов частот (длин волн), представляющих собой отрезки ветвей парабол и прямые линии. Постоянные интегрирования, соответствующие заданным граничным условиям, определяют положение характеристических линий и критических точек на них. Критерием критичности служит условие изогональности (изоклинности) или ортогональности системы собственных функций, соответствующих этим точкам структурных параметров.

Бигармоническая модулированная форма (БМФ). Параметрическое дифференциальное уравнение. Для описания бигармонических осесимметрических модулированных собственных форм тонких линейно упругих цилиндрических оболочек средней длины при комбинированном нагружении равномерным осевым усилием сжатия и радиальным давлением используем обыкновенное линейное дифференциальное уравнение нелинейного краевого эффекта [6-8] с параметрическими коэффициентами и правой частью:

$$Z^{(4)}\{w, \bar{\lambda}\} = f(\bar{\lambda}), \quad \xi \in [0, 1] \quad (1)$$

$$Z^{(4)}\{w, \bar{\lambda}\} \equiv [D^4 + a_2(\bar{\lambda})D^2 + a_0(\bar{\lambda})]\{w\} \equiv [(D^2 + \beta_1^2(\bar{\lambda}))(D^2 + \beta_2^2(\bar{\lambda}))]\{w\},$$

где бигармонический дифференциальный оператор Эйлера $Z_{\beta_1\beta_2}^{(4)}$ записан в форме дифференциального полинома (суммы) и в форме произведения дифференциальных операторов второго порядка $D^2\{w\} \equiv d^2w/d\xi^2$ с естественными коэффициентами жёсткости $a_2(\bar{\lambda}), a_0(\bar{\lambda})$ и

структурными параметрами $\beta_1(\bar{\lambda}), \beta_2(\bar{\lambda})$ модуляции. Искомая функция $w(\xi, \bar{\lambda}) = \tilde{w}(\xi, \bar{\lambda})/h$ - относительный прогиб, направленный по радиусу от центра и отнесённый к толщине оболочки h ; $\xi = x/L$, $x \in \{0, L\}$ - безразмерная координата вдоль оси цилиндра, отнесённая к

длине L образующей. Здесь обозначено: $a_2(\bar{\lambda})$ - коэффициент влияния изменения кривизны образующей оболочки; $a_0(\bar{\lambda})$ - коэффициент влияния радиальных смещений (прогиба);

$f(\lambda_1)$ - функция влияния мембранных усилий на поперечные реактивные усилия;
 $\bar{\lambda} = \{\lambda_1 = \sigma_1 / E_1, \lambda_2 = \sigma_2 / E_2\}$ - параметры внешней нагрузки, не зависящие от координат и определяющие компоненты осевых и радиальных мембранных усилий оболочки (равномерно распределённые по длине); $\mu_{1-4}(\bar{\lambda}) = \pm i \cdot \beta_{1,2}(\bar{\lambda})$ - чисто мнимые характеристические показатели общего решения уравнения (1). Уравнение (1) с постоянными, не зависящими от координат, коэффициентами $(a_2(\bar{\lambda}), a_0(\bar{\lambda}))$, учитывает неоднородность напряжённо-деформированного состояния с начала нагружения, обусловленную поперечной деформацией при действии продольного усилия (так называемым эффектом Пуассона), и начальную (возникающую уже при малых нагрузках) погибь. Бигармоническая (двойная гармоническая или двухчастотная) модуляция реализуется [11] при изменениях коэффициентов (a_2, a_0) уравнения (1) в пределах:

$$\Omega_Z : \{a_2(\bar{\lambda}) \geq 0, \quad 0 < a_0(\bar{\lambda}) < \frac{a_2^2(\bar{\lambda})}{4}\}, \quad (2)$$

что на плоскости $(a_2 \sim a_0)$ соответствует области Ω_Z , заключённой между правой полуосью абсцисс $a_2 \geq 0, \bar{a}_0^\Gamma = 0$ и правой ветвью внешней части параболы $\bar{a}_0^\Gamma = a_2^2 / 4$, проходящей через начало координат (рисунок 1).

Для случая осевого сжатия цилиндрической оболочки коэффициенты и функция влияния таковы:

$$a_2(\lambda_1) = 12(1 - \mu_{12}\mu_{21})(L/R)^2(R/h)^2\lambda_1, \quad a_0 = 12c(1 - \mu_{12}\mu_{21})(L/R)^4(R/h)^2 = const,$$

$$f(\lambda_1) = -12\mu_{12}(1 - \mu_{12}\mu_{21})(L/R)^4(R/h)^3\lambda_1,$$

где: μ_{12}, μ_{21} - коэффициенты Пуассона и E_1, E_2 - модули Юнга в направлениях главных осей ортотропии. Из сравнения развёрнутых форм (1) следуют [11, 12] соотношения связности коэффициентов жёсткости $(a_2(\bar{\lambda}), a_0(\bar{\lambda}))$ и структурных параметров $(\beta_1(\bar{\lambda}), \beta_2(\bar{\lambda}))$ в виде:

$$\beta_1^2(\bar{\lambda}) + \beta_2^2(\bar{\lambda}) = a_2(\bar{\lambda}), \quad \beta_1^2(\bar{\lambda})\beta_2^2(\bar{\lambda}) = a_0(\bar{\lambda}). \quad (3)$$

В плоскости $(\beta_2 \sim \beta_1)$ соотношения (3) представляются семействами изопараметрических (при постоянных значениях $a_2(\bar{\lambda}) = const$ и $a_0(\bar{\lambda}) = const$) линий: концентрических окружностей (радиуса $\sqrt{a_2(\bar{\lambda})}$) и равнобочных гипербол с асимптотами, совпадающими с осями координат и имеющими вершину с координатами $(\sqrt[4]{a_0(\bar{\lambda})}, \sqrt[4]{a_0(\bar{\lambda})})$.

$$\beta_1^2(\bar{\lambda}) + \beta_2^2(\bar{\lambda}) = a_2(\bar{\lambda}) = const, \quad \beta_2(\bar{\lambda}) = \beta_2(\beta_1(\bar{\lambda})) = \frac{\sqrt[4]{a_0(\bar{\lambda})}}{\beta_1(\bar{\lambda})} = \frac{const}{\beta_1(\bar{\lambda})}. \quad (4)$$

На верхней границе $\Gamma_K : \bar{a}_0^\Gamma(a_2) = a_2^2 / 2$ соотношения связности (3) принимают соответствующие выражения $2\beta_1(\bar{\lambda}) = a_2(\bar{\lambda}), \quad \beta_1^4(\bar{\lambda}) = \bar{a}_0(\bar{\lambda}), \quad \beta_1(\bar{\lambda}) = \beta_2(\bar{\lambda})$ и нижней $\Gamma_Z : \bar{a}_0^\Gamma(a_2) = 0$ соответственно $\beta_1^2(\bar{\lambda}) = a_2(\bar{\lambda}), \quad \beta_2(\bar{\lambda}) = 0$.

Коэффициенты $a_2(\bar{\lambda}), a_0(\bar{\lambda})$ как функции монотонного параметра нагружения $\bar{\lambda} = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, положительно полуопределённые или полностью определённые, на плоскости $(a_2 \sim a_0)$ образуют траекторию нагружения:

$$F_T(a_2, a_0) = 0, \rightarrow F_T((\beta_1^2 + \beta_2^2), (\beta_1^2 \beta_2^2)) = 0, \quad (5)$$

заданную как функцию параметров (β_1, β_2) , с одной стороны и как функцию коэффициентов (a_2, a_0) , с другой стороны, которые в свою очередь есть функции параметра нагружения $\bar{\lambda} = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, определённые соотношениями:

$$a_2(\bar{\lambda}) = a_2^0 + A_2(\bar{\lambda}) \geq 0, \quad 0 < a_0(\bar{\lambda}) = a_0^0 + A_0(\bar{\lambda}) < \frac{a_2^2(\bar{\lambda})}{4}, \quad \rightarrow F_T(a_2, a_0) = 0 \quad (6)$$

где $A_2(\bar{\lambda}), A_0(\bar{\lambda})$ - функции параметра нагружения $\bar{\lambda}$, а $(a_2^0, a_0^0) \in \Omega_Z$ - её начальные координаты- значения коэффициентов жёсткости при значениях $\bar{\lambda} \rightarrow 0$ в начальном (исходном) состоянии.

Критическая линия первого рода - линии раздела видов модуляции (ЛРМ). Характерные траектории нагружения. Линия (ЛРМ-Т) $\Gamma_K : \{\bar{a}_0^L = a_2^2/4, a_2 \geq 0\}$ (правая ветвь параболы) ограничивает часть плоскости Ω_Z сверху; она разделяет смежные основные виды гиперболически-гармонической $K_{\alpha\beta}^{(4)}$ и бигармонической $Z_{\beta_1\beta_2}^{(4)}$ модуляции:

$$\Gamma_K : \{\bar{a}_0^L = a_2^2/4, a_2 \geq 0\} \quad (7)$$

Линия (ЛРМ-Е) $\Gamma_Z : \{\bar{a}_0^{\Gamma}(a_2) = 0, a_2 \geq 0\}$ (правая полуось абсцисс) ограничивает часть плоскости Ω_Z снизу; она разделяет смежные основные виды бигармонической $Z_{\beta_1\beta_2}^{(4)}$ и гармонически-гиперболической $T_{\beta_1\nu_2}^{(4)}$ модуляций:

$$\Gamma_Z : \{\bar{a}_0^{\Gamma}(a_2) = 0, a_2 \geq 0\} \quad (8)$$

При подходе к граничным линиям раздела видов модуляции осуществляются предельные переходы: из области Ω_K на линии (7) по структурному параметру $\alpha \rightarrow 0$, а из области бигармонической Ω_Z в область гармонически-гиперболическую Ω_T на линии (8) - по параметру $\beta_2 \rightarrow \beta_1$; из области Ω_Z бигармонической модуляции в область Ω_T гармонически-гиперболической модуляции на линии (8) осуществляется предельный переход по структурному параметру $\beta_2 \rightarrow 0$. Переход на граничные разделительные линии и через них осуществляется непрерывным образом по заданной (5) или (6) траектории нагружения. Далее будем рассматривать четыре характерных типа траекторий:

1) траектория Т-Л в задаче Тимошенко-Лоренца о осесимметричной форме устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии [9, 10] – прямая линия, параллельная оси абсцисс, на которой реализуются два вида основных модуляций: одночастотная амплитудно-фазовая $K_{\alpha\beta}$ и двухчастотная фазовая $Z_{\beta\beta}$ и одна переходная амплитудно-фазовая $K_{0\beta} = Z_{\beta\beta}$

$$F_{TL}(a_2(\bar{\lambda})) = \tilde{a}_{2L} \cdot k = \beta_{1L}^2(k) + \beta_{2L}^2(k), \quad a_0(\bar{\lambda}) = \beta_{1L}^2(k)\beta_{2L}^2(k) = const = \tilde{a}_{0L} \quad (9)$$

Траектории Т-Л, у которых $a_0(\bar{\lambda}) \leq \beta_{1\min}^4$ ($\beta_{1\min}$ - минимальная частота), пересекает линии ЛУЧ в порядке возрастания частоты, и называются упорядоченными, а при $a_0(\bar{\lambda}) > \beta_{1\min}^4$ - неупорядоченными;

2) траектория Е в задачах о статической устойчивости стержня Эйлера и цилиндрической ортотропной оболочки (с нулевым коэффициентом ортотропии) [1, 3] - прямая линия, совпадающая с осью абсцисс линия $Z_{0\beta} = T_{\beta 0}$, линия раздела бигармонической и гармониче-

ски-гиперболической видов модуляций, на которой реализуется одночастотная модуляция:

$$F_T(a_2(\lambda_1)) = \tilde{a}_{2E} \cdot k = \beta_{1E}^2(k), \quad a_0 = \text{const} = \tilde{a}_{0E} = 0, \quad \beta_{2E} = 0, \quad (10)$$

3) траектория К (ЛУЧ-К) в задачах о собственных осесимметрических формах устойчивости и колебаний цилиндрической оболочки [11, 12] - кусочно-линейная траектория с первым горизонтальным участком конечной длины и со вторым - наклонным полуограниченным, на которых реализуется только один вид фазовой двухчастотной модуляции $Z_{\beta\beta}$

$$F_{TK}(a_2(\bar{\lambda}), a_0(\bar{\lambda})) = \begin{cases} a_{0K} = 0, & a_{2K} = \tilde{a}_{2K} \cdot k = \beta_{2K}^2(k), & \text{при } \beta_2^2 < \tilde{\beta}_{2K}^2 \\ a_{0K}(a_2) = \tilde{\beta}_{2K}^2(a_2 - \tilde{\beta}_{2K}^2) = \tilde{\beta}_{2K}^2(\beta_{1K}^2 + \beta_{2K}^2 - \tilde{\beta}_{2K}^2), & \text{при } \beta_2^2 \geq \tilde{\beta}_{2K}^2 \end{cases} \quad (11)$$

Траектория К, соответствующая минимальной частоте $\beta_{1\min}$, главная, отделяющая подобласть $(a_2, a_0) \in \Omega_K$ устойчивых некритических состояний;

4) траектория Z по линии раздела видов гиперболически - гармонической и бигармонической модуляций $K_{0\beta} = Z_{\beta\beta}$, на которой реализуется только одночастотная переходная амплитудно-фазовая модуляция $K_{0\beta} = Z_{\beta\beta}$

$$F_{ZK}(a_2(\bar{\lambda}), a_0(\bar{\lambda})) = a_0(\bar{\lambda}) - \frac{a_2^2(\bar{\lambda})}{4} = 0 \quad (12)$$

Здесь параметры β_{2K}^2 характеризуют двухчастотные модуляции, одна из частот β_{2K}^2 которых фиксирована (несущая), а вторая – переменная (модулирующая).

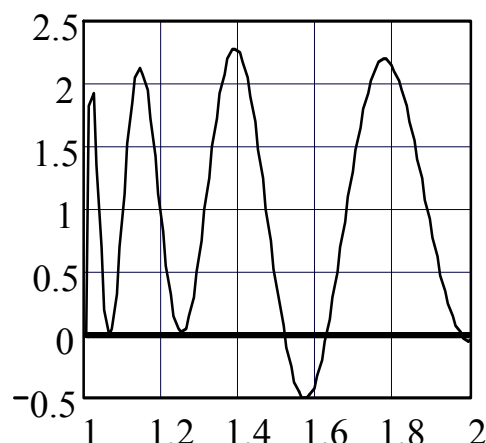
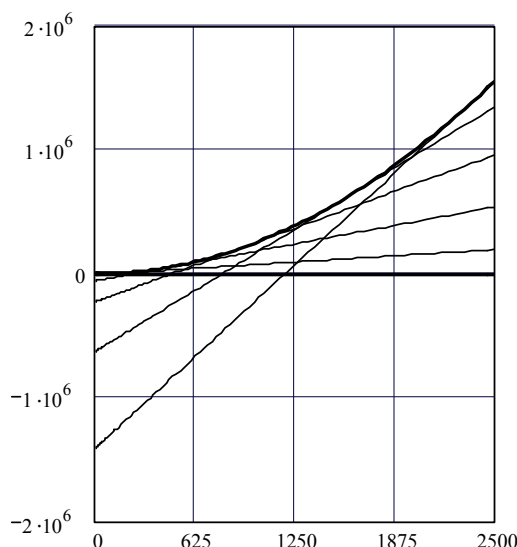
Характеристические линии второго рода - линии уровня квадратов частот или длин волн (ЛУЧ). Точки бинарности. Из соотношений связности (3)-(4) следуют выражения изопараметрических линий (или траекторий) - линий уровня квадратов частот $\beta_C = \text{const}$ или длин волн $\lambda_{1K} = 2\pi / \beta_{1K}$ осцилляций

$$\Phi_\beta(a_2, a_0^\beta, \beta_{2K}) = 0 \rightarrow a_0^\beta(a_2, \beta_{2K}) = \beta_{2K}^2(a_2 - \beta_{2K}^2)^2, \quad 0 \leq a_0^\beta, \quad a_2 \geq 0 \quad (13)$$

Линии ЛУЧ в плоскости (a_2, a_0^β) представляют семейство взаимно пересекающихся прямых и пересекающих ось абсцисс в точке, равной квадрату соответствующей частоты β_{1C}^2 , с угловыми коэффициентами, равными этому же квадрату частоты β_{1C}^2 , и касательными к верхней линии раздела видов модуляции-параболе $\Gamma_K : \{\bar{a}_0^\Gamma(a_2) = a_2^2/4\}$ в точке $A_{KT}(a_{2A} = 2\beta_{1C}^2, a_{0A}^\beta = \beta_{1C}^4)$.

На рисунке 2 представлены изопараметрические линии ЛУЧ в областях бигармонической и гармонически-гиперболической модуляций. Параметры этих линий - угловой коэффициент и отрезок оси абсцисс – соответствуют значениям частот, равным $\beta_2 = 8.9868$, $\beta_2 = 15.4505$, $\beta_2 = 21.808233$ и $\beta_2 = 28.13238$ в условиях жёсткого защемления торцов оболочки. Характеристики ЛУЧ касаются линии раздела видов модуляции и отсекают от оси абсцисс отрезок, равный квадрату частоты осцилляций. Точки пересечения пар ЛУЧ с координатами $B_{12} : (a_{2B}^\beta = \beta_{1C}^2 + \beta_{2C}^2, a_{0B}^\beta = \beta_{1C}^2\beta_{2C}^2)$ пар этих прямых $\Phi_{1\beta}(a_2, a_0^\beta, \beta_{1C}) = 0$ и $\Phi_{2\beta}(a_2, a_0^\beta, \beta_{2C}) = 0$ относятся к критическим бинарным точкам второго рода.

Точки бинарности, изображённые на рисунке 2, соответствуют краевым точкам жёсткого защемления торцов оболочки и сгущаются вблизи вершины клиновидной области $Z_{\beta\beta}^{(4)}$



а) линии раздела ЛРМ и ЛУЧ

б) ДКФ траектории Т-Л

Рисунок 2 - Критические линии первого (раздела видов модуляций – парабола

$\bar{a}_0 = a_2^2/4$) и второго рода (линии уровня квадрата частоты (ЛУЧ): $\beta_2 = 8.9868$, $\beta_2 = 15.4505$, $\beta_2 = 21.808233$, $\beta_2 = 28.13238$ - прямые линии с угловым

коэффициентом, равным квадрату частоты) и детерминантно-краевая функция (ДКФ) траектории Т-Л

Краевые условия. Фундаментальная система решений. Детерминантно-краевое частотное (или волновое) определяющее уравнение. Краевые условия линейные дифференциального типа на концах интервала $\xi_0 = 0, \xi_1 = 1$ с однородной правой частью представляются в общем виде выражением

$$L_i^{(3)}\{w\} \equiv (b_{i0}w + b_{i1}\frac{dw}{d\xi} + b_{i2}\frac{d^2w}{d\xi^2} + b_{i3}\frac{d^3w}{d\xi^3})\Big|_{\xi=0,1} = 0, \quad i = 1,2 \quad (14)$$

где коэффициенты $b_{im} = const$ постоянные числа. Общее решение $\bar{w}_n(\xi, \beta_1, \beta_2)$ однородного уравнения (1) четвёртого порядка содержит четыре линейно независимых функции - фундаментальных решений $\bar{w}_n(\xi, \beta_1, \beta_2)$ и четыре постоянных интегрирования C_n

$$\bar{w}(\xi, \beta_1, \beta_2) = \sum_{n=1}^4 C_n \bar{w}_n(\xi, \beta_1, \beta_2), \quad w(\xi, \beta_1, \beta_2) = \bar{w}(\xi, \beta_1, \beta_2) + W(\xi, \beta_1, \beta_2) \quad (15)$$

Соответствующая (14) система уравнений относительно постоянных интегрирования

$$\sum_{k=1}^4 C_k L_i^{(3)}\{w_k(\xi, \beta_1(\bar{\lambda}), \beta_2(\bar{\lambda}))\}\Big|_{\xi=0,1} = L_i^{(3)}\{W(\xi, \bar{\lambda})\}\Big|_{\xi=0,1} \quad (16)$$

имеет множество нетривиальных ограниченных и множество неограниченных решений при условии, что детерминант системы (16) равен нулю, т.е.

$$D\{\beta_1(\bar{\lambda}), \beta_2(\bar{\lambda})\} \equiv \left\| L_i^{(3)}\{w_k(\beta_1(\bar{\lambda}), \beta_2(\bar{\lambda}), \xi)\}\Big|_{\xi=0,1} \right\| = 0 \quad (17)$$

В общем случае левая часть выражения (17) детерминантно-краевая функция (ДТФ) детерминантно-краевого определяющего уравнения (ДКУ) – это трансцендентная полиномиальная функция, содержащая тригонометрические функции и полиномы, общий порядок которой второй, т.е. может быть представлена в виде произведения:

$$D(\beta_1(\bar{\lambda}), \beta_2(\bar{\lambda})) \equiv D_1\{\beta_1(\bar{\lambda}), \beta_2(\bar{\lambda})\} D_2(\beta_1(\bar{\lambda}), \beta_2(\bar{\lambda})) = 0 \quad (18)$$

и распадающейся соответственно на две ветви. Вместе с соотношениями связности (3-4) и выражением для траектории нагружения (5) детерминантно-краевое уравнение образует полную (расширенную, дополненную) систему уравнений на собственные значения (УСЗ)

$$\begin{aligned} D(\beta_1(\bar{\lambda}), \beta_2(\bar{\lambda})) = 0, F_T(a_2(\beta_1(\bar{\lambda}), \beta_2(\bar{\lambda})), a_0(\beta_1(\bar{\lambda}), \beta_2(\bar{\lambda}))) = 0 \\ \beta_1^2(\bar{\lambda}) + \beta_2^2(\bar{\lambda}) = a_2(\bar{\lambda}), \beta_1^2(\bar{\lambda})\beta_2^2(\bar{\lambda}) = a_0(\bar{\lambda}) \end{aligned} \quad (19)$$

распадающуюся на число подсистем в соответствии с порядком уравнения (1).

Линии уровня квадратов собственных частот (длин волн) ЛУСЧ. Бинарные точки второго рода. Среди семейств линий ЛУЧ различают такие, для которых сдвиг фазы постоянный. Двум ветвям $D_1(\beta_1, \beta_2) = 0$ или $D_2(\beta_1, \beta_2) = 0$ ДКУ (18) соответствует определённый тип осцилляции (чётной или нечётной), а точки их пересечения – точки бинарности (раздвоения, совпадения значений обеих частот), т.е. решения системы:

$$\begin{cases} D_1(\beta_1, \beta_2) = 0, \\ F_T(\beta_1, \beta_2) = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} D_2(\beta_1, \beta_2) = 0, \\ F_T(\beta_1, \beta_2) = 0, \end{cases} \quad (20)$$

относятся к критическим точкам второго рода.

Общее решение ЛОДУ и структурные параметры (показатели). Сдвиги фаз, кратные целому или дробному числу π . Условия изогональности, точки бинарности. В области би-гармонической модуляции (БМ) общее решение представляется в различных формах:

- в форме (15) через двухчастотные фундаментальные решения

$$\begin{aligned} \bar{w}_1(\xi, \beta_1) = \cos \beta_1 \xi, \quad \bar{w}_2(\xi, \beta_1) = \frac{\sin \beta_1 \xi}{\beta_1}, \\ \bar{w}_3(\xi, \beta_1, \beta_2) = \frac{\cos \beta_1 \xi - \cos \beta_2 \xi}{\beta_1^2 - \beta_2^2}, \quad \bar{w}_4(\xi, \beta_1, \beta_2) = \frac{\beta_2 \sin \beta_1 \xi - \beta_1 \sin \beta_2 \xi}{\beta_1 \beta_2 (\beta_1^2 - \beta_2^2)} \end{aligned}$$

гармонические функции, представленные в виде, пригодном для предельного перехода по структурным параметрам $\beta_2(\bar{\lambda}) \rightarrow \beta_1(\bar{\lambda})$ на верхней границе $\Gamma_K : \bar{a}_0^\Gamma(a_2) = a_2^2/4$ и $\beta_2(\bar{\lambda}) \rightarrow 0$ на нижней границе $\Gamma_Z : \bar{a}_0^\Gamma(a_2) = 0$;

- амплитудно-фазовой аддитивной модуляции (АФМ)

$$\bar{w}(\xi, \bar{\lambda}) = A_1(\beta_1, \beta_2) \cos[\beta_1 \xi + \omega_1(\beta_1, \beta_2)] + A_2(\beta_2) \cos[\beta_2 \xi + \omega_2(\beta_2)], \quad (21)$$

где амплитуда и сдвиг фазы есть функции структурных параметров (β_1, β_2) и постоянных интегрирования $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$

$$\begin{aligned} A_1(\beta_1, \beta_2) = \frac{C_1[1 + \frac{C_3}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)C_1}]}{|\cos \omega_1(\beta_1, \beta_2)|}, \quad \text{tg } \omega_1(\beta_1, \beta_2) = \frac{1 + \frac{C_4}{\beta_1(\beta_1^2 - \beta_2^2)C_2}}{1 + \frac{C_3}{(\beta_1^2 - \beta_2^2)C_1}} \\ A_2(\beta_2) = \frac{C_3}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)|\cos \omega_2(\beta_2)|}, \quad \text{tg } \omega_2(\beta_2) = \frac{C_4}{\beta_2 C_3} \end{aligned}$$

Форма (21) указывает на зависимость естественных физических (сдвигов фаз и амплитуд) от частот, в частности, на чётность или нечётность гармоник (несущей и моделирующей).

Разность фаз обеих составляющих модуляции равна целому числу π (софазные пары гармоник) $\omega_1(\beta_1, \beta_2) - \omega_2(\beta_2) = \pi n$ или равна дробному числу π (противофазные пары гармоник) $\omega_1(\beta_1, \beta_2) - \omega_2(\beta_2) = \pi/2 + \pi n$, если соответственно:

$$\frac{1}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \left(\frac{1}{\beta_2} \frac{C_4}{C_1} - \frac{1}{\beta_1} \frac{C_4}{C_2} \right) + \frac{1}{\beta_2} \frac{C_4}{C_3} = 1$$

$$\frac{1}{\beta_2} \frac{C_4}{C_3} + \frac{1}{\beta_1 \beta_2 (\beta_1^2 - \beta_2^2)} \frac{C_4}{C_2} \frac{C_4}{C_3} + \frac{1}{\beta_1^2 - \beta_2^2} \frac{C_4}{C_1} \frac{C_3}{C_4} = -1$$

Сдвиг фазы $[\omega_1(\beta_1, \beta_2), \omega_2(\beta_2)] = \pi n$ какой-либо составляющей равен чётному числу π (С-чётные формы одной из гармоник) или дробному числу π (S-нечётные формы одной из гармоник) $[\omega_1(\beta_1, \beta_2), \omega_2(\beta_2)] = \pi/2 + \pi n$ если соответственно

$$\omega_1 = \pi n, \rightarrow \frac{C_4}{C_2} = \beta_1(\beta_2^2 - \beta_1^2) \quad \omega_2 = \pi n, \rightarrow \frac{C_4}{C_3} = 0$$

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, \leftarrow \frac{C_3}{C_1} = \beta_2^2 - \beta_1^2 \quad \omega_2 = \frac{\pi}{2} + \pi n, \rightarrow \frac{C_3}{C_4} = 0$$

Критические значения частот (β_1, β_2) определяются из системы (20), содержащей детерминантно – краевое уравнение и выражения для траектории нагружения.

Таким образом, в диапазоне изменения параметров жёсткости $(a_2, a_0) \in \Omega_z$ выделяются три типа критических линий: линии разделов модуляции (7) и (8), линии уровней квадратов частот (длин волн) осцилляций (12), среди которых линии уровня собственных частот, чётной и нечётной форм осцилляций. На этих линиях точки бинарности, среди которых точки изогональности (изоклинности). Условия изогональности (изоклинности) и ортогональности

$$J\{\bar{w}_n \cdot \bar{w}_m\} = \int_0^1 \bar{w}_n(\xi) \cdot \bar{w}_m(\xi) d\xi$$

связаны со значением интеграла - скалярного произведения ортонормированных собственных $\bar{w}_n(\xi) = \bar{w}(\xi, \beta_0, \beta_n)$ функций, соответствующих разным значениям собственных чисел $\{\beta_{10}, \beta_{1n}\}_{C,S}$ определённого семейства (чётных или нечётных) или одного и другого семейств:

- изогональности (изоклинности) для чётных или нечётных собственных функций

$$J_{C,S}\{n, m\} = J_{C,S}(\bar{w}_n \cdot \bar{w}_m) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m \\ j_{C,S} = \text{const} \neq 0, 1 & \text{при } n \neq m \end{cases} \quad (24)$$

-ортогональности для произведения функций из одного семейства на функции другого

$$J_{C,S}\{n, m\} = J_{C,S}(\bar{w}_n \cdot \bar{w}_m) = 0 \quad (25)$$

При анализе процесса эволюции бигармонических осесимметрических форм модуляции формы образующей тонкой упругой цилиндрической оболочки средней длины используются в качестве критериев критичности указанные выше критические линии и точки, при пересечении которых траекторией нагружения могут наступить критические состояния, в частности, может произойти потеря устойчивости.

Обобщённая расширенная постановка задачи анализа эволюции изгибных бигармонических $Z_{\beta\beta}^{(4)}$ форм. Расширенная постановка включает уравнение (1) и краевые условия (14) и дополнительно: задание траектории нагружения $F_T(a_2(\bar{\lambda}), a_0(\bar{\lambda})) = 0$ в области переменных коэффициентов жёсткости $(a_2(\bar{\lambda}), a_0(\bar{\lambda})) \in \Omega_K$ как функций внешних параметров $\{\bar{\lambda}\}$ и соотношений связности (5) структурных параметров $\beta_1(\bar{\lambda}), \beta_2(\bar{\lambda})$ и коэффициентов жёсткости. Кроме того, задаются критические линии (10) смены видов модуляции ЛВРМ (траектории Е и Z), и линий уровня квадратов частот ЛУЧ (длин волн) (8), и уровней квадратов собствен-

ных частот ЛУСЧ (чётных и нечётных) точек бинарности (изогональности и ортогональности) на траекториях Е и К.

2. Анализ эволюции бигармонических осесимметрических форм цилиндрической оболочки при осевом сжатии.

При расчётах приняты следующие значения: геометрических $L/R = 1, R/h = 100$ и механических характеристик $\mu_{12} = \mu_{21} = \mu = 0.3$ - коэффициента Пуассона и величины $\eta = \mu \cdot (R/h)^2$ - коэффициента пропорциональности выражений изгибающего момента и перерезывающего усилия в диапазоне изменения частот $17.998 \leq \beta \leq 34$ при значениях коэффициента жёсткости $a_0^L = 1.092 \cdot 10^5$ и коэффициента $a_2(k)$ в диапазоне $0 \leq a_2^L \leq 1332$ при зависимости $\beta_1^2(k) + \beta_2^2(k) = a_2^k(k) = a_2^L \cdot k$ на траектории Т-Л от параметра $k = \sigma/\sigma_L = \sigma\sqrt{3(1-\mu^2)}(h/R)$ ($1 \leq k \leq 2$) и коэффициенте $a_0^L = 18.727$, выражения зависимости частот от параметра $\beta_1(k) = \sqrt{k \cdot \bar{a}_2^0/2 + \sqrt{(k \cdot \bar{a}_2^0/2)^2 - a_0}}$, $\beta_2(k) = \sqrt[4]{a_0/\beta_1(k)}$.

На всех графиках приводятся значения относительного прогиба $\tilde{w} = w/w_L$, отнесённого к величине прогиба от равномерной (реактивной) распределённой нагрузки $w_L = f(\bar{\lambda})/a_0$

$$\tilde{w} = \frac{w}{w_L} = \frac{w}{a_0} f(\bar{\lambda}) = -\mu \frac{R}{h} \lambda_1 = -\mu \frac{R}{h} \sigma_m k = -\frac{\mu k}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}$$

Краевые условия. Среди представленных расчётных результатов рассмотрены три типа краевых условий:

- жёсткое защемление торцов оболочки

$$w(0, \lambda_1) = w(1, \lambda_1) = \left. \frac{dw}{d\xi} \right|_{\xi=0} = \left. \frac{dw}{d\xi} \right|_{\xi=1} = 0,$$

- шарнирное закрепление торцов оболочки

$$w(0, \lambda_1) = w(1, \lambda_1) = (w'' + \eta^2 w)|_{\xi=0} = ((w'' + \eta^2 w))|_{\xi=1} = 0,$$

- торцы оболочки свободны от изгибной нагрузки

$$((w'' + \eta^2 w))|_{\xi=0} = ((w'' + \eta^2 w))|_{\xi=1} = ((w''' + \eta^2 w'))|_{\xi=0} = ((w''' + \eta^2 w'))|_{\xi=1} = 0.$$

Однородная правая часть ОДУ. Собственные бинарные числа и функции.

В качестве примера рассмотрим задачи о собственных числах и собственных функциях для уравнения (1) с однородной нулевой правой частью и однородными нулевыми краевыми условиями, соответствующими жёсткому защемлению торцов оболочки. При таких краевых условиях детерминантно-краевая двухчастотная функция

$$\begin{aligned} D_Z(\beta_1, \beta_2) &= 1 - \cos \beta_1 \cos \beta_2 - \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2\beta_1\beta_2} \sin \beta_1 \sin \beta_2 = \\ &= 2 \cos^2 \frac{\beta_1}{2} \cos^2 \frac{\beta_2}{2} \left(\frac{2}{\beta_1} \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} - \frac{2}{\beta_2} \operatorname{tg} \frac{\beta_2}{2} \right) \left(\frac{\beta_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} - \frac{\beta_2}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta_2}{2} \right) \end{aligned}$$

в зависимости вида от траектории принимает следующие выражения:

- на траектории Е (при значении $\beta_2 \rightarrow 0$)

$$D_{ZE}(\beta_1, 0) = 1 - \cos \beta_1 - \frac{\beta_1}{2} \sin \beta_1 = 2 \sin \frac{\beta_1}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} - \frac{\beta_1}{2} \right)$$

существует два типа корней (чётных и нечётных форм) (рисунок 3);

- на траектории К - линии уровня квадрата частоты при фиксированной несущей частоте $\beta_2 = const = \beta_{20i}$

$$D_{ZiC}(\beta_1) = 1 - \cos \beta_1; \quad D_{ZSi}(\beta_1) = 1 - \cos \beta_1 \cos \beta_{20i} - \frac{\beta_1^2 + \beta_{20i}^2}{2\beta_1\beta_{20i}} \sin \beta_1 \sin \beta_{20i}, \quad \beta_{20i} = 8.9868$$

здесь также существует два типа корней (чётных и нечётных форм) (рисунок 4);

- на траектории Т-Л при постоянном значении $\beta_1^2 \beta_2^2 = const = a_0$

$$D_{ZL}(\beta_1) = 1 - \cos \beta_1 \cos \frac{\sqrt[4]{a_0}}{\beta_1} - \frac{\beta_1^4 + a_0}{2\sqrt{a_0}} \sin \beta_1 \sin \frac{\sqrt[4]{a_0}}{\beta_1}$$

здесь также существует два типа корней (чётных и нечётных форм);

- на траектории Z - линии раздела гиперболически - гармонической и бигармонической модуляций ($\beta_1^2 \beta_2^2 = (\beta_1^2 + \beta_2^2)^2 / 4$, $\beta_1 = \beta_2$)

$$D_{ZK}(\beta) = 1 - \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \equiv 0$$

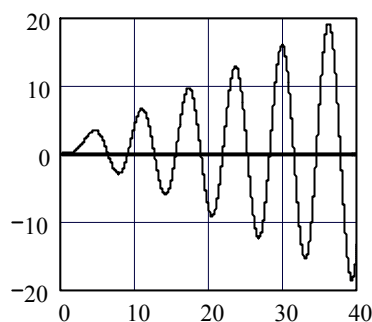
Несчётное множество нулей, как следует из приведенных значений с ростом величины несущей частоты (первые числа из пар) значения модулирующей частоты снижается. Для длин волнообразования (осцилляции) закономерность обратная – с понижением длины волны несущей осцилляции длина волны моделирующей возрастает.

Отметим одну важную особенность решений на траектории Е-Л при пересечении с траекторией Z – собственные значения $\beta_{1n} = 2\pi n$ (которые соответствуют решению Тимошенко-Лоренца) определяют численно связь геометрических и механических величин, а именно:

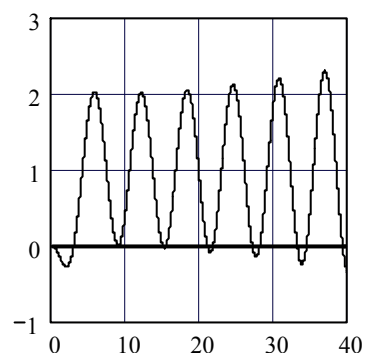
$$a_0 = 12c(1 - \mu_{12}\mu_{21})(L/R)^4(R/h)^2 = const = \beta_{1n}^4 = 16\pi^4 n^4$$

Из этих соотношений следует эффект «пи-энности», состоящий в том, что указанные характеристики жёстко связаны с иррациональным числом «пи». Решения подобного типа приведены в монографии [4].

На рисунках 3 и 4 представлены детерминантно-краевые функции ДКФ и их нули для траекторий нагружения Э, К и Т-Л, соответствующих осевому сжатию стержня и цилиндрической оболочки с жёстко защемлёнными торцами, где отчётливо видны различные виды пересечения или касания оси абсцисс.



а) траектория Е



б) траектория изогональности К

Рисунок 3 - Детерминантно-краевые и нули функции для двухчастотных бигармонических осесимметрических форм цилиндрической оболочки с жёстко защемлёнными торцами при осевом сжатии по траекториям Е и изогональности К.

Точность определения координат точки нуля существенно зависит от угла подхода ДКФ к оси абсцисс (или, что то же, производной ДКФ) в окрестности нуля; в точке касания особенно. На это обстоятельство следует обращать особое внимание и учитывать при решении задач на собственные значения многопараметрических механических систем. При прак-

тических расчётах в таких случаях приходится обеспечивать точность вычислений до седьмого знака после запятой при вычислительном «нуле» ДКФ на уровне $10^{-3} - 10^{-4}$

Собственные функции. Свойство изогональности и ортогональности. Указанным в предыдущем пункте собственным числам соответствуют собственные функции:

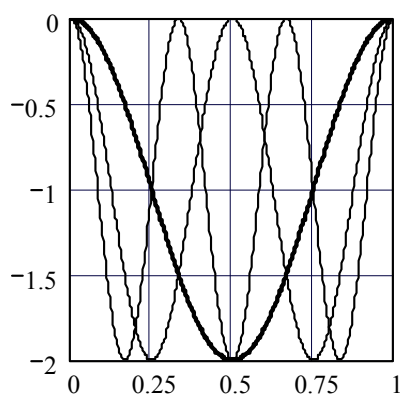
- на траектории Е свойство изогональности чётных и нечётных и ортогональности перекрёстных функций

$$w_{EC}(\xi, n, 0) = \cos 2\pi n \xi - 1, \quad w_{@S}(\xi, \beta_{1n}, 0) = (\cos \beta_{1n} \xi - 1) - 2\left(\frac{\sin \beta_{1n} \xi}{\beta_{1n}} - \xi\right)$$

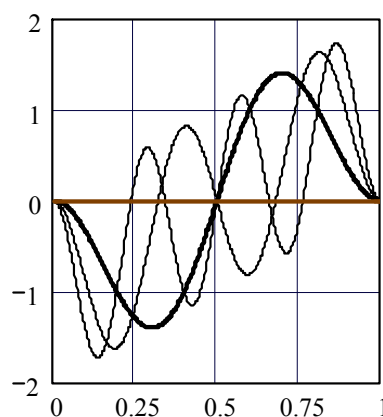
отражено в значениях скалярных произведений, приведенных ниже

$$J_{EC}\{n, m\} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m \\ 0.667 & \text{при } n \neq m \end{cases}, \quad J_{ES}\{n, m\} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m \\ 0.4 & \text{при } n \neq m \end{cases}, \quad J_{ESC}\{n, m\} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m \\ 0 & \text{при } n \neq m \end{cases},$$

а их вид для первых трёх собственных пар чисел представлен на рисунке 4;



а) чётные



б) нечётные

Рисунок 4 - Модулированные бигармонические двухчастотные осесимметрические формы цилиндрической оболочки с жёстко заделанными торцами при осевом сжатии по траектории Е

- на траектории К, свойство изогональности чётных и нечётных и ортогональности перекрёстных функций

$$w_{IC}(\xi, \beta_{10}, \beta_{1n}) = (\cos \beta_{1C0} \xi - \cos \beta_{1Cn} \xi) + 2\left(\frac{\sin \beta_{1C0} \xi}{\beta_{1C0}} - \frac{\sin \beta_{1Cn} \xi}{\beta_{1Cn}}\right),$$

$$w_{IS}(\xi, \beta_{10}, \beta_{1n}) = (\cos \beta_{1S0} \xi - \cos \beta_{1Sn} \xi) - 2\left(\frac{\sin \beta_{1S0} \xi}{\beta_{1S0}} - \frac{\sin \beta_{1Sn} \xi}{\beta_{1Sn}}\right),$$

отражено в значениях скалярных произведений, приведенных ниже

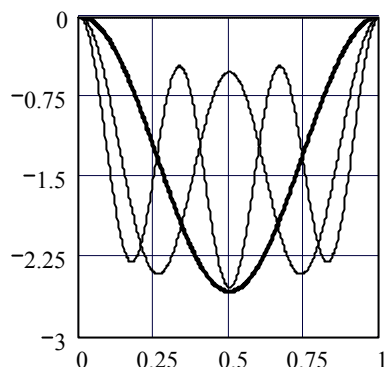
$$J_{IC}\{n, m\} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m \\ 0.5 & \text{при } n \neq m \end{cases}, \quad J_{IS}\{n, m\} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m \\ 0.773 & \text{при } n \neq m \end{cases}, \quad J_{ISC}\{n, m\} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m \\ 0 & \text{при } n \neq m \end{cases},$$

а их вид для первых трёх собственных пар чисел представлен на рисунке 5.

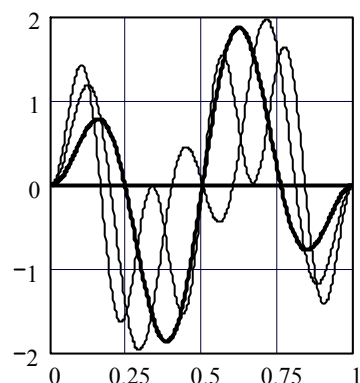
Свойство ортогональности для скалярного произведения собственных функций разных семейств (чётных и нечётных) очевидно, т.к. интеграл на интервале $\xi = 0,1$ от нечётной относительно середины интервала функции равен нулю, а произведение чётной относительно середины интервала функции на нечётную есть функция нечётная.

Обобщённый ряд Фурье по изогональной системе собственных функций. Свойство изогональности и ортогональности двух семейств собственных функций даёт возможность представления произвольной интегрируемой функции $f(\xi)$ обобщённым рядом Фурье:

$$S(\xi) \sim f(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \bar{w}_{Cn}(\xi, \beta_{20}, \beta_{2n}) + \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \bar{w}_{Sn}(\xi, \beta_{10}, \beta_{2n}) \quad (26)$$



а) чётные



б) нечётные

Рисунок 5 - Модулированные бигармонические двухчастотные осесимметрические формы цилиндрической оболочки с жёстко заделанными торцами при осевом сжатии по изогональной (изоклинной) траектории К

Коэффициенты ряда представляются конечной и рекуррентной формулами

$$c_n = \frac{1}{J_C} \int f(\xi) [\bar{w}_{Cn}(\xi, \beta_{1C0}, \beta_{1Cn}) - \frac{J_C}{I_C}] d\xi \quad (27)$$

$$d_n = d_{n-1} - \frac{1}{J_S} \int f(\xi) [\bar{w}_{Sn}(\xi, \beta_{2S0}, \beta_{2Sn}) - \bar{w}_{Sn-1}(\xi, \beta_{2S0}, \beta_{2Sn-1})] d\xi \quad (28)$$

где соответствующие интегралы равны

$$I_C = \int_0^1 \bar{w}_{Cn}(\xi, \beta_{1C0}, \beta_{1Cn}) d\xi, \quad J_C = \left(\int_0^1 \bar{w}_{Cn}^2(\xi, \beta_{1C0}, \beta_{1Cn}) d\xi \right)^{1/2}, \quad J_S = \left(\int_0^1 \bar{w}_{Sn}^2(\xi, \beta_{1S0}, \beta_{1Sn}) d\xi \right)^{1/2}$$

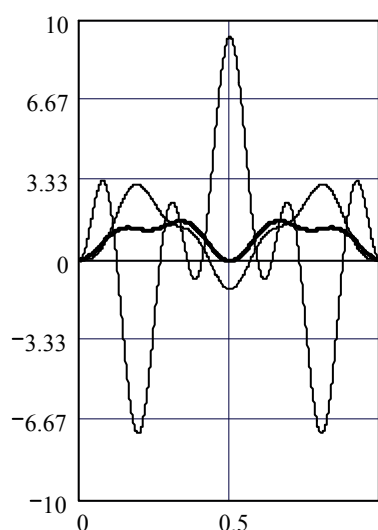
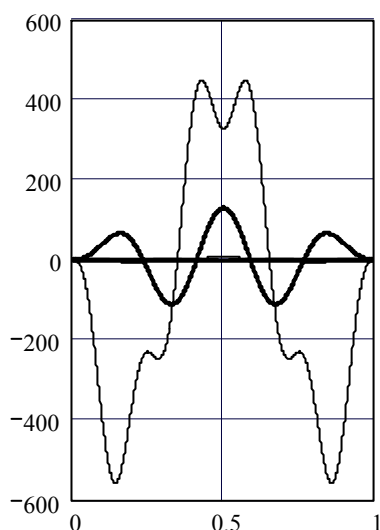
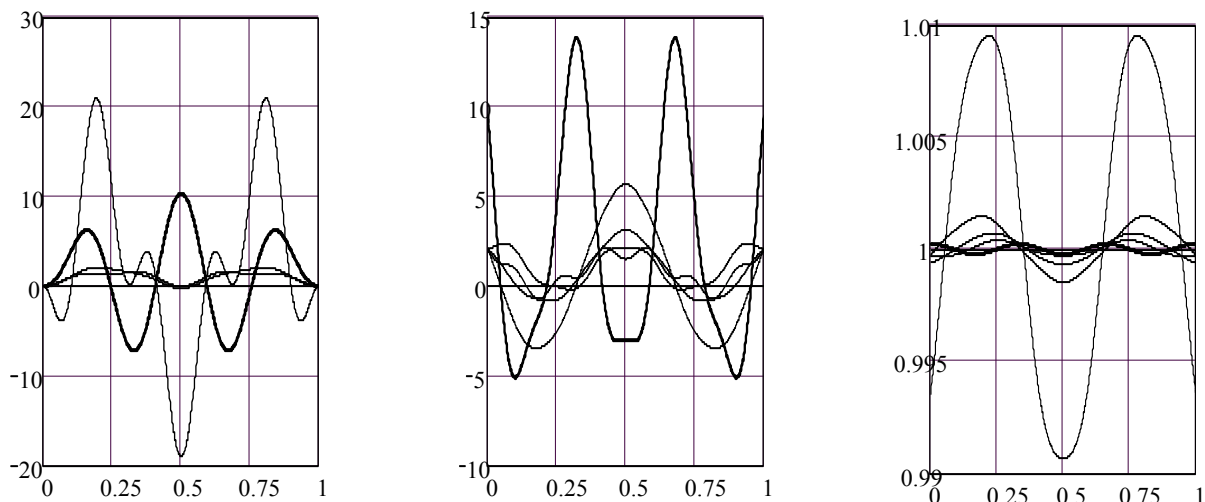


Рисунок 6 - Модулированные бигармонические двухчастотные осесимметрические формы цилиндрической оболочки с жёстко заделанными торцами при осевом сжатии по траектории Т ($k = 1.0568, k = 1.9705$ и $k = 1.25, 1 = 1.513776, k = 1.62425$)

Неоднородная правая часть ОДУ. Эволюцию осесимметрических форм цилиндриче-

ской оболочки по линейной теории рассмотрим на примере траектории нагружения Т-Л, детерминантно-краевая функция которой (ДКФ) представлена на рисунке 6 при значениях параметра $1 < k < 2$. В окрестности оси абсцисс ДКФ имеет точки касания и точки пересечения, поэтому при определении нулей требуется применять соответствующие процедуры для повышения соответствующей точности (разрядности).

На графиках (рисунок 7), представляющих модулированные осесимметрические формы цилиндрической оболочки с различными условиями на торцах при осевом сжатии по траектории Т-Л выше порога упорядочения, видно резкое возрастание на два-три прядка величины прогиба. Форма прогиба сложная с участками немонотонности (типа биения) и, таким образом, на начальном участке наблюдается переход от высшей частоты к низшей.



а) жёсткое закрепление

б) шарнирное закрепление

в) свободное

Рисунок 7 - Бигармонические модулированные осесимметрические формы цилиндрической оболочки с жёстко и шарнирно закреплёнными и свободными торцами при осевом сжатии по мере увеличения нагрузки по траектории Т-Л ($k = 1.005, k = 1.2, k = 1.4, k = 1.6, k = 1.8$)

Выводы.

В области бигармонических модулированных форм существует подобласть в виде криволинейного треугольника, ограниченного снизу отрезком (ЛРМ-Е) оси абсцисс до первой критической частоты $\beta_{1\min}$, сверху - частью параболы (ЛРМ-Т) и справа - отрезком касательной ЛУЧ-К к параболе ЛРМ-Т, проходящей через конец отрезка ЛРМ-Е.

Модулированные собственные функции бинарных критических точек изогональны (изоклинны) в каждом из множеств (чётных или нечётных) и ортогональны между собой.

Литература

1. Вольмир А.С.. Устойчивость упругих систем. -М.: Наука, 1967. - 984 с.
2. Кан С.Н. Строительная механика оболочек. -М.: Машиностроение, 1966. - 508 с.
3. Пановко Я.Г. Устойчивость и колебания упругих систем.-М.: Наука, 1967. - 420 с.
4. Коллатц Л. Задачи на собственные значения.—М.: Наука, 1968. - 503 с.
5. Кильчевский Н.А., Никулинская С.Н. Об осесимметричной форме потери устойчивости круговой цилиндрической оболочки.// Прикл. механика, 1965, т. 1, № 11, с. 1-6.
6. Григолюк Э.И., Кабанов В.В.. Устойчивость оболочек. -М.: Наука, 1978. - 352 с.
7. Григолюк Э.И., Лопаницын Е.А. О методе непрерывного продолжения по параметру. // Доклады РАН, 1994. Т. 335. № 5. с. 95-99.
8. Матвеев Е.А., Фролов А.Б. Конечные прогибы цилиндрических оболочек перед потерей

- устойчивости под действием равномерного внешнего давления. // Известия МГТУ «МАМИ» № 2 (6), 2008. с. 152-157.
9. Lorenz R. // Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, v. 52, Leipzig.: 1908, p. 1706.
10. Тимошенко С.П. К вопросу о деформациях и устойчивости цилиндрической оболочки. // Вестн. о-ва технол., 1914, т. 21, с. 785-792.
11. Король Е.З. К определению собственных чисел и собственных функций для краевых задач со многими параметрами // Избранные проблемы прочности современного машиностроения. Сборник научных статей, посвящённый восьмидесятилетию члена-корреспондента Российской академии наук Эдуарда Ивановича Григолюка (1923-2005). – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. с.124-49.

Задача о флаттере пластины в геометрически нелинейной постановке

к.ф.-м.н. доц. Кудрявцев Б.Ю.
МГТУ «МАМИ»

8-906-782-99-16, buk77777@tochka.ru

Ключевые слова: флаттер, критическая скорость, поток газа, динамическая устойчивость пластины, метод Бубнова-Галеркина.

В исследованиях по панельному флаттеру, как правило, использовалась линейная «поршневая» теория, а прогибы тонкостенных элементов конструкций предполагались малыми и удовлетворяли линейным дифференциальным уравнениям [1, 2]. Недостаточность такого подхода обоснована в [3, 4]. Предположение о малых прогибах, очевидно, тоже вносит существенные ограничения и может заметно упрощать и искажать результаты [5, 6]. В предлагаемой статье рассмотрены аэроупругие колебания пластины и пологой оболочки в рамках системы Кармана с использованием работ [7, 8]; проведены параметрические исследования и сравнение с ранее полученными результатами.

Пусть имеется тонкий клиновидный профиль, обтекаемый без угла атаки газом с большой сверхзвуковой скоростью. Вектор скорости потока направлен по оси тела (перпендикулярно кромке). Начало ортогональной системы координат совместим с кромкой профиля, ось ОХ направим по вектору скорости, ОУ – по кромке, ОZ – так, чтобы система координат была правой. В недеформированном состоянии уравнение образующей будет $z = kx + \varphi(x), |\varphi(x)/kx| \ll 1$. Будем рассматривать часть поверхности профиля, занимающую

в плоскости ОХУ область $G = \{(x, y), x_0 \leq x \leq x_0 + l_1, 0 \leq y \leq l_2\}$ и свободно опертую по кромкам. Для описания колебаний оболочки будем использовать уравнения Кармана

$$\frac{D}{h} \Delta^2 w = L(w, \Phi) + \frac{q}{h} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{1}{E} \Delta^2 \Phi = -0.5 L(w, w), \quad (1)$$

$$w|_{x=x_0} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=x_0} = w|_{x=x_0+l_1} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=x_0+l_1} = 0,$$

$$w|_{y=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = w|_{y=l_2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=l_2} = 0,$$

с граничными условиями

$$L(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y},$$

где

$$q = \Delta p = \frac{2\kappa p}{\kappa + 1} (M^2 t g^2 \beta - 1) - A_1 M \left(\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{A_2}{c_0^2} x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) +$$

$$+ A_1 c_0 M^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + A_2 M^2 x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$