устойчивости под действием равномерного внешнего давления.// Известия МГТУ «МАМИ» № 2 (6), 2008. с. 152-157.

9. Lorenz R.//Zeitschrift des Vereines deutscher Ingeniere, v. 52, Leiopzig.: 1908, p. 1706.
10. Тимошенко С.П. К вопросу о деформациях и устойчивости цилиндрической оболочки. // Вестн. о-ва технол., 1914, т. 21, с. 785-792.
11. Король Е.З. К определению собственных чисел и собственных функций для краевых задач со многими параметрами// Избранные проблемы прочности современного машиностроения. Сборник научных статей, посвящённый восьмидесятилетию члена-корреспондента Российской академии наук Эдуарда Ивановича Григолюка (1923-2005). – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. с.124-49.

Задача о флаттере пластины в геометрически нелинейной постановке

к.ф.-м.н. доц. Кудрявцев Б.Ю.
МГТУ «МАМИ»
8-906-782-99-16, buk77777@tochka.ru

Ключевые слова: *флаттер, критическая скорость, поток газа, динамическая устойчивость пластины, метод Бубнова-Галеркина.*

В исследованиях по панельному флаттеру, как правило, использовалась линейная «поршневая» теория, а прогибы тонкостенных элементов конструкций предполагались малыми и удовлетворяли линейным дифференциальным уравнениям [1, 2]. Недостаточность такого подхода обоснована в [3, 4]. Предположение о малых прогибах, очевидно, тоже вносит существенные ограничения и может заметно упрощать и искажать результаты [5, 6]. В предлагаемой статье рассмотрены аэроупругие колебания пластины и пологой оболочки в рамках системы Кармана с использованием работ [7, 8]; проведены параметрические исследования и сравнение с ранее полученными результатами.

Пусть имеется тонкий клиновидный профиль, обтекаемый без угла атаки газом с большой сверхзвуковой скоростью. Вектор скорости потока направлен по оси тела (перпендикулярно кромке). Начало ортогональной системы координат совместим с кромкой профиля, ось OX направим по вектору скорости, OY – по кромке, OZ – так, чтобы система координат была правой. В недеформированном состоянии уравнение образующей будет $z = kx + \varphi(x), \left|\varphi(x)/kx\right| << 1.$ Будем рассматривать часть поверхности профиля, занимающую в плоскости OXY область $G = \{(x,y), x_0 \le x \le x_0 + l_1, 0 \le y \le l_2\}$ и свободно опертую по кромкам. Для описания колебаний оболочки будем использовать уравнения Кармана

$$\frac{D}{h}\Delta^2 w = L(w,\Phi) + \frac{q}{h} - \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\ \ \frac{1}{E}\Delta^2\Phi = -0.5L(w,w), \tag{1}$$

$$w|_{x=x_0} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}|_{x=x_0} = w|_{x=x_0+l_1} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}|_{x=x_0+l_1} = 0,$$

$$w|_{y=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}|_{y=0} = w|_{y=l_2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}|_{y=l_2} = 0,$$

с граничными условиями

$$L(u_1,u_2) = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x\partial y},$$

где

$$q = \Delta p = \frac{2\kappa p}{\kappa+1}(M^2 tg^2\beta - 1) - A_1 M\left(\frac{\partial w}{\partial t} + v\frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{A_2}{c_0^2}x\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x} + v^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) +$$

$$+ A_1 c_0 M^2\frac{\partial\varphi}{\partial x} + A_2 M^2 x\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},$$

$$A_1 = \frac{4\kappa ptg\beta}{(\kappa+1)c_0}(1+2\varepsilon-\varepsilon a), A_2 = \kappa ptg\beta\left(1-\frac{12\varepsilon a}{\kappa(\kappa+1)}\right),$$

$$\varepsilon = \frac{\kappa-1}{\kappa+1}, a = 1+\frac{2}{(\kappa-1)M^2tg^2\beta},$$

Φ - функция напряжений, w – прогибы оболочки, D и h – ее цилиндрическая жесткость и толщина, E,ρ,ν - модуль Юнга, плотность и коэффициент Пуассона материала, p и c_0 - давление и скорость звука в невозмущенном потоке, κ - показатель политропы, v – скорость потока газа, $M = v/c_0$ - число Маха, $\alpha = arctg(k)$ - угол полураствора клина, наклон ударной волны β определяется из уравнения $tg\beta = tg\alpha + a\varepsilon tg\beta$ [4].

Выделим в (1) основное состояние $w_0(x,y),\Phi_0(x,y)$ из системы:

$$D\Delta^2 w_0 = hL(w_0,\Phi_0) + \frac{2\kappa p}{\kappa+1}(M^2tg^2\beta-1) + A_1c_0M^2(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial w_0}{\partial x}) + A_2M^2x\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial w_0}{\partial x^2}\right), \quad (2)$$

$$\Delta^2\Phi_0 + 0.5L(w,w) = 0.$$

Положим $w = w_0 + w_1, \Phi = \Phi_0 + \Phi_1$, где w_1, Φ_1 - малые возмущения основного состояния и подставим эти выражения в (1). Отбросив слагаемые, оказывающие второстепенное влияние на результат [4] (в частности, содержащие Φ_1), получим:

$$D\Delta^2 w_1 = L(w_1,\Phi_0) - A_1M\left(\frac{\partial w_1}{\partial t}+v\frac{\partial w_1}{\partial x}\right) - A_2M^2x\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}+\frac{2}{v}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x\partial t}+\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}\right) - \rho h\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Будем искать прогибы w_0 в виде:

$$w_0(x,y) = c\sin\frac{\pi}{l_1}(x-x_0)\sin\frac{\pi y}{l_2}, c\in R, \omega\in C.$$

Согласно [5]

$$\Phi_0 = \frac{c^2E}{32}\left(\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2\cos\frac{2\pi(x-x_0)}{l_1}+\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2\cos\frac{2\pi y}{l_2}+\frac{cl_1^4l_2^4}{\pi^2(l_1^2+l_2^2)^2}\left(\frac{k_x}{l_2^2}+\frac{k_y}{l_1^2}\right)\sin\frac{\pi}{l_1}(x-x_0)\sin\frac{\pi y}{l_2}\right)+$$

$$+0.5(p_xy^2+p_yx^2),$$

где p_x, p_y - срединные усилия на кромках.

Рассмотрим прямоугольную пластину, составляющую часть поверхности тонкого клина ($\varphi = 0$). Тогда при условии не сближения кромок [5]

$$p_x = Ec^2\frac{\pi^2}{8l_2^2}\frac{\nu+l_2^2l_1^{-2}}{1-\nu^2}, p_y = Ec^2\frac{\pi^2}{8l_1^2}\frac{\nu l_2^2l_1^{-2}+1}{1-\nu^2}.$$

Подставим выражения Φ_0 и w_0 в (2) и применим метод Бубнова-Галеркина, получим уравнение с одним неизвестным c, из которого вычислим его и определим функцию Φ_0.

Динамический прогиб w_1 представим в виде:

$$w_1 = \exp(\omega t)(c_1\sin(\pi(x-x_0)/l_1)+c_2\sin(2\pi(x-x_0)/l_1)+c_3\sin(3\pi(x-x_0)/l_1)+$$

$$+c_4\sin(4\pi(x-x_0)/l_1))\sin(\pi y/l_2), c_1,c_2,c_3,c_4\in R.$$

Подставив это выражение в (3) и снова проведя процедуру Бубнова-Галеркина, получим систему уравнений с неизвестными c_1,c_2,c_3,c_4. Приравняв ее определитель к нулю, будем искать критическую скорость потока $M_{кр}$, то есть наименьшую скорость, при которой комплексная частота ω переходит в правую полуплоскость.

В качестве примера рассмотрена стальная пластина при следующих значениях параметров:

$$E = 2 \cdot 10^{11} па, h = 0{,}001м, \rho = 8 \cdot 10^3 кг/м^3, p = 10^5 па, \kappa = 1{,}4, \nu = 0{,}3, c_0 = 330 м/с, x_0 = 1м.$$

В таблице 1 представлены значения критической скорости для различных соотношений длин сторон пластины и углов α.

Таблица 1

	$l_1 = 0{,}25$, $l_2 = 0{,}5$	$l_1 = 0{,}25$, $l_2 = 0{,}375$	$l_1 = 0{,}25$, $l_2 = 0{,}25$	$l_1 = 0{,}375$, $l_2 = 0{,}25$	$l_1 = 0{,}5$, $l_2 = 0{,}25$
$\alpha = 10^\circ$	12,0	11,9	11,6	10,2	8,5
$\alpha = 15^\circ$	8,3	8,2	7,9	7,5	6,1
$\alpha = 20^\circ$	6,4	6,3	6,0	5,7	5,2

Если взять результаты, полученные при решении задачи в линейной постановке [7], то в нашем случае критическая скорость флаттера получается большей. Это можно объяснить наличием усилий в срединной поверхности, возникающих при статических прогибах и способствующих стабилизации. Увеличение размеров пластины, с одной стороны, должно снижать динамическую устойчивость, с другой стороны, увеличиваются статические прогибы и цепные усилия. Отсюда не монотонная (как при линейной постановке задачи) зависимость критической скорости М от величины пластины. Таким образом, обнаружен неожиданный механический эффект, когда при некоторых условиях увеличение размеров пластины (а также угла полураствора клина α [6]) повышает динамическую устойчивость.

Таблица 2.

	$l_1 = 0{,}25$, $l_2 = 0{,}5$	$l_1 = 0{,}25$, $l_2 = 0{,}375$	$l_1 = 0{,}25$, $l_2 = 0{,}25$	$l_1 = 0{,}375$, $l_2 = 0{,}25$	$l_1 = 0{,}5$, $l_2 = 0{,}25$
$\alpha = 10^\circ$	12,2	12,0	11,6	9,8	7,9
$\alpha = 15^\circ$	8,5	8,4	8,0	7,4	5,7
$\alpha = 20^\circ$	6,7	6,5	6,1	5,7	5,3

Таблица 3.

	$l_1 = 0{,}25$, $l_2 = 0{,}5$	$l_1 = 0{,}25$, $l_2 = 0{,}375$	$l_1 = 0{,}25$, $l_2 = 0{,}25$	$l_1 = 0{,}375$, $l_2 = 0{,}25$	$l_1 = 0{,}5$, $l_2 = 0{,}25$
$\alpha = 10^\circ$	12,9	12,5	11,7	9,9	7,5
$\alpha = 15^\circ$	9,4	9,1	8,2	7,1	5,4
$\alpha = 20^\circ$	7,8	7,3	6,4	5,5	4,3

Для сравнения в таблицах 2 и 3 приведены значения критической скорости, полученные при трехчленном ($c_4 = 0$) и двучленном ($c_3 = 0, c_4 = 0$) представлении соответственно.

Из таблиц видно, что при различных приближениях в методе Бубнова-Галеркина тенденции поведения критической скорости сохраняются. Это соответствует общепринятым представлениям о применимости данного метода [7]. В отдельных случаях наблюдается хорошая сходимость уже при невысоких приближениях, например для квадратной пластины. Но в общем она не настолько стабильная и быстрая, как в случае исследования аналогичной задачи с использованием линейной поршневой теории [9].

Выводы

При исследовании задачи о флаттере пластины в нелинейной постановке обнаружены новые механические эффекты, когда критическая скорость потока не монотонно зависит от параметров задачи. Для принципиального исследования поведения критической скорости вполне достаточно применения метода невысоких приближений Бубнова-Галеркина.

Литература

1. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек // Механика деформируемого твердого тела. М., 1978. (Итоги науки и техники / ВИНИТИ; Т.11).
2. Ильюшин А.А., Кийко И.А. Новая постановка задачи о флаттере пологой оболочки. ПММ, 1994, т. 58, в. 3, с 167-171.
3. Кийко И.А. Постановка задачи о флаттере оболочки вращения и пологой оболочки, обтекаемых потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью. ПММ, 1999, т. 63, в. 2, с. 305-312.
4. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М., Наука, 2006, 247 с.
5. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. М.:Гостехиздат, 1956, 419 с.
6. Кийко И.А., Кудрявцев Б.Ю. Нелинейные аэроупругие колебания прямоугольной пластины // Вестн. МГУ. Сер. 1, Матем, мех. 2005. № 1. с. 68-71.
7. Кудрявцев Б.Ю. Флаттер прямоугольной пластины, составляющей часть плоскости тонкого клина, обтекаемого потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью. Деп. в ВИНИТИ, 2002, № 1085-В 2002.
8. Кудрявцев Б.Ю. Исследование задачи о флаттере в нелинейной постановке. Изв. ТулГУ. Сер. Мат. Мех. Инф.-Т. 12.-Вып. 2. мех. Тула: изд. ТулГУ, 2006, с. 61-68.
9. Кудрявцев Б.Ю. Флаттер прямоугольной пластины. Деп. в ВИНИТИ, 1998, № 1027-В 98.