

исследований.

В поведении амплитуд проявлялся гистерезисный характер. В зависимости от увеличения или уменьшения амплитуды напряжения на излучающем преобразователе (сначала амплитуда уменьшалась, затем увеличивалась) пороговое напряжение появления первого пика менялось. Амплитуда колебаний на приёмном преобразователе также менялась.

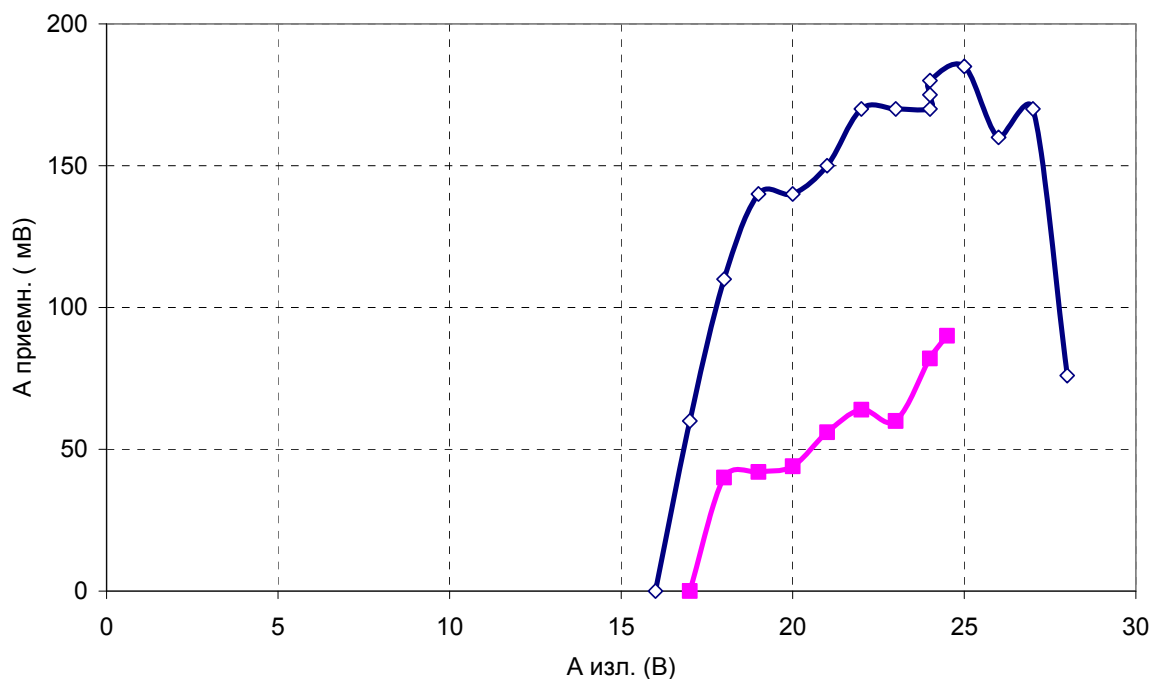


Рис. 6. Пороговая зависимость амплитуды колебаний на приёмном преобразователе от амплитуды колебаний на излучающем преобразователе. Пустые метки – ход вниз, цельные квадратики – ход вверх.

Выводы

Проведённые ультразвуковые исследования показывают, что в области контактов шариковых элементов подшипниковых узлов могут возникать значительные механические напряжения. В результате возникают колебания шариков на одной из мод их собственных колебаний. Возникновение этих колебаний носит пороговый характер. С учётом малого радиуса контактной площадки (10 – 100 мкм) возникающие при контакте напряжения имеют значительную величину. Приведённые результаты могут представлять интерес при расчёте шариковых элементов подшипниковых узлов.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 06-02-16658-а.

Литература

1. А.И. Спришевский. Подшипники качения. М.: Машиностроение. 1969. 632с.
2. Н. Hertz. Über die Berührung fester elastischer Körper. Gesammelte Werke, 1895, Bd. I, S. 155-173.
3. Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. Теория упругости. М.: Наука. 1978. 293с.

Влияние осесимметричных начальных неправильностей сферической оболочки на ее критическую нагрузку

д.т.н., проф. Григолюк Э.И., д.ф.-м.н., проф. Лопаницын Е.А.
МГТУ «МАМИ»

В работе приведены результаты исследования влияния осесимметричных начальных неправильностей формы жёстко закреплённого пологого сферического купола, нагруженного равномерным поперечным давлением, на его верхнюю критическую нагрузку. В качестве начальных неправильностей используются формы изогнутой поверхности сферического купола, присущие ему на этапах до- и закритического осесимметричного деформирования. Для описания процесса деформирования купола применяются уравнения Маргерра в осесиммет-

ричной постановке. Их решение строится методом Релея-Ритца с аппроксимацией радиальных перемещений и прогиба купола суммами по функциям Бесселя. Решение получающейся методом Релея-Ритца системы нелинейных алгебраических уравнений ищется методом продолжения с выбором параметра продолжения, близкого к оптимальному параметру. Рассмотрены отклонения формы купола с наибольшими значениями, не превышающими одной трети от толщины стенки, что соответствует изменямости формы купола в пределах до 0.3% от его радиуса. Показана различная степень влияния форм начальной неправильности на критическую нагрузку. Найдено, что получающиеся значения верхней критической нагрузки в выбранном диапазоне изменения величины начальной неправильности полностью охватывают диапазон её экспериментальных значений.

Введение

Теория оболочек является одним из подробно изученных разделов механики. История ее развития насчитывает почти 200 лет. Однако, невзирая на её проработанность, в настоящее время в теории оболочек еще остаются нерешённые проблемы. Одной из них является проблема, которая заключается в отсутствии окончательного обоснования причин несовпадения теоретически и экспериментально найденных критических нагрузок для тонкостенных конструкций. Впервые этот факт был обнаружен в работе Б.А. Болея и Э.Э. Секлера (1939) (см. работу Кармана и Цзяна [30](1939)), которые экспериментально показали, что критическая нагрузка потери устойчивости сферических оболочек почти в 4 раза меньше той, которая получается из расчёта по формуле Цолли [56](1915). В дальнейшем реальность такого рассогласования была подтверждена многими экспериментаторами.

Наибольшее количество исследований по сферическим оболочкам выполнено для жёстко заделанного по контуру упругого пологого сферического купола, нагруженного равномерным поперечным давлением (см. рис. 1). Практически все авторы теоретических исследований для описания потери устойчивости купола с учётом его геометрически нелинейного предварительного напряжённо-деформированного состояния использовали уравнения Маргерра. К числу таких работ, где рассматривалась потеря устойчивости сферического купола в осесимметричной постановке, следует отнести работы В.И. Феодосьева [19](1946), Е. Рейса [36](1956), Р. Симонса [38](1956), Е. Рейса с Г. Гринбергом и Г. Келлером [37](1957), Г. Вейничке [51](1958), Р. Арчера [22](1958), Б. Будянского [25](1959), М.С. Корнишина [12](1964) и др. В некоторых работах авторы рассматривали не только потерю устойчивости купола, но и его закритическое поведение. Это работы Г. Вейничке [52](1960), Дж. Тёрстона [42](1961), Дж. Мескола [34](1966), Д.И. Шилькрута с Н.В. Шевандроновым, В.П. Мораром и Ю.А. Максимовым [17](1969), Л. Бауэра с Е. Рейсом и Г. Келлером [24](1973), Н.В. Валишвили [1](1976) и т.д.

Перечень работ с экспериментальными исследованиями потери устойчивости пологих сферических куполов менее обширен, чем с теоретическими исследованиями. Среди них, в первую очередь, должны быть упомянуты работы Г. Цзяна [45](1942), К. Клёппеля с О. Юнгблатом [31](1953), А. Каплана с Й. Фунгом [28](1954), Р. Хоумвуда с А. Брайном и А. Джонсоном [27](1963), М. Кренцке с Т. Кирнаном [32](1963), Г. Адама с П. Кингом [21](1965), С. Тильмана [44](1970), М. Сунагавы с К. Ичидой [39,40](1973) и [41](1974) и Дж. Галлетли [26](1976).

Более подробно история развития теории и практики расчётов на устойчивость сферических куполов вместе с экспериментальными исследованиями описана в книгах С.П. Тимошенко с С. Войновским-Кригером [16], А.С. Вольмира [2], Э.И. Григолюка с В.В. Кабановым [5], в монографии Э.И. Григолюка с В.И. Мамаем [9], а также в обзорах Т. Кармана с А. Керром [29], М. Сунагавы с Н. Кумаи [14] и И.И. Воровича и Н.И. Минаковой [3].

Сопоставление экспериментально и теоретически полученных значений критических нагрузок для жёстко заделанных по контуру пологих сферических куполов, находящихся под действием равномерного поперечного давления, показывает их значительное расхождение. Это видно на рис. 2, взятом из [9].

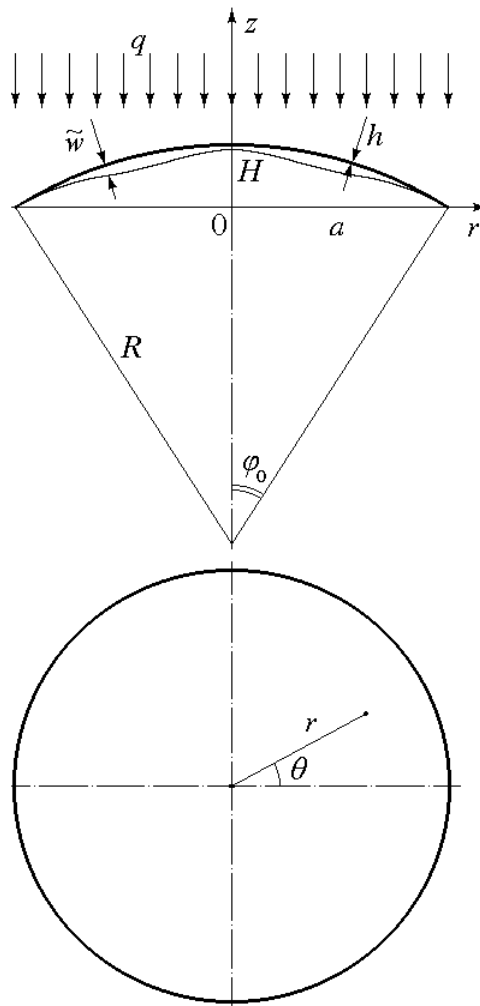


Рис. 1.

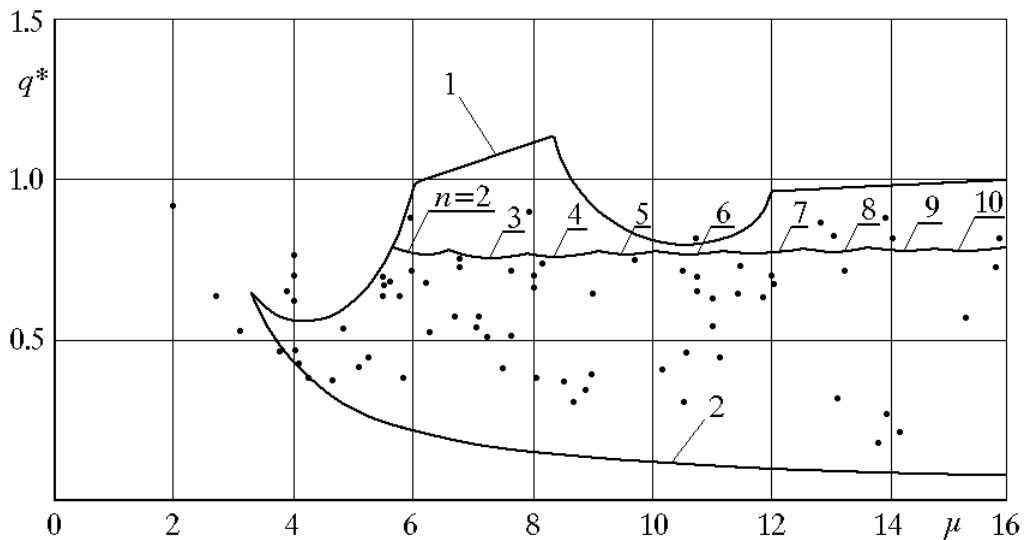


Рис. 2.

Здесь под $q^* = [3(1 - \nu^2)]^{1/2} qR^2 / (2Eh^2)$ понимается безразмерное поперечное давление, а под $\mu = [12(1 - \nu^2)]^{1/4} [a^2 / (Rh)]^{1/2}$ – параметр тонкостенности оболочки. Линиями 1 и 2 на рис. 2 показаны теоретически найденные зависимости верхней q_+ и нижней q_- критических нагрузок осесимметрично деформирующегося идеально сферического купола от его параметра тонкостенности. Волнистая линия с обозначениями $n = 2, 3, \dots, 10$ показывает значения наименьшей критической нагрузки его несимметричной потери устойчивости. Точками на

рис. 2 отмечены значения верхней критической нагрузки, которые взяты из экспериментальных работ различных исследователей.

Причин такого несовпадения результатов несколько. Это как условия экспериментов, так и особенности математической модели оболочки. В первую очередь сюда относятся наличие у оболочки начальных неправильностей и начальных напряжений в ней, отличие условий нагружения оболочки и закрепления её на контуре от тех, которые учитываются в математической модели, неоднородность свойств материала оболочки, несимметричность её деформирования и т.п. Попытки учесть в расчётах эти особенности реального сферического купола и способов его нагружения и закрепления, как отмечено в [9], успехом не увенчались. Это можно видеть по работам М. Уемуры [49](1953) и [18](1969), Б. Будянского [25](1959), М.С. Корнишина [12](1964), Р.Г. Суркина [15](1965) и Дж. Тёрстона с Ф. Пеннингом [43](1966), где рассматривались несовершенства формы купола, и по работам М. Мишонова [35](1966), Ф. Бауэра с Г. Келлером и Е. Рейсом [23](1967), Л. Ванга [50](1968) и А.В. Погорелова [13](1968), где рассматривались несовершенства способа закрепления купола.

В конце 1970-х годов интерес к этой проблеме угас. Не последнюю роль в этом сыграло отсутствие устойчивого метода решения систем нелинейных алгебраических уравнений большого порядка, к которым сводятся различными методами дискретизации дифференциальные уравнения равновесия оболочек. Поэтому по сей день не существует набора параметров математической модели оболочки, записанной на основе уравнений Маргерра или Рейснера, с помощью незначительного варьирования которых можно было бы получить весь спектр экспериментально найденных значений верхней критической нагрузки. В такой ситуации для инженерных расчётов применяется коррекция теоретически полученных значений критической нагрузки посредством трех экспериментально найденных коэффициентов, учитывающих начальные прогибы оболочки, вид граничных условий и возможность работы материала оболочки в упруго-пластической области.

Интерес к этой проблеме возродился только после внедрения в расчётную практику методов продолжения, позволяющих без каких-либо серьёзных трудностей с вычислительной устойчивостью решения проходить любые предельные точки на траектории нагружения оболочек. Примером этого могут служить работы С.С. Гаврюшина [9](1994), Э.И. Григолюка с Е.А. Лопаницыным [8](2002), Я. Марциновского [33](2004) и монография В.Л. Якушева [20](2004). Приемлемый компромисс между расчётными и экспериментальными данными был найден К. Учиямой и М. Ямадой, которые, как и многие, сначала пытались получить их согласование посредством учёта осесимметричных и несимметричных начальных неправильностей формы оболочки (см. [46](1974) и [47](1975)). Суть их подхода заключается в следующем. В экспериментальных работах С. Ямада, К. Учияма и М. Ямада [53](1980) и [54](1983) помимо других параметров процесса деформирования оболочки замерили её начальный прогиб, который появлялся после её закрепления на испытательном стенде. Эти данные о начальном прогибе оболочки М. Ямада с С. Ямадой [55](1983) и К. Учияма с С. Ямадой [48] (2000) использовали в своих расчётах методом конечных элементов процесса деформирования оболочки с её прощёлкиванием и последующим полным выворачиванием. В результате они получили высокую степень согласованности теоретических и экспериментальных значений верхней критической нагрузки.

В связи с вышеизложенным целью данного исследования является выяснение степени влияния осесимметричных начальных неправильностей формы оболочки на её критическую нагрузку. В отличие от подобных исследований других авторов, где форма начальной неправильности оболочки задавалась по усмотрению исследователя достаточно произвольным образом, в данной работе в качестве начальных неправильностей использованы формы изогнутой поверхности идеально сферической оболочки, присущие ей на этапах до- и закритического деформирования.

Постановка задачи

Для описания процесса деформирования оболочки конечных прогибов как в докритическом состоянии, так и во время потери устойчивости и при закритическом деформирова-

нии в работе используются уравнения Маргерра, записанные в полярной системе координат r и θ (см. рис. 1). Основанием этих уравнений является квадратичный закон описания деформаций. Для осесимметрично деформирующегося пологого сферического купола с малыми осесимметричными начальными неправильностями $\tilde{w} = \tilde{w}(r)$ он имеет вид

$$e_{rr} = \frac{du}{dr} - \frac{w}{R} + \frac{\vartheta_r^2}{2} + \vartheta_r \tilde{\vartheta}_r, \quad e_{\theta\theta} = \frac{u}{r} - \frac{w}{R}, \quad \kappa_{rr} = -\frac{d\vartheta_r}{dr}, \quad \kappa_{\theta\theta} = -\frac{1}{r} \vartheta_r,$$

где: e_{rr} , $e_{\theta\theta}$, κ_{rr} и $\kappa_{\theta\theta}$ – деформации и кривизны срединной поверхности купола, u – радиальные перемещения её точек, w – прогиб, $\vartheta_r = dw/dr$ и $\tilde{\vartheta}_r = d\tilde{w}/dr$ – углы поворота нормали к срединной поверхности купола в радиальном направлении.

Эти деформационные соотношения с использованием закона Гука

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{rr} + \nu\varepsilon_{\theta\theta}), \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\theta\theta} + \nu\varepsilon_{rr})$$

дают следующие выражения для потенциальной деформации купола и работы приложенного к нему поперечного давления

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^{2\pi} [B(e_{rr}^2 + 2\nu e_{rr} e_{\theta\theta} + e_{\theta\theta}^2) + D(\kappa_{rr}^2 + 2\nu\kappa_{rr}\kappa_{\theta\theta} + \kappa_{\theta\theta}^2)] r dr d\theta, \quad (1)$$

$$A = \int_0^a \int_0^{2\pi} q wr dr d\theta, \quad (2)$$

где $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ – цилиндрическая жёсткость стенки купола, а $B = Eh/(1-\nu^2)$ – её жёсткость на растяжение-сжатие.

Потенциальная энергия деформации купола и работа приложенного к нему поперечного давления посредством подстановки их в вариационное уравнение Лагранжа

$$\delta(\Pi - A) = 0, \quad (3)$$

позволяют получить уравнения равновесия, называемые уравнениями Маргерра

$$\begin{cases} \nabla^2 \nabla^2 F + \frac{Eh}{R} \nabla^2 w + \frac{Eh}{2} [N_2(w, w) + 2N_2(w, \tilde{w})] = 0, \\ D \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{1}{R} \nabla^2 F - N_2(F, w - \tilde{w}) = -q, \quad (0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi) \end{cases}, \quad (4)$$

и соответствующие им граничные условия для случая жёсткой заделки купола по контуру

$$u, w, \vartheta_r, \dots, Q_r^o - \text{ограничены при } r = 0, \quad u = w = \vartheta_r = 0 \text{ при } r = a, \quad (5)$$

где: ∇^2 – оператор Лапласа, N_2 – нелинейный дифференциальный оператор второго порядка

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}, \quad N_2(f, g) = \frac{1}{r} \frac{d^2 f}{dr^2} \frac{dg}{dr} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \frac{d^2 g}{dr^2},$$

F – силовая функция Эри, определяемая удельными нормальными и сдвиговыми усилиями

$$N_{rr} = \frac{1}{r} \frac{dF}{dr}, \quad N_{\theta\theta} = \frac{d^2 F}{dr^2},$$

Q_r^o – обобщённая радиальная удельная поперечная сила

$$Q_r^o = -D \frac{d}{dr} \nabla^2 w + N_{rr} (\vartheta_r + \tilde{\vartheta}_r).$$

Уравнения (4) и граничные условия(5) образуют корректно поставленную краевую задачу, описывающую все этапы процесса деформирования купола.

Алгоритм решение задачи

Для решения задачи о конечных прогибах пологого сферического купола применяется метод Релея-Ритца. В соответствии с его алгоритмом перемещения точек срединной поверх-

ности купола представляются функциональными суммами

$$u = \sum_{i=1}^{K_o} U_{oi} u_{oi}(\rho), \quad w = \sum_{i=1}^{K_o} W_{oi} w_{oi}(\rho), \quad \tilde{w} = \sum_{i=1}^{K_o} \tilde{W}_{oi} w_{oi}(\rho), \quad (\rho = r/a), \quad (6)$$

где: U_{oi} и W_{oi} – искомые обобщённые перемещения, \tilde{W}_{oi} – известные коэффициенты разложения малых начальных прогибов купола, а базисные функции $u_{oi}(\rho)$ и $w_{oi}(\rho)$, которые, исходя из структуры уравнений равновесия купола (4) и граничных условий (5), представляются следующим образом

$$u_{oi}(\rho) = A_{oi} J_1(v_{oi}\rho), \quad w_{oi}(\rho) = C_{oi} [J_0(\omega_{oi}\rho) - b_{oi} I_0(\omega_{oi}\rho)].$$

Здесь J_n – функция Бесселя первого рода n-го порядка, I_n – модифицированная функция Бесселя первого рода n-го порядка, а постоянные A_{oi} , C_{oi} и b_{oi} и коэффициенты v_{oi} и ω_{oi} также находятся из граничных условий.

Потенциальная энергия деформации купола (1) и работа внешней нагрузки (2) с перемещениями в виде (6) после выполнения операций интегрирования записываются в виде конечных сумм, аргументами которых являются обобщённые перемещения U_{oi} и W_{oi} . Дальнейшая реализация метода Релея-Ритца позволяет получить уравнения равновесия оболочки относительно обобщённых перемещений. Для этого потенциальная энергия деформации Π и работа внешней нагрузки A подставляются в уравнение Лагранжа (3), откуда получается система нелинейных алгебраических уравнений, имеющая в матричной форме вид

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0. \quad (7)$$

Здесь под $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_{N_{\max}})^T$ имеется в виду вектор, составленный из частных производных полной потенциальной энергии деформации оболочки $\mathcal{E} = \Pi - A$ по перемещениям U_{oi} , W_{oi} ($i = \overline{1, K_o}$), $N_{\max} = 2K_o$, а вектор \mathbf{x} в соответствии с идеей о равноправии переменных решения [10,11] составлен из обобщённых перемещений, к числу которых добавлена безразмерная поперечная нагрузка

$$\mathbf{x} = (U_{o1} \ W_{o1} \ U_{o1} \ W_{o1} \ \dots \ U_{oK_o} \ W_{oK_o} \ q^*)^T.$$

Решение системы нелинейных алгебраических уравнений (7), порядок которой с этого места для упрощения письма считается равным n , строится методом непрерывного продолжения, основу которого составляет численное решение соответствующей ей задачи Коши с нулевыми начальными условиями, описывающими ненагруженное состояние оболочки. Для этого, аналогично [7], на каждом шаге по параметру λ , близкому к длине траектории нагружения, решается система линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{J}\boldsymbol{\phi} = \mathbf{b}, \quad (8)$$

где: \mathbf{J} – расширенный и дополненный якобиан системы нелинейных алгебраических уравнений (7), $\boldsymbol{\phi}$ – вектор продолжения решения \mathbf{x} , а \mathbf{b} – вектор правых частей:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} f_{1,1} & \dots & f_{1,n} & f_{1,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n,1} & \dots & f_{n,n} & f_{n,n+1} \\ f_{1,n+1} & \dots & f_{n,n+1} & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \dots \\ \phi_n \\ \phi_{n+1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

Элементы якобиана \mathbf{J} подсчитываются как частные производные левых частей системы нелинейных алгебраических уравнений (7) по аргументам решения, в число которых включена безразмерная нагрузка q^* . Параметр ε в системе (8) выбирается из условия наилучшей обусловленности якобиана этой системы, а параметр b – из условия близости вектора продолжения решения $\boldsymbol{\phi}$ к нормированному. В результате вектор $\boldsymbol{\phi}$, являющийся с геометрической точки зрения касательным вектором к траектории нагружения, становится вектором правых частей нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\lambda} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad (9)$$

численное решение которой даёт координаты точек траектории нагружения купола.

Для компенсации погрешности в определении вектора x , накапливающейся в процессе численного решения системы уравнений продолжения (9), используется метод дискретного продолжения [6]. Его основой является метод Ньютона-Рафсона, реализованный для расширенного пространства переменных системы уравнений. Каждая итерация метода Ньютона-Рафсона в соответствии с [6] организуется посредством решения системы линейных алгебраических уравнений вида

$$J\Delta x = f_0,$$

где Δx – вектор невязок решения, а f_0 – расширенный вектор левых частей системы нелинейных алгебраических уравнений (7):

$$\Delta x = (\Delta x_1 \dots \Delta x_n \Delta x_{n+1})^T, f_0 = (f_1 \dots f_n 0)^T.$$

Такой подход даёт возможность существенно повысить точность численного решения системы нелинейных уравнений (7) методом непрерывного продолжения и уменьшить его трудоёмкость за счёт увеличения шага интегрирования по траектории.

Результаты расчета

В качестве объекта данного исследования был выбран жёстко закреплённый по контуру купол с параметром тонкостенности $\mu = 6$, находящийся под действием равномерного поперечного давления q . При коэффициенте Пуассона $\nu = 0.3$ такое значение параметра тонкостенности соответствует идеально сферическому куполу с углом раскрытия $\varphi = 190$ и с отношением радиуса кривизны к толщине стенки $R/h = 100$. Его траектория нагружения в случае осесимметричного деформирования [8] показана на рис.3.

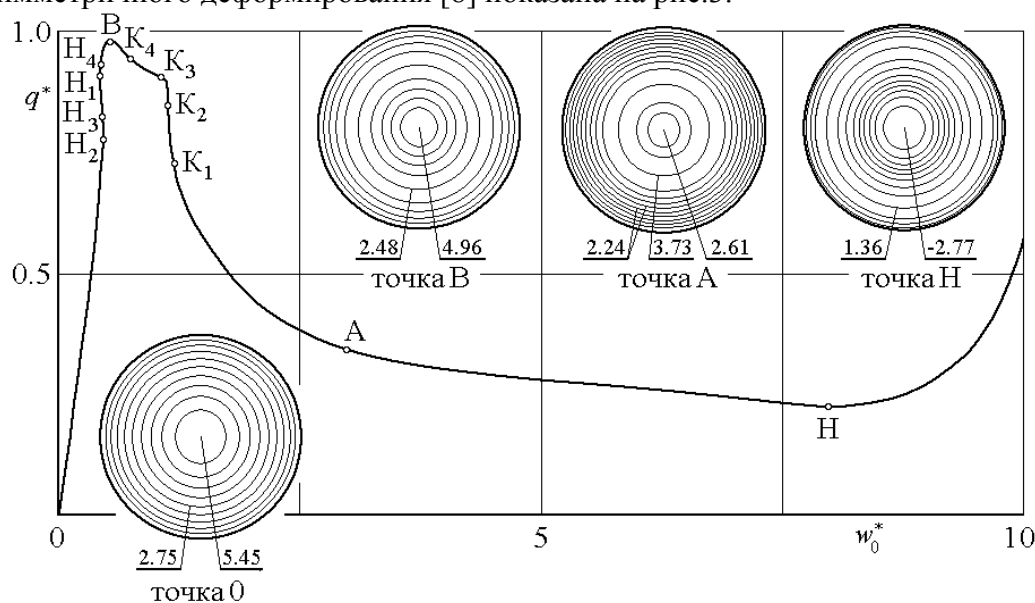


Рис. 3.

На этой траектории присутствуют предельные точки В и Н и точки бифуркации H_1, \dots, H_4 и K_1, \dots, K_4 . В предельных точках купол должен терять устойчивость прощелкиванием. Однако наличие на траектории нагружения точек бифуркации указывает на то, что при достижении значения нагрузки, соответствующей первой точки бифуркации H_2 , должна происходить эйлерова потеря устойчивости с образованием двух волн по окружности купола. Поэтому устойчивыми участками траектории рассматриваемого купола являются участок от точки 0 до точки H_2 и участок справа от точки Н.

Значение безразмерной критической нагрузки при рассмотрении только осесимметричных деформаций купола составляет $q_{кр}^* = 0.972$. Это верхняя критическая нагрузка (см. рис. 3, точка В). Если учесть возможность несимметричной потери устойчивости такого купола, то его критическая нагрузка составит $q_{кр}^* = 0.769$, что соответствует эйлеровой потере устойчивости с двумя волнами по окружности (см. рис. 3, точка H_2). В то же время эксперименталь-

ные данные (см. рис. 2) указывают на диапазон критических нагрузок от 0.28 до 0.9.

Наиболее существенной причиной такого рассогласования является наличие у купола малых начальных отклонений формы от сферической, допустимая величина которых, судя по исследованиям [48, 53–55], не превышает 30% от толщины стенки купола. Такие отклонения формы купола образуются случайным образом, и измерить их можно только на уже изготовленном и установленном на испытательном стенде куполе. При этом в [8] было высказано предположение о том, что на величину критической нагрузки купола наибольшее влияние должны оказывать те начальные неправильности, которые являются суперпозицией форм его закритических неустойчивых состояний равновесия.

Для проверки этого предположения при расчёте деформирования купола под действием равномерного поперечного давления были учтены осесимметричные начальные отклонения в виде пронормированных по максимальной величине форм изогнутой поверхности идеально сферического купола в предельных и промежуточных точках осесимметричной части траектории его нагружения. Эти формы для предельных точек В и Н и некоторой промежуточной точки А показаны на рис.3. Числами на изображениях этих форм отмечены значения безразмерной аппликаты купола $z^* = z/h$, причём внешняя окружность каждого изображения соответствует нулевому значению аппликаты.

При расчёте купола в суммах (6), аппроксимирующих перемещения и прогиб, учитывалось по 6 слагаемых. Как показано в [8], относительная погрешность определения координат точек траектории нагружения в этом случае не превышает 5%. При выполнении расчётов величина \tilde{w}_{\max}^* наибольшего относительного отклонения срединной поверхности купола от сферической, являющаяся отношением величины наибольшего отклонения к толщине стенки купола, использовалась в качестве множителя для его нормированных начальных прогибов. Положительные значения \tilde{w}_{\max}^* соответствуют отклонениям поверхности купола в сторону его центра, как показано на рис. 1, а отрицательные – в противоположную. В расчётах был принят диапазон значений наибольшего относительного отклонения от -1.0 до 1.0 . Это соответствует формоизменению сферы, частью которой является рассматриваемый купол, в пределах 1% от её радиуса.

Для каждого найденного вида начальной осесимметричной неправильности купола в рассматриваемом диапазоне значений его наибольшего относительного отклонения были построены траектории нагружения. Некоторые из них показаны на рис. 4.

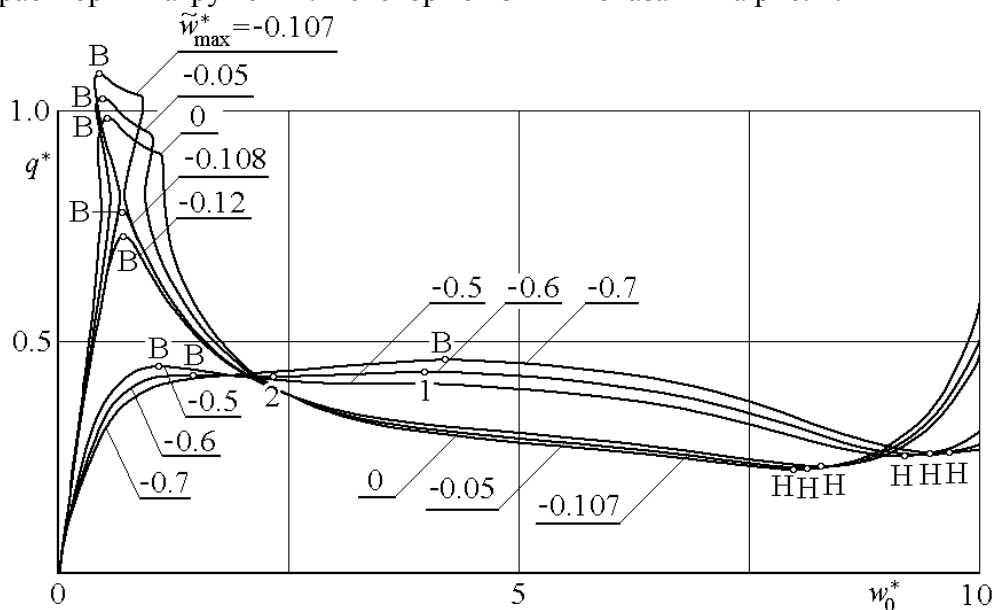


Рис. 4.

Анализ этих траекторий нагружения показывает, что изменение величины наибольшего отклонения формы купола от сферической приводит к таким же изменениям траекторий нагружения, которые наблюдаются при варьировании параметра тонкостенности μ у идеально

сферического купола [8]. Это – эволюционные и скачкообразные видоизменения траектории нагружения купола с присоединением изолированных петель к основной ветви траектории и их отрывом от неё.

При таком видоизменении траекторий нагружения купола его верхняя критическая нагрузка оказывается кусочно-гладкой функцией от величины наибольшего отклонения формы купола от сферической. Графики зависимости критической нагрузки от величины наибольшего отклонения формы купола для каждого рассмотренного вида начальной неправильности показаны на рис. 5.

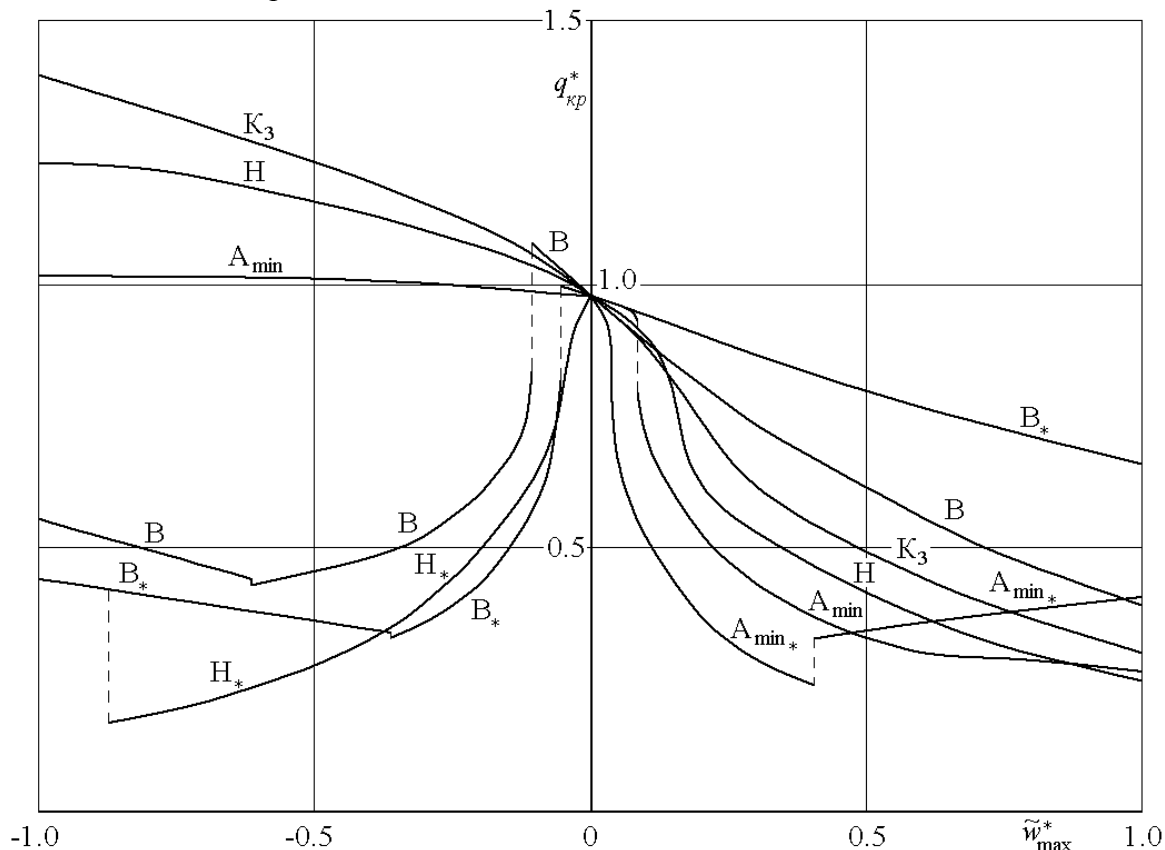


Рис. 5.

Каждая кривая на этом рисунке соответствует своему виду начальной неправильности. Кривые, отмеченные буквами В, Н и K_3 , построены для куполов с начальными неправильностями, в качестве которых взяты нормированные прогибы идеально сферического купола из точек В, Н и K_3 его траектории нагружения (см. рис. 3). Кривая, обозначенная буквой A_{min} является огибающей снизу семейства кривых критической нагрузки для нормированных начальных неправильностей, которые соответствуют прогибам сферического купола при различных положениях точки А (см. рис. 3) на участке траектории его нагружения между точками K_3 и Н.

Наличие у этих кривых (см. рис. 5) точек разрыва 1-го рода показывает, что в этих точках происходит отрыв или присоединение изолированной петли к основной ветви траектории нагружения купола с рассматриваемой начальной неправильностью, а также появление или исчезновение одного из локальных максимумов траектории нагружения, как это можно видеть на рис. 4 (см. кривые при $\tilde{w}_{max}^* = -0.107$ и -0.12 , -0.6 и -0.7).

Взаимное расположение кривых на рис. 5 описывает различную степень влияния форм начальной неправильности на критическую нагрузку купола. При положительных начальных неправильностях – при задании отклонений внутрь купола, все их виды приводят к уменьшению значения критической нагрузки. Наибольшее влияние на критическую нагрузку здесь оказывает форма, соответствующая точкам A_{min} . При максимальном начальном отклонении $\tilde{w}_{max}^* = 0.3$ она дает уменьшение безразмерной критической нагрузки $q_{кр}^*$ с 0.972 до 0.424.

При отрицательных начальных неправильностях, т.е. при задании отклонений во внешнюю сторону от центра оболочки, наблюдается как уменьшение верхней критической нагрузки, так и её увеличение. Наибольшее влияние в сторону уменьшения нагрузки здесь оказывает форма, соответствующая предельной точке В. При максимальном начальном отклонении $\tilde{w}_{\max}^* = -0.3$ она даёт уменьшение критической нагрузки $q_{кр}^*$ с 0.972 до 0.531.

Найденные значения верхней критической нагрузки пологого сферического купола меньше, чем те, которые были найдены ранее другими исследователями. Подтверждением этого может служить сравнение с классическими результатами расчётов из [12]. В этой работе для описания формы начальной неправильности жёстко заделанного по контуру пологого сферического купола с $\mu = 5.14$, находящегося под действием равномерного поперечного давления, было взято традиционно используемое в подобных расчётах точное решение для аналогичной задачи о круговой пластине

$$\tilde{w}^* = \tilde{w}_{\max}^* (1 - \rho^2)^2, \quad (0 \leq \rho \leq 1).$$

С таким представлением начальной неправильности в [12] были получены, в частности, следующие значения верхней критической нагрузки

$$q_{кр}^* = 0.510 \text{ при } \tilde{w}_{\max}^* = 0.25 \text{ и } q_{кр}^* = 0.432 \text{ при } \tilde{w}_{\max}^* = 0.5.$$

Если эту задачу пересчитать с использованием в качестве форм начальной неправильности прогибов из предельных точек траектории нагружения идеально сферического купола, то наименьшие значения для верхней критической нагрузки получатся следующие:

$$q_{кр}^* = 0.449 \text{ при } \tilde{w}_{\max}^* = 0.25 \text{ и } q_{кр}^* = 0.320 \text{ при } \tilde{w}_{\max}^* = 0.5,$$

что соответственно на 12% и на 26% меньше, чем в [12].

Используемый в данной работе подход к выбору начальных неправильностей купола в виде его форм закритического деформирования позволяет найти существенно меньшие значения минимально возможной критической нагрузки, чем это было сделано ранее. Однако в диапазоне наибольшего относительного отклонения срединной поверхности купола \tilde{w}_{\max}^* от сферической от -0.3 до 0.3 экспериментальное значение минимально возможной верхней критической нагрузки $0.28 \div 0.3$ осталось недостижимым. Поэтому поиск новых форм начальной неправильности, которые позволили бы получить ещё меньшие критические нагрузки, был продолжен.

Один из способов их отыскания был сформирован на основе анализа форм начальных неправильностей, приведённых в [48,55]. Было высказано предположение о том, что ещё большее влияние на значения критической нагрузки должны оказывать высшие гармоники представления закритических форм прогиба купола. Для проверки этого предположения в расчёт процесса деформирования купола были введены начальные неправильности в виде форм, соответствующих точкам В, Н и A_{\min} , без их главной составляющей. Под главной составляющей здесь имеется в виду прогиб купола, пропорциональный его прогибу в малой окрестности начального ненагруженного состояния, – прогиб около точки 0 траектории нагружения купола. Все формы, сформированные таким способом из форм купола в различных точках его траектории нагружения, обозначены буквами этих точек с добавлением к ним нижнего индекса в виде звезды: V^* , H^* , A_{\min}^* и т.д. С точки зрения практического получения таких форм начальной неправильности оказалось, что к искомым прогибам близки начальные прогибы, у которых обнуляется первое слагаемое в сумме (6).

Как показали расчёты, графики зависимости критической нагрузки от величины наибольшего отклонения формы купола для некоторых из них лежат ниже ранее найденных. Это можно видеть на рис. 5 на примере кривых V^* и H^* для отрицательных значений наибольшего относительного отклонения срединной поверхности купола от сферической и A_{\min}^* – для положительных. При положительных начальных неправильностях наибольшее влияние на критическую нагрузку оказывает форма, обозначенная A_{\min}^* . При максимальном начальном отклонении $\tilde{w}_{\max}^* = 0.3$ она даёт уменьшение безразмерной критической нагрузки $q_{кр}^*$ с 0.972

до 0.275. При отрицательных начальных неправильностях наибольшее влияние в сторону уменьшения нагрузки оказывает форма B^* , полученная из формы, соответствующей предельной точке B . При максимальном начальном отклонении $\tilde{w}_{\max}^* = -0.3$ она дает уменьшение критической нагрузки $q_{кр}^*$ с 0.972 до 0.357.

Заключение

Выполненное исследование подтвердило ранее высказанное предположение о том, что основной вклад в понижение верхней критической нагрузки пологого сферического купола вносят начальные неправильности его формы. Расчёты показали возможность такого понижения до экспериментальных значений для жёстко заделанного по контуру купола, находящегося под действием равномерного поперечного давления, при рассмотрении его осесимметричных деформаций. Обнаружение в экспериментах значений верхней критической нагрузки, которые оказываются существенно меньше теоретических, обусловлено, по всей видимости, совпадением спектров разложений малых случайных начальных прогибов пологого купола и прогибов подобного ему идеально сферического купола, которые описывают его устойчивые и неустойчивые напряжённо-деформированные состояния. Если эти прогибы осесимметрично деформирующегося сферического купола учесть в расчёте верхней критической нагрузки аналогичного купола с начальными неправильностями, то при рассмотрении величин наибольшего отклонения в пределах 30% толщины стенки купола диапазон рассчитываемых возможных значений верхней критической нагрузки полностью перекрывает диапазон её экспериментальных значений. Остаётся область нечувствительности купола к осесимметричным начальным неправильностям при их малых значениях максимального начального отклонения: до 5% толщины стенки. Выяснить вопрос о поведении купола при таких значениях неправильности представляется возможным только с помощью учёта его несимметричных форм начальной неправильности. Кроме этого, следует отметить, что некоторые формы малых осесимметричных начальных прогибов купола вызывают увеличение его верхней критической нагрузки по сравнению с классической. Этот факт может оказаться полезным при проектировании тонкостенных конструкций.

Литература

1. Валишвили Н.В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. М.: Машиностроение, 1976. 278 с.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
3. Ворovich И.И., Минакова Н.И. Проблема устойчивости и численные методы в теории сферических оболочек//Итоги науки и техники. Механика твердых деформ. тел. Т.7. М.: ВИНТИ. 1973. С.5-86.
4. Гаврюшин С.С. Численное моделирование и анализ процессов нелинейного деформирования гибких оболочек//Известия РАН, МТТ. 1994. №1. 109-119.
5. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 359 с.
6. Григолюк Э.И., Лопаницын Е.А. Об одной модификации метода дискретного продолжения по параметру//Журнал ПМТФ. 1990. №5. С.95-99.
7. Григолюк Э.И., Лопаницын Е.А. О методе непрерывного продолжения по параметру//Доклады РАН. 1994. Т.335. №5. С.582-585.
8. Григолюк Э.И., Лопаницын Е.А. Осесимметричное закритическое поведение пологих сферических куполов//ПММ. 2002. Т.66. Вып.4. С.621-634.
9. Григолюк Э.И., Мамай В.И. Механика деформирования сферических оболочек. М.: Изд-во МГУ, 1983. 114 с.
10. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. О некоторых формах метода продолжения по параметру в нелинейных задачах теории упругости//Журнал прикл. механики и теорет. физики. 1980. №5. С.158-162.
11. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования. М.: Наука, 1988. 231 с.
12. Корнишин М.С. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их ре-

- шения. М.: Наука, 1964. 192 с.
13. Погорелов А.В. О влиянии несовершенства закрепления края оболочки на потерю устойчивости//Доклады АН СССР. 1968. Т.179. №2. С.308-309.
 14. Сунагава Мэгуми, Кумаи Нори. Сопротивление элементов конструкций динамическому нагружению.//J. Jap. Soc. Aeronaut. and Space Sci. 1970. V.18, №195. P.154-166.
 15. Суркин Р.Г. Влияние симметричной начальной неправильности на значение критического внешнего давления равномерно нагруженной сферической оболочки//В сб. Исслед. по теории пластин и оболочек. Казань: КГУ, 1965. №3. С.8-23.
 16. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
 17. Шилькрут Д.И., Шевандронов Н.В., Морар В.П., Максимов Ю.А. Решение задач нелинейной теории оболочек на аналоговых вычислительных машинах. Кишинев: Изд-во. АН МолдССР, 1969. 144 с.
 18. Уемура М. Осесимметричное выпучивание пологой сферической оболочки с начальными деформациями при внешнем давлении//Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. 1969. V.35. №276. P.1617-1623.
 19. Феодосьев В.И. К расчету хлопающей мембраны//ПММ. 1946. Т.10. №2. С.295-300.
 20. Якушев В.Л. Нелинейные деформации и устойчивость тонких оболочек. М.: Наука, 2004. 276 с.
 21. Adam H.P., King P.A. Experimental investigation of the stability of monocoque domes subjected to external pressure//Experimental Mechanics. 1965. V.5, №10. P.313-320.
 22. Archer R.R. Stability limits for a clamped spherical shell segment under uniform pressure//Quart. Appl. Math. 1958. V.15. №4. P.355-366.
 23. Bauer F., Keller H.B., Reiss E.L. Boundary imperfections in the buckling of spherical caps//SIAM J. Appl.Math. 1967. V.15. №2. P.273-283.
 24. Bauer L., Reiss E.L., Keller H.B. Axisymmetric buckling of rigidly clamped hemispherical shells//Intern. J. Non-Linear Mech. 1973. V.8. №1. P.31-39.
 25. Budiansky B. Buckling of clamped shallow spherical shells//Proc. Symp. on the Theory of Thin Elastic Shells. Delft: 1959. Amsterdam: North-Holland, 1960. P.64-94.
 26. Galletly G.D. On the buckling of shallow spherical caps subjected to uniform external pressure//AIAA Journal. 1976. V.14. №9. P.1331-1333.
 27. Homewood R.H., Brine A.C., Johnson A.E. Experimental investigation of the buckling instability of monocoque shells//Proc. Soc. Expt. Stress Analysis. New York: 1963. V.18, №1. P.88-96.
 28. Kaplan A., Fung Y.C. A nonlinear theory of bending and buckling of thin shallow spherical shells//NACA Technical Notes №3212. 1954. 58 p.
 29. Karman Th. von, Kerr A.D. Instability of spherical shells subjected to external pressure//Topics Appl. Mech. Amsterdam, ect.: 1965. P.1-22.
 30. Karman Th. von, Tsien S. The buckling of spherical shells by external pressure//J. Aeronaut. Sci. 1939. V.7. №2. P.43-50.
 31. Kloppel K., Jungbluth O. Beitrag zum Durchschlagsproblem dünnwandiger Kugelschalen (Versuche und Bemessungsformeln)//Der Stahlbau. 1953. Bd 22. H.6. S.121-130.
 32. Krenzke M.A., Kiernan T.J. Elastic stability of near perfect shallow spherical shells//AIAA Journal. 1963. V.1, №12. P.2855-2857.
 33. Marcinowski J. On some distinctive features of load-displacement paths of shallow spherical shells subjected to uniform pressure//Fourth International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures. CIMS'04. Rome, Italy, 27-29 September, 2004. Rome, 2004. 10 p.
 34. Mescall J. Numerical solutions of nonlinear equations for shells of revolution//AIAA Journal. 1966. V.4, №11. P.2041-2043.
 35. Mishonov M. The effect of edge disturbances on the stability of spherical shells//Theory Plates and Shells. Bratislava: 1966. P.365-370.
 36. Reiss E.L. On the nonlinear buckling of shallow spherical domes//J. Aeronaut. Sci. 1956. V.23. №10. P.973-975.

37. Reiss E.L., Greenberg H.J., Keller H.B. Nonlinear deflections of shallow spherical shells//J. Aeronaut. Sci. 1957. V.24. №7. P.533-543.
38. Simons R.M. A power series solution of the nonlinear equations for axi-symmetrical bending of shallow spherical shells//J. Math. and Phys. 1956. V.35. №2. P.164-176.
39. Sunakawa M., Ichida K. Buckling of spherical shells subjected to external pressure. Part 1//J. Japan Soc. Aeronaut. Space Sci. 1973. V.21. №232. P.263-270.
40. Sunakawa M., Ichida K. Buckling of spherical shells subjected to external pressure. Part 2//J. Japan Soc. Aeronaut. Space Sci. 1973. V.21. №234. P.384-393.
41. Sunakawa M., Ichida K. A high precision experiment on the buckling of spherical caps subjected to external pressure//Report Inst. Space and Aeronaut. Sci. Univ. of Tokyo. Tokyo, 1974. V.3. №503. P.87-121.
42. Thurston G.A. A numerical solution of the nonlinear equations for axisymmetric bending of shallow spherical shells//Trans. ASME. Ser.E. J. Appl. Mech. 1961. V.28. №4. P.557-562.
43. Thurston G.A., Penning F.A. Effect of axisymmetric imperfections on the buckling of spherical caps under uniform pressure//AIAA Bull. 1965. V.2. №3. P.93; AIAA Journal. 1966. V.4. №2. P.319-327.
44. Tillman S.C. On the buckling behaviour of shallow spherical caps under uniform pressure load//Int. J. Solids and Struct. 1970. V.6. №1. P.37-52.
45. Tsien H.- S. A theory for the buckling of thin shells//J. Aeronaut. Sci. 1942. V.9. №10. P.373-384.
46. Uchiyama K., Yamada M. Buckling of clamped imperfect thin shallow spherical shells under external pressure. Part 1//The Technology Reports of the Tohoku University. 1974. V.39. P.101-132.
47. Uchiyama K., Yamada M. Buckling of clamped imperfect thin shallow spherical shells under external pressure. Part 2//The Technology Reports of the Tohoku University. 1975. V.40. P.1-23.
48. Uchiyama K., Yamada S. Nonlinear buckling simulations of imperfect shell domes using a hybrid finite element formulation and the agreement with experiments//Computational Methods for Shell and Spatial Structures. IASS-IACM 2000. Ed. M.Papadrakakis, A.Samartin and E.Onate. ISASR-NTUA: Athens, 2000. 14 p.
49. Uemura M. The buckling of spherical shell by external pressure. 3rd Rept. Buckling mechanism of spherical shell segments//Proc. 3rd Jap. Nat. Congr. Appl. Mech. 1953. Tokyo, 1954. P.113-118.
50. Wang L. Bu-L. Boundary disturbance and pressure rate on the buckling of spherical caps//AIAA Journal. 1968. V.6. №11. P.2192-2193.
51. Weinitschke H.J. On the nonlinear theory of shallow spherical shells//J. Soc. Indust. Appl. Math. 1958. V.6. №2. P.209-232.
52. Weinitschke H.J. On the stability problem for shallow spherical shells//J. Math. and Phys. 1960. V.38. №4. P.209-231.
53. Yamada S., Uchiyama K., Yamada M. Experiments on the buckling of clamped shallow spherical shells under external pressure//The Technology Reports of the Tohoku University. 1980. V.45. P.205-227.
54. Yamada S., Uchiyama K., Yamada M. Experimental investigation of the buckling of shallow spherical shells//J. Non-Linear Mech. 1983. V.18. №1. P.37-54.
55. Yamada M., Yamada S. Agreement between theory and experiment on large-deflection behaviour of clamped shallow spherical shells under external pressure//Collapse. Ed. J.M.T.Tompson and J.W.Hant. Cambridge Univ. Press: 1983. P.431-441 (Русс. перевод: Ямада М., Ямада С. Соответствие результатов теоретического и экспериментального исследования больших прогибов заделанных пологих сферических оболочек, нагруженных внешним давлением//Потеря устойчивости и выпучивание конструкций: теория и практика. М.: Наука. 1991. С.337-347).
56. Zolly R. Über ein Knickungsproblem an der Kugelschale. Promotionsarbeit. Zürich: Technische

Hochschule, 1915. 85 S.

Обрезка криволинейных поверхностей в системах автоматизированного проектирования

к.т.н., доц. Макаров А.И.
МГТУ «МАМИ»

Математический аппарат, используемый для моделирования криволинейных поверхностей в системах CAD/CAM, не позволяет описывать поверхности со сложной геометрией границ. Трудности возникают уже при построении поверхностей с пятью граничными линиями, не говоря уже о вырезании отверстий внутри поверхности.

Для решения проблемы нерегулярного края и отверстий принят следующий подход: математическое описание поверхностей создаются на топологически правильных фигурах (прямоугольниках, квадратах), а созданные на поверхностях ориентированные кривые производят ограничение поверхностей и вырезание в них отверстий.

Плодотворность такого подхода подтверждена тем, что он реализован в известных CAD/CAM системах; связанные с таким подходом структуры предусмотрены в стандарте межсистемного обмена информации VDA FS и IGES.

Остановившись на идее ограничения поверхностей с помощью лежащих на них кривых можно рассмотреть несколько способов построения таких ограничений. Однако безотносительно к способу построения ограничений следует принять два решения. Первое решение состоит в том, что ограничения осуществляются ориентированными кривыми. То есть каждая ограничивающая кривая имеет направление; если двигаться вдоль кривой по этому направлению, то выделяемая часть поверхности, допустим, будет находиться слева, а отсекаемая - справа. Отметим, что направление ограничивающей кривой должно быть связано с направлением нормали поверхности.

Второе решение касается организации ограничений: ограничивающие кривые должны образовать замкнутую фигуру (контур) так, чтобы конечная точка предыдущей кривой совпадала с начальной точкой следующей кривой. Если не принять такое решение, возможна нестыковка ограничивающих кривых, в результате которой в ограничениях могут возникать щели или пересечения. Естественно, что нельзя требовать от пользователя задание кривых, точно состыкованных в конечных точках. Программные средства должны отсекают концевые части пересекающихся кривых или достраивать кривые, имеющие небольшие расхождения.

Под автоматическим построением ограничений понимается процесс, в котором проектировщик создает на поверхности ограничивающие кривые, а программные средства системы проводят анализ на возможность построения из них ограничивающих контуров.

Пусть на поверхности имеются ограничивающие кривые, часть из которых уже вошла в контуры, а другая часть еще не связана в контуры. Кривые, не включенные в контуры, не выполняют функций ограничения, то есть являются пассивными ограничениями.

Пусть на поверхности создана еще одна ограничивающая кривая, такая, что ее взаимодействие с имеющимися кривыми приводит к перестройке топологии ограничений: изменению уже созданных контуров, появлению новых контуров.

Ограничивающие кривые создаются на поверхности в пространстве и преобразуются программными средствами в свои образы на UV-плоскости. Операции по построению ограничивающих контуров осуществляются на UV-плоскости.

На рис. 1а показаны кривые А, В, С, D, из которых связан контур, кривые Е и F, не включенные в контур (пассивные ограничения), и вновь созданная кривая G, появление которой приводит к перестройке ограничений. Стрелками показана ориентация кривых. При движении вдоль кривой выделяемая ею поверхность будет находиться слева.

В результате взаимодействия вновь введенной кривой G с другими ограничивающими элементами происходит модификация имеющегося контура: в него включаются новые кривые Е, F, G, а кривая С теперь входит в контур двумя кусками (рис. 1б). На рис. 1в линии координатной сетки показывают влияние ограничений.