

РАЗДЕЛ 3. ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ**Задача о течении пластического вещества в фиксированной области, имеющей форму равнобокой трапеции. Инструмент – упругое полупространство**

к.т.н., доц. Бодунов М.А., к.ф.-м.н. Бодунов Д.М., Коваленко П.В.
МГТУ «МАМИ»

В работе рассматривается задача о течении идеально пластического материала в фиксированной области по упруго-деформируемым поверхностям. Область течения представляет равнобокую трапецию, тело инструмента моделируется как упругое полупространство. Исходная интегро-дифференциальная система сводится к одному интегральному уравнению гаммерштейновского типа. Предложен метод последовательных приближений для решения данного уравнения. С помощью указанного метода получено решение уравнения в первом приближении. Приводится анализ данного решения.

В настоящее время актуальны задачи пластических течений материалов с учетом различных сопряженных факторов, таких как анизотропия сил трения на контакте, объемная сжимаемость, течение материала в условиях интенсивного теплообмена, состояние сверхпластичности, деформируемость инструмента.

В технологии обработки давлением выделяется широкий класс процессов, характеризуемых общим свойством: течение материала в таких процессах происходит в сравнительно тонком слое. Для этого класса технологий учет конечной жесткости инструмента оказывается весьма существенным. Оценки показывают, что неточность изготовления тонкостенных деталей может по этой причине достигать недопустимо больших значений, поэтому теоретическое рассмотрение таких процессов является актуальным.

Общая теория течения тонких слоев металла по деформируемым поверхностям разработана, однако конкретные приложения ограничены осесимметричными и плоскими задачами. Потребности технологии обработки давлением такими приложениями, естественно, далеко не ограничены. В связи с этим представляют практический интерес новые задачи теории течения в тонком слое, а также разработка методов их решения.

Основная система, состоящая из нелинейного дифференциального уравнения и интегрального соотношения, связывающих давление в слое и упругие перемещения контактных поверхностей тел инструмента, имеет вид [3, 6]:

$$|\text{grad}P|^2 = \frac{4\phi_s^2}{(h_0 + w)^2} \quad (1)$$

$$w = \iint_S H(x, y, 0, z) P(0, z) d\sigma dz \quad (2)$$

На границе области течения выполняется условие:

$$P(x_0, y_0) = l \cdot y_s, \quad (3)$$

где: P - давление в слое;

w - упругие перемещения контактных поверхностей тел инструмента;

h_0 - начальная толщина слоя;

ϕ_s - предел текучести материала на сдвиг;

$y_s = \sqrt{3}\phi_s$ - предел текучести материала;

$H(x, y, 0, z)$ - функция жёсткости;

l - множитель порядка единицы.

Уравнения (1), (2) и (3) составляют краевую задачу для определения двух неизвестных функций P и w . Для того чтобы в дальнейшем оперировать только безразмерными величинами

ми, координаты (x, y) , а также (ξ, η) отнесём к l (в данном случае длина меньшего основания трапеции), перемещения - к h_0 (которую считаем постоянной), и оставим за ними прежние обозначения. Кроме того, введём функцию давления по формуле $Z = \frac{(P - \gamma y_s) h_0}{2\phi l}$. Тогда система уравнений (1), (2) и граничные условия (3) переписутся в виде [2]:

$$|\text{grad}Z|^2 = (1 + w)^{-2} \quad (4)$$

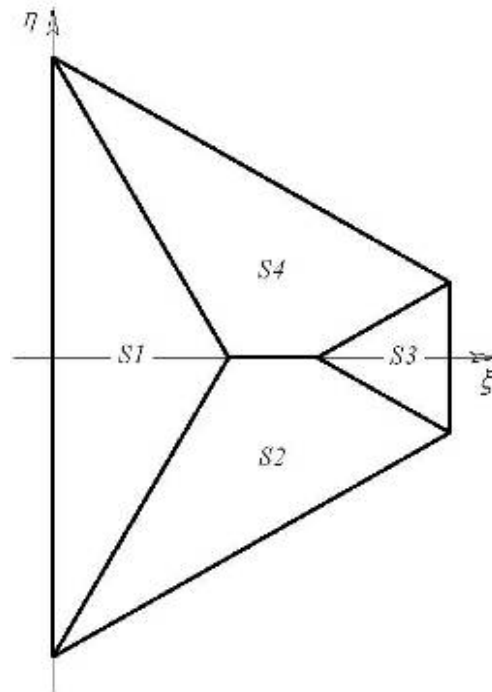
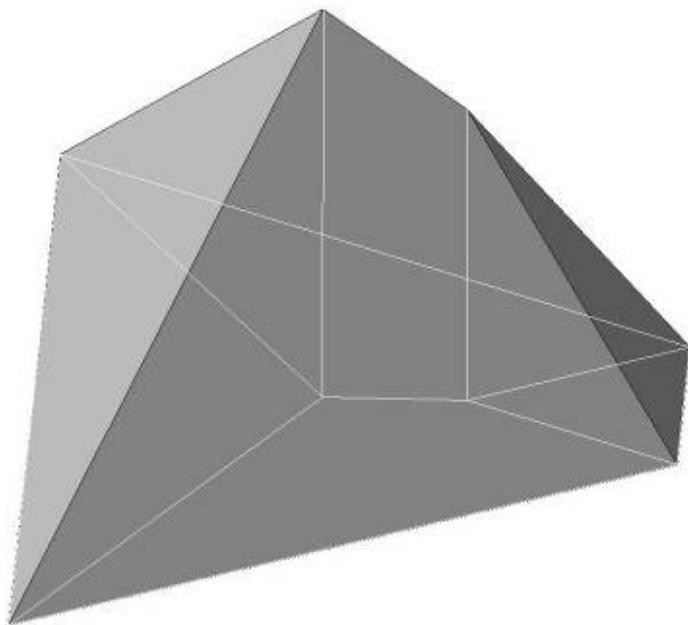


Рис. 1. Эпюра давления в нулевом приближении.

Рис. 2. Область течения в плане.

Согласно алгоритму метода последовательных приближений для нахождения $w(1)(x, y)$ необходимо вычислить интеграл:

$$w = \partial_0 \iint_S H(x, y, o, z) d\alpha dz + \partial_1 \iint_S H(x, y, o, z) Z(o\alpha) d\alpha dz \quad (5)$$

$$Z(x_0, y_0) = 0 \quad (6)$$

где обозначено $\partial_0 = \frac{\partial \gamma y_s l}{h_0}$, $\partial_1 = \frac{2 \partial \gamma \phi l^2}{h_0^2}$, ∂ - параметр, характеризующий размерность функции жёсткости $H(x, y, \xi, \eta)$.

Для решения данной задачи применим метод последовательных приближений [7], алгоритм которого можно представить следующим образом:

$$|\text{grad}Z^{(k)}|^2 = (1 + w^{(k)})^{-2} \quad (7)$$

$$Z^{(k)}(x_0, y_0) = 0$$

$$w^{(k+1)} = \partial_0 \iint_S H(x, y, o, z) d\alpha dz + \partial_1 \iint_S H(x, y, o, z) Z^{(k)}(o\alpha) d\alpha dz$$

где k – номер итерации.

Принимая в нулевом приближении $w = 0$ (в этом случае инструмент представляет собой абсолютно жёсткое тело), находим решение дифференциального уравнения (4) – функцию Z в нулевом приближении. Подставляя уже известное Z в интегральное уравнение (5), находим w в первом приближении. Далее процесс повторяется.

По условию данной задачи течение происходит в области, ограниченной равнобокой трапецией, границы которой можно обозначить пазами в теле инструмента. Если в нулевом приближении при $w=0$ тело инструмента является абсолютно жестким, тогда эпюру давле-

ния можно представить как пирамиду (рис. 1), ребра которой являются границами направления течения [4, 6]. Рис. 2 представляет область течения в плане, разделённую на четыре различные области, каждая из которых является проекцией грани пирамиды на плоскость ξ, η .

$$w = \partial_0 \iint_S \frac{d\sigma dz}{\sqrt{(x-o)^2 + (y-z)^2}} + \partial_1 \iint_S \frac{Z(o(z)) d\sigma dz}{\sqrt{(x-o)^2 + (y-z)^2}} = \partial_0 I_1^S + \partial_1 I_2^S, \quad (8)$$

где в качестве H выбираем функцию, описывающую инструмент как упругое полупространство [1, 5]:

$$H = \frac{I}{\sqrt{(x-o)^2 + (y-z)^2}}, \quad \partial = \frac{I - M^2}{pE}, \quad (9)$$

Первое слагаемое в (8) – I_1^S представляет собой перемещение от действия силы, в безразмерных переменных равной единице, а второе слагаемое, т.е. I_2^S – соответственно от силы, равной давлению со стороны слоя на инструмент. В силу особенности эпюры давлений интегрирование необходимо провести по четырём областям [2]:

$$I_1^S = \sum_{i=1}^4 I_1^{Si}, \quad I_2^S = \sum_{i=1}^4 I_2^{Si} \quad (10)$$

Из эпюры давления также видно, что в областях $S1$ и $S3$ давление является функцией только одной переменной – переменной ξ , что значительно упрощает решение дифференциального уравнения основной системы (4). В областях же $S2$ и $S4$ функция давления зависит как от ξ , так и от η , и для упрощения решения при интегрировании (8) в этих областях перейдём к другой системе координат – $\tilde{o}; \tilde{z}$ (рис. 3), где давление будет функцией одной переменной – переменной \tilde{z} . Соответственно каждая точка изменит свои координаты с (ξ, η) на $(\tilde{o}; \tilde{z})$. По окончании интегрирования осуществим обратный переход к координатам ξ, η , применив к переменным полученной функции w обратное преобразование координат.

Рассмотрим подробнее вычисление обоих слагаемых (8) в различных областях:

$$I_1^{S1} = \int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \int_{\sqrt{3}o-2}^{-\sqrt{3}o+2} \frac{d\sigma dz}{\sqrt{(x-o)^2 + (y-z)^2}} = \int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \ln \frac{-y - \sqrt{3}o - 2 + \sqrt{x^2 - 2xo + 4o^2 + y^2 - 2y\sqrt{3}o + 4y - 4\sqrt{3}o + 4}}{-y - \sqrt{3}o + 2 + \sqrt{x^2 - 2xo + 4o^2 + y^2 + 2y\sqrt{3}o - 4y - 4\sqrt{3}o + 4}} do$$

$$I_1^{S2} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_{\frac{\sqrt{3}\eta}{3}}^{\frac{-\sqrt{3}\eta}{3}+3} \frac{d\tilde{o} d\tilde{z}}{\sqrt{(\tilde{x}-\tilde{o})^2 + (\tilde{y}-\tilde{z})^2}} + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \int_{\frac{\sqrt{3}\eta}{3}}^{4-\sqrt{3}\eta} \frac{d\tilde{o} d\tilde{z}}{\sqrt{(\tilde{x}-\tilde{o})^2 + (\tilde{y}-\tilde{z})^2}} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \ln \frac{-3\tilde{x} - \sqrt{3}\tilde{z} + 9 + \sqrt{9\tilde{x}^2 + 6\tilde{x}\sqrt{3}\tilde{z} - 54\tilde{x} - 18\tilde{y}\tilde{z} + 12\tilde{z}^2 - 18\sqrt{3}\tilde{z} + 81 + 9\tilde{y}^2}}{3 \cdot (-\tilde{x} + \sqrt{3}\tilde{z} + \sqrt{\tilde{x}^2 - 2\tilde{x}\sqrt{3}\tilde{z} - 2\tilde{y}\tilde{z} + 4\tilde{z}^2 + \tilde{y}^2})} d\tilde{z} + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \ln \frac{-\tilde{x} - \sqrt{3}\tilde{z} + 4 + \sqrt{\tilde{x}^2 + 2\tilde{x}\sqrt{3}\tilde{z} - 8\tilde{x} - 2\tilde{y}\tilde{z} + 4\tilde{z}^2 - 8\sqrt{3}\tilde{z} + 16 + \tilde{y}^2}}{-\tilde{x} + \sqrt{3}\tilde{z} + \sqrt{\tilde{x}^2 - 2\tilde{x}\sqrt{3}\tilde{z} - 2\tilde{y}\tilde{z} + 4\tilde{z}^2 + \tilde{y}^2}} d\tilde{z},$$

$$\text{где: } \tilde{o} = o \frac{\sqrt{3}}{2} + (z+2) \frac{1}{2}, \quad \tilde{x} = x \frac{\sqrt{3}}{2} + (y+2) \frac{1}{2}, \quad \tilde{z} = -o \frac{1}{2} + (z+2) \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tilde{y} = -x \frac{1}{2} + (y+2) \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$I_1^{S3} = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \int_{\frac{-\sqrt{3}}{3}o+1}^{\frac{\sqrt{3}}{3}o-1} \frac{d\sigma dz}{\sqrt{(x-o)^2 + (y-z)^2}} = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \ln \frac{-3y - \sqrt{3}o - 3 + \sqrt{9x^2 - 18xo + 12o^2 + 9y^2 - 6y\sqrt{3}o + 18y - 6\sqrt{3}o + 9}}{-3y - \sqrt{3}o + 3 + \sqrt{9x^2 - 18xo + 12o^2 + 9y^2 + 6y\sqrt{3}o - 18y - 6\sqrt{3}o + 9}} do$$

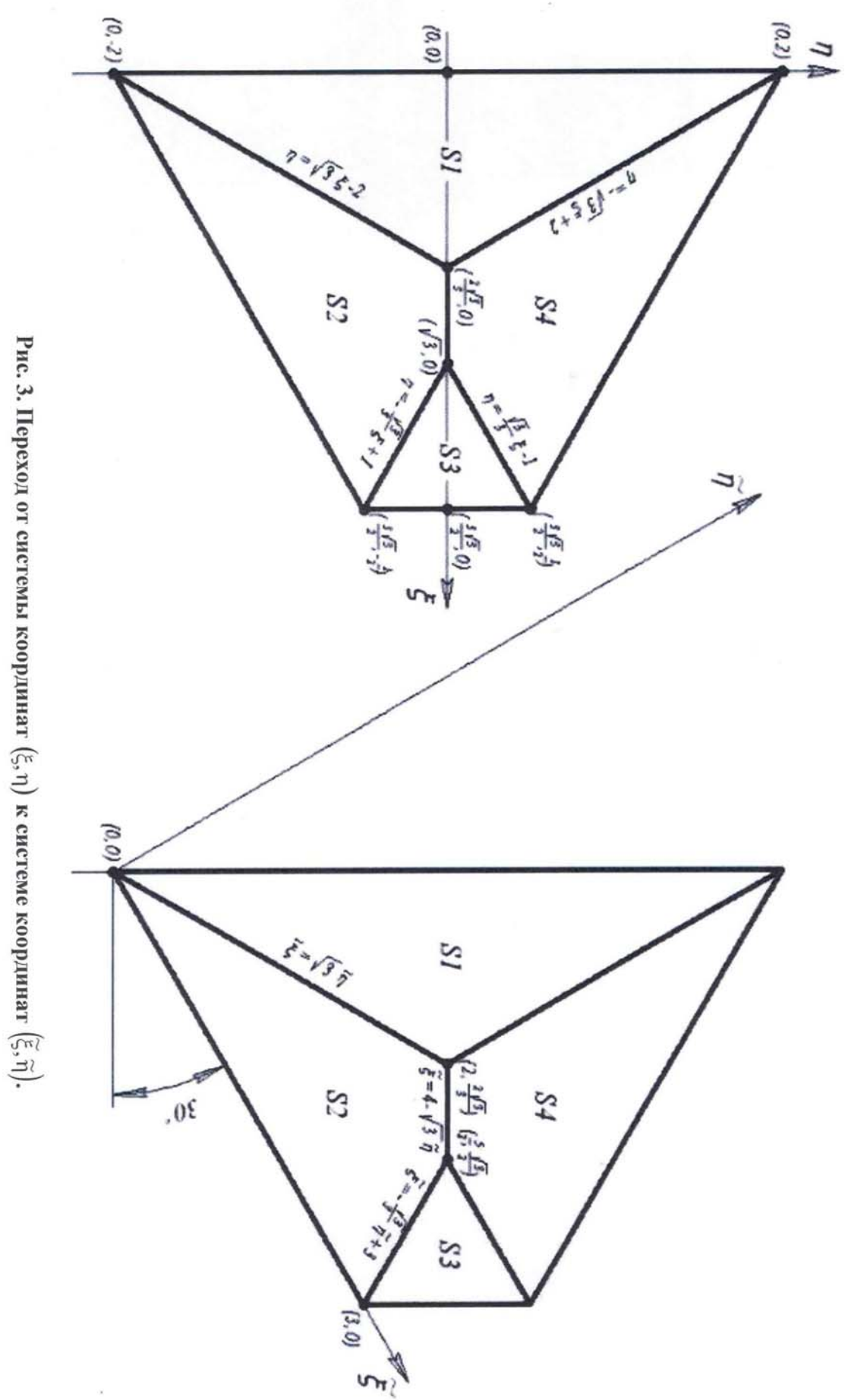


Рис. 3. Переход от системы координат (ξ, η) к системе координат $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$.

$$\begin{aligned}
I_l^{S4} &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_{\frac{\sqrt{3}\eta}{3}}^{-\frac{\sqrt{3}\eta}{3}} \frac{d\tilde{o}d\tilde{z}}{\sqrt{(\tilde{x}-\tilde{o})^2+(\tilde{y}-\tilde{z})^2}} + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \int_{\frac{\sqrt{3}\eta}{3}-4}^{-\frac{\sqrt{3}\eta}{3}} \frac{d\tilde{o}d\tilde{z}}{\sqrt{(\tilde{x}-\tilde{o})^2+(\tilde{y}-\tilde{z})^2}} \\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \ln \frac{3 \cdot (-\tilde{x} - \sqrt{3}\tilde{z} + \sqrt{\tilde{x}^2 + 2\tilde{x}\sqrt{3}\tilde{z} - 2\tilde{y}\tilde{z} + 4\tilde{z}^2 + \tilde{y}^2})}{-3\tilde{x} + \sqrt{3}\tilde{z} - 9 + \sqrt{9\tilde{x}^2 - 6\tilde{x}\sqrt{3}\tilde{z} + 54\tilde{x} - 18\tilde{y}\tilde{z} + 12\tilde{z}^2 - 18\sqrt{3}\tilde{z} + 81 + 9\tilde{y}^2}} d\tilde{z} + \\
&+ \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \ln \frac{-\tilde{x} - \sqrt{3}\tilde{z} + \sqrt{\tilde{x}^2 + 2\tilde{x}\sqrt{3}\tilde{z} - 2\tilde{y}\tilde{z} + 4\tilde{z}^2 + \tilde{y}^2}}{-\tilde{x} + \sqrt{3}\tilde{z} - 4 + \sqrt{\tilde{x}^2 - 2\tilde{x}\sqrt{3}\tilde{z} + 8\tilde{x} - 2\tilde{y}\tilde{z} + 4\tilde{z}^2 - 8\sqrt{3}\tilde{z} + 16 + \tilde{y}^2}} d\tilde{z},
\end{aligned}$$

где $\tilde{o} = -o\frac{\sqrt{3}}{2} + (z-2)\frac{1}{2}$, $\tilde{x} = -x\frac{\sqrt{3}}{2} + (y-2)\frac{1}{2}$, $\tilde{z} = -o\frac{1}{2} - (z-2)\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tilde{y} = -x\frac{1}{2} - (y-2)\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Полное решение выше обозначенных интегралов, найденное при помощи ЭВМ, представляет собой весьма громоздкое аналитическое выражение. В связи с этим функцию

$w1 = I_l^S = \sum_{i=1}^4 I_l^{Si}$ представим в графическом виде (рис. 4).

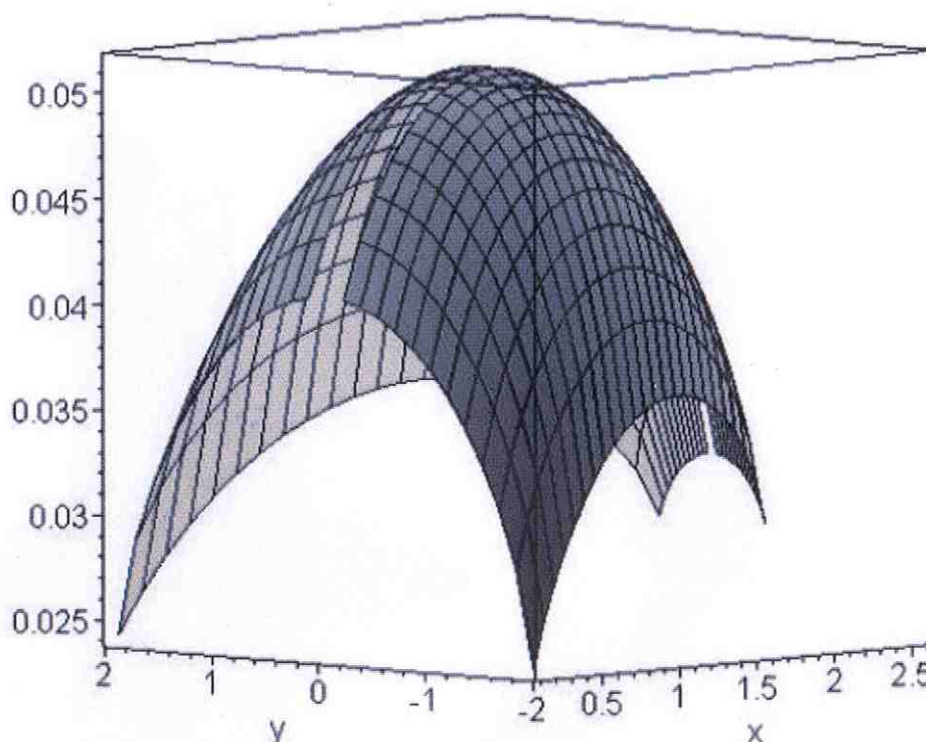


Рис. 4. Прогиб от силы, в безразмерных величинах равной единице.

Вычисление $I_l^S = \sum_{i=2}^4 I_l^{Si}$ проводится также по четырем областям.

В области $S1$ в нулевом приближении при $w = 0$ дифференциальное уравнение (1.4) примет вид:

$$\frac{\partial Z}{\partial \xi} = 1, \text{ при граничных условиях: } \begin{cases} \tilde{o}=0 \\ Z=0 \end{cases}.$$

Откуда находим функцию давления: $Z = \xi$ (так как в этой области Z является только функцией ξ).

Аналогично для остальных областей:

$$S2: \frac{\partial Z}{\partial \tilde{z}} = 1, \text{ при граничных условиях: } \begin{cases} \tilde{z}=0 \\ Z=0 \end{cases}. \text{ Функция давления: } Z = \tilde{z},$$

$$\text{где } \tilde{z} = -o \frac{1}{2} + z \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}.$$

$$S3: \frac{\partial Z}{\partial \tilde{\xi}} = -1, \text{ при граничных условиях: } \begin{cases} \tilde{o} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ Z=0 \end{cases}. \text{ Функция давления: } Z = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \tilde{o}$$

$$S4: \frac{\partial Z}{\partial \tilde{z}} = 1, \text{ при граничных условиях: } \begin{cases} \tilde{z}=0 \\ Z=0 \end{cases}. \text{ Функция давления: } Z = \tilde{z},$$

$$\text{где } \tilde{z} = -o \frac{1}{2} - z \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}.$$

Определив функцию Z для каждой из областей, найдём I_2^{Si} :

$$I_2^{S1} = \int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} o do \int_{\sqrt{3o-2}}^{\frac{-\sqrt{3o+2}}{\sqrt{3}}} \frac{dz}{\sqrt{(x-o)^2 + (y-z)^2}} = \int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} o \cdot \ln \frac{-y - \sqrt{3o-2} + \sqrt{x^2 - 2xo + 4o^2 + y^2 - 2y\sqrt{3o+4y-4\sqrt{3o+4}}} }{-y - \sqrt{3o+2} + \sqrt{x^2 - 2xo + 4o^2 + y^2 + 2y\sqrt{3o-4y-4\sqrt{3o+4}}}} do,$$

$$I_2^{S2} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \tilde{z} d\tilde{z} \int_{\frac{\sqrt{3}\tilde{\eta}}{3}}^{\frac{-\sqrt{3}\tilde{\eta}}{3}+3} \frac{d\tilde{o}}{\sqrt{(\tilde{x}-\tilde{o})^2 + (\tilde{y}-\tilde{z})^2}} + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \tilde{z} d\tilde{z} \int_{\frac{\sqrt{3}\tilde{\eta}}{3}}^{4-\sqrt{3}\tilde{\eta}} \frac{d\tilde{o}}{\sqrt{(\tilde{x}-\tilde{o})^2 + (\tilde{y}-\tilde{z})^2}}$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \tilde{z} \cdot \ln \frac{-3\tilde{x} - \sqrt{3}\tilde{z} + 9 + \sqrt{9\tilde{x}^2 + 6\tilde{x}\sqrt{3}\tilde{z} - 54\tilde{x} - 18\tilde{y}\tilde{z} + 12\tilde{z}^2 - 18\sqrt{3}\tilde{z} + 81 + 9\tilde{y}^2}}{3 \cdot (-\tilde{x} + \sqrt{3}\tilde{z} + \sqrt{\tilde{x}^2 - 2\tilde{x}\sqrt{3}\tilde{z} - 2\tilde{y}\tilde{z} + 4\tilde{z}^2 + \tilde{y}^2})} d\tilde{z} +$$

$$+ \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \tilde{z} \cdot \ln \frac{-\tilde{x} - \sqrt{3}\tilde{z} + 4 + \sqrt{\tilde{x}^2 + 2\tilde{x}\sqrt{3}\tilde{z} - 8\tilde{x} - 2\tilde{y}\tilde{z} + 4\tilde{z}^2 - 8\sqrt{3}\tilde{z} + 16 + \tilde{y}^2}}{-\tilde{x} + \sqrt{3}\tilde{z} + \sqrt{\tilde{x}^2 - 2\tilde{x}\sqrt{3}\tilde{z} - 2\tilde{y}\tilde{z} + 4\tilde{z}^2 + \tilde{y}^2}} d\tilde{z},$$

$$\text{где: } \tilde{o} = o \frac{\sqrt{3}}{2} + (z+2) \frac{1}{2}, \quad \tilde{x} = x \frac{\sqrt{3}}{2} + (y+2) \frac{1}{2}, \quad \tilde{z} = -o \frac{1}{2} + (z+2) \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tilde{y} = -x \frac{1}{2} + (y+2) \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$I_2^{S3} = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} (\frac{3\sqrt{3}}{2} - o) do \int_{\frac{-\sqrt{3}o+1}{3}}^{\frac{\sqrt{3}o-1}{3}} \frac{dz}{\sqrt{(x-o)^2 + (y-z)^2}} =$$

$$= \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} (\frac{3\sqrt{3}}{2} - o) \cdot \ln \frac{-3y - \sqrt{3o-3} + \sqrt{9x^2 - 18xo + 12o^2 + 9y^2 - 6y\sqrt{3o+18y-6\sqrt{3o+9}}}}{-3y - \sqrt{3o+3} + \sqrt{9x^2 - 18xo + 12o^2 + 9y^2 + 6y\sqrt{3o-18y-6\sqrt{3o+9}}}} do,$$

$$I_2^{S4} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \tilde{z} d\tilde{z} \int_{\frac{\sqrt{3}\tilde{\eta}}{3}}^{-\sqrt{3}\tilde{\eta}} \frac{d\tilde{o}}{\sqrt{(\tilde{x}-\tilde{o})^2 + (\tilde{y}-\tilde{z})^2}} + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \tilde{z} d\tilde{z} \int_{\sqrt{3}\tilde{\eta}-4}^{-\sqrt{3}\tilde{\eta}} \frac{d\tilde{o}}{\sqrt{(\tilde{x}-\tilde{o})^2 + (\tilde{y}-\tilde{z})^2}}$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \tilde{z} \cdot \ln \frac{3 \cdot (-\tilde{x} - \sqrt{3}\tilde{z} + \sqrt{\tilde{x}^2 + 2\tilde{x}\sqrt{3}\tilde{z} - 2\tilde{y}\tilde{z} + 4\tilde{z}^2 + \tilde{y}^2})}{-3\tilde{x} + \sqrt{3}\tilde{z} - 9 + \sqrt{9\tilde{x}^2 - 6\tilde{x}\sqrt{3}\tilde{z} + 54\tilde{x} - 18\tilde{y}\tilde{z} + 12\tilde{z}^2 - 18\sqrt{3}\tilde{z} + 81 + 9\tilde{y}^2}} d\tilde{z} +$$

$$+ \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \tilde{z} \cdot \ln \frac{-\tilde{x} - \sqrt{3}\tilde{z} + \sqrt{\tilde{x}^2 + 2\tilde{x}\sqrt{3}\tilde{z} - 2\tilde{y}\tilde{z} + 4\tilde{z}^2 + \tilde{y}^2}}{-\tilde{x} + \sqrt{3}\tilde{z} - 4 + \sqrt{\tilde{x}^2 - 2\tilde{x}\sqrt{3}\tilde{z} + 8\tilde{x} - 2\tilde{y}\tilde{z} + 4\tilde{z}^2 - 8\sqrt{3}\tilde{z} + 16 + \tilde{y}^2}} d\tilde{z},$$

где: $\tilde{o} = -o \frac{\sqrt{3}}{2} + (z-2) \frac{1}{2}$, $\tilde{x} = -x \frac{\sqrt{3}}{2} + (y-2) \frac{1}{2}$, $\tilde{z} = -o \frac{1}{2} - (z-2) \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tilde{y} = -x \frac{1}{2} - (y-2) \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Аналогично w_1 функцию $w_2 = I_2^S = \sum_{i=1}^4 I_2^{Si}$ представим в графическом виде (рис. 5).

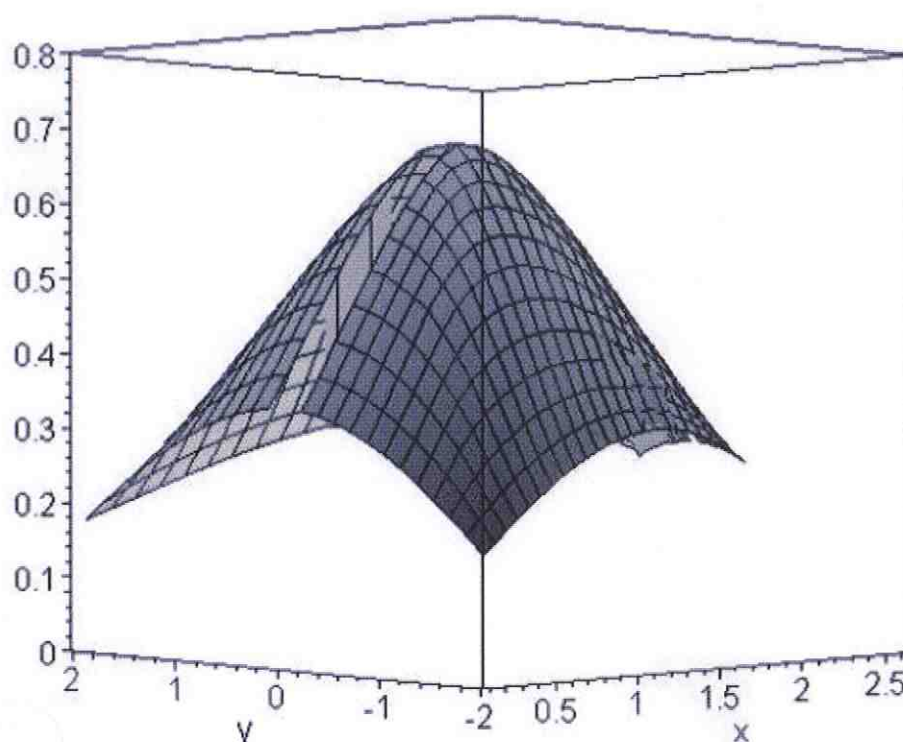


Рис. 5. Прогиб от силы, в безразмерных величинах равной давлению со стороны слоя на тело инструмента.

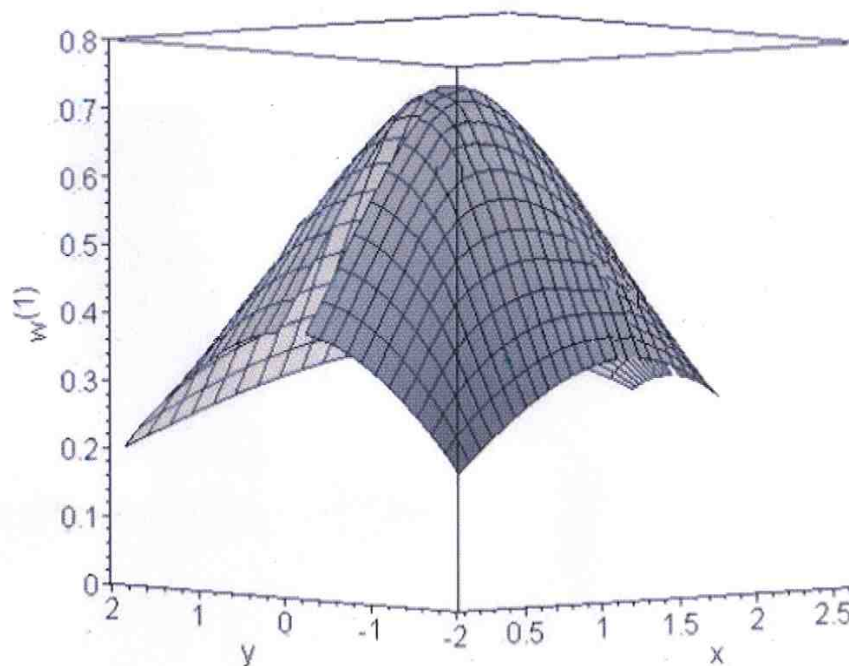


Рис. 6. Поверхность $w(1)(x, y)$.

Окончательно вычислив сумму $w = \partial_o w_1 + \partial_l w_2 = \partial_o I_1^S + \partial_l I_2^S$, найдем, таким образом, функцию $w(1)$ в первом приближении, поверхность которой показана на рис. 6. Вычисления про-

изводились при следующих значениях параметров:

$$y_s = 2 \cdot 10^3 \frac{\kappa \varepsilon}{\text{см}^2}; \quad m = 0,3; \quad E = 2 \cdot 10^6 \frac{\kappa \varepsilon}{\text{см}^2}, \quad \frac{h_0}{l} = \frac{1}{20}.$$

Определив функцию прогиба в первом приближении, следует перейти к следующей, второй итерации метода последовательных приближений, подставив уже найденную $w(1)$ в дифференциальное уравнение (4). Однако, этот процесс несколько затруднителен, ввиду громоздкости аналитического выражения функции $w(1)$. Преодолеть эти затруднения представляется возможным путём замены функции $w(1)$ на интерполяционный полином Лагранжа [8], с достаточной точностью описывающий исходную поверхность функции прогиба.

Построение полинома осуществим по значениям функции w в нескольких точках, от числа которых зависит степень полинома.

С одной стороны, при минимальном количестве выбранных точек степень полинома будет небольшой, что значительно упростит дальнейшие вычисления, с другой – максимальное количество точек обеспечит высокую степень соответствия поверхностей полинома и функции $w(1)$. Исходя из этих соображений, выбрана сетка узловых значений функции w , показанная на рис. 7.

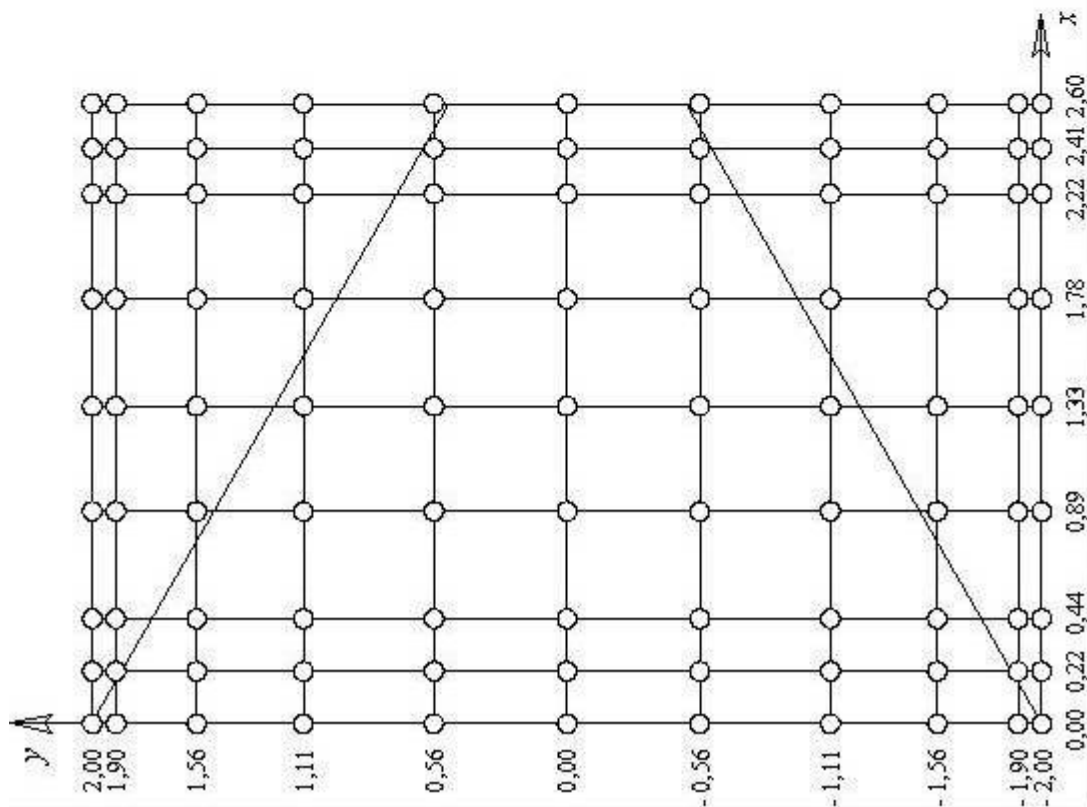
По этим значениям построен интерполяционный полином Лагранжа 18-й степени S , поверхность которого представлена на рис. 8.

$$\begin{aligned} S = & 0,24232410^{-6} y - 0,73920 y^8 x^7 + 0,06673 y^8 x^8 + 0,48110 y^2 x - 10,38243 y^2 x^6 + \\ & + 0,82953410^{-5} y^7 x^8 + 0,00013 y^7 x^2 + 0,46068410^{-6} y^9 x + 0,00004 y^9 x^3 - \\ & - 0,92539410^{-5} y^9 x^2 - 0,00006 y^9 x^4 + 0,00083 y^7 x^4 + 0,64438410^{-5} y^9 x^7 - 0,00587 y^{10} x^8 \\ & - 0,94363410^{-5} y^7 x + 0,00104 y x^5 + 13,34031 y^4 x^2 + 0,00005 y^5 x + 17,36519 y^2 x^3 + \\ & + 23,23803 y^2 x^5 - 5,21263 y^2 x^2 - 27,90590 y^2 x^4 + 0,43436 y^4 x^8 - 0,00117 y x^4 - \\ & - 0,00074 y^7 x^5 + 31,23683 y^6 x^5 - 7,30575 y^8 x^3 + 3,33986 y^8 x^6 + 2,51617 y^8 x^2 + \\ & + 0,00202 y^3 x^6 - 0,00007 y^3 x - 0,00421 y^3 x^5 - 0,21907 y^2 x^8 - 0,00050 y^3 x^7 + 0,00077 y^3 x^2 + \\ & + 0,00005 y^3 x^8 - 7,88256 y^8 x^5 + 2,37519 y^2 x^7 + 0,02990 y^{10} x - 0,00003 y^5 x^8 - 0,00009 y^7 x^7 - \\ & - 0,00003 y^9 x^6 + 0,00035 y^5 x^7 - 1,50449 y^4 x + 0,66171 y^{10} x^3 - 13,32453 y^6 x^6 + \\ & + 0,00473 y^3 x^4 - 0,92113 y^{10} x^4 - 0,23349 y^{10} x^2 + 0,06508 y^{10} x^7 - 0,29471 y^{10} x^6 + \\ & + 0,69846 y^{10} x^5 + 0,00035 y^7 x^6 - 49,42220 y^4 x^5 + 21,34778 y^4 x^6 + 62,56804 y^4 x^4 + \\ & + 0,00006 y^9 x^5 - 0,00279 y^3 x^3 + 0,00200 y^5 x^3 + 10,31523 y^8 x^4 - 40,39016 y^6 x^4 - \\ & - 41,93162 y^4 x^3 - 0,61312410^{-6} y^9 x^8 - 0,31067 y^8 x - 0,00145 y^5 x^6 + 0,00302 y^5 x^5 - \\ & - 9,33514 y^6 x^2 + 1,10456 y^6 x - 4,77864 y^4 x^7 - 0,00340 y^5 x^4 - 0,00049 y^7 x^3 + \\ & + 0,00002 y x + 2,96028 y^6 x^7 - 0,00054 y^5 x^2 - 0,26783 y^6 x^8 + 0,00069 y x^3 - \\ & - 0,00019 y x^2 - 0,00050 y x^6 + 0,00012 y x^7 - 0,00001 y x^8 + 28,01488 y^6 x^3 + \\ & + 0,00043 y^8 - 0,05113 y^2 - 0,57168 10^{-6} y^7 + 0,76100410^{-7} y^9 - 0,00004 y^{10} + \\ & + 0,00478 y^4 + 0,13716410^{-5} y^5 - 0,00154 y^6 + 0,43208 x - 0,11485410^{-5} y^3 - 0,09130 x^7 - \\ & - 0,00673 x^8 + 1,21954 x^3 - 0,49859 x^6 - 1,99342 x^4 - 0,25471 x^2 + 1,38825 x^5 + 0,34667 \end{aligned}$$

Для наглядного анализа степени соответствия поверхностей полинома и функции прогиба построены различные сечения (рис. 9, 10, 11), иллюстрирующие достаточное сходство поверхностей.

Следующий шаг в проводимых исследованиях – использование полученного полинома при отыскании второго приближения для функции прогибов. Вид уравнения и ранее полученные результаты позволяют утверждать о сходимости данного метода, однако, для каждой задачи скорость сходимости разная.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 06-08-00391 а.

Значения функции $w^{(0)}(x, y)$ в узлах сетки.

$x \backslash y$	2,00	1,90	1,56	1,11	0,56	0,00	-0,56	-1,11	-1,56	-1,90	-2,00
2,00	0,18663	0,19688	0,20277	0,20496	0,19769	0,18415	0,16790	0,16058	0,15328		
1,90	0,19898	0,21199	0,21714	0,21788	0,20866	0,19291	0,17457	0,16644	0,15841		
1,56	0,24008	0,28545	0,29940	0,27962	0,25678	0,22934	0,20109	0,18924	0,17788		
1,11	0,28909	0,35833	0,42112	0,43594	0,37588	0,30338	0,24872	0,22810	0,20936		
0,56	0,33152	0,41716	0,50651	0,62936	0,59019	0,48267	0,35706	0,30468	0,25923		
0,00	0,34708	0,43835	0,53616	0,70355	0,72619	0,61421	0,44180	0,36327	0,29183		
-0,56	0,33152	0,41716	0,50651	0,62936	0,59019	0,48267	0,35706	0,30468	0,25923		
-1,11	0,28909	0,35833	0,42112	0,43594	0,37588	0,30338	0,24872	0,22810	0,20936		
-1,56	0,24008	0,28545	0,29940	0,27962	0,25678	0,22934	0,20109	0,18924	0,17788		
-1,90	0,19898	0,21199	0,21714	0,21788	0,20866	0,19291	0,17457	0,16644	0,15841		
-2,00	0,18663	0,19688	0,20277	0,20496	0,19769	0,18415	0,16790	0,16058	0,15328		

Рис. 7. Схема расположения узлов сетки.

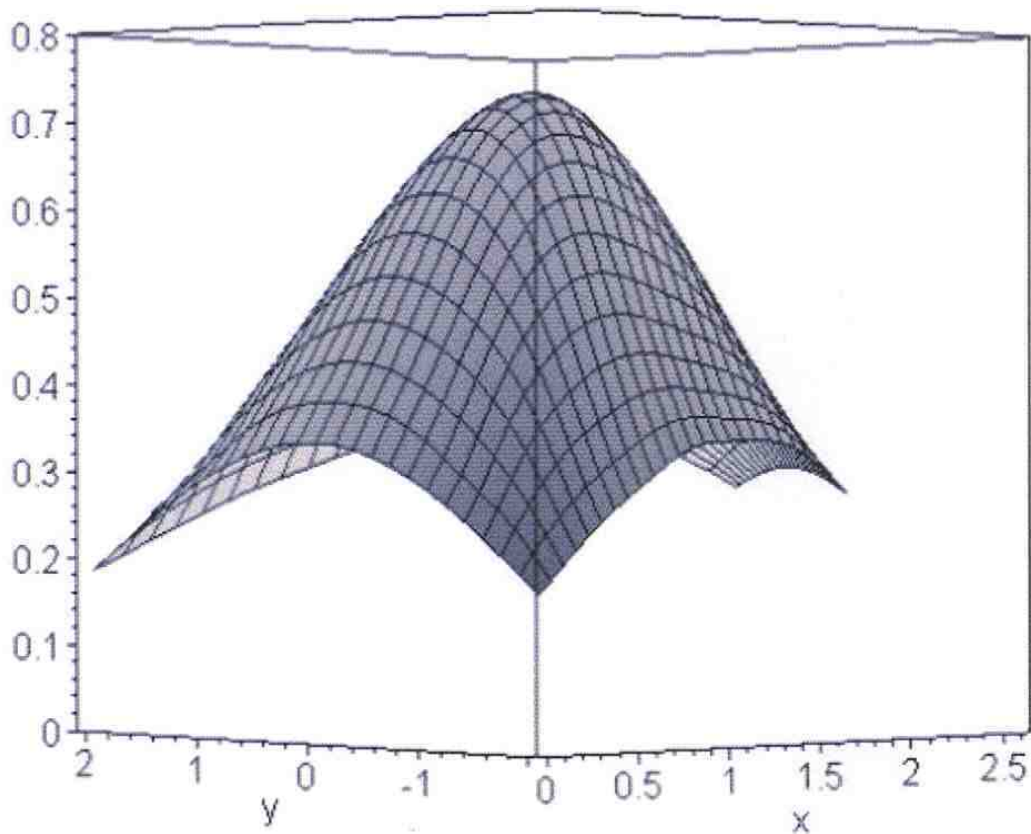


Рис. 8. Поверхность интерполяционного полинома Лагранжа 18-ой степени.

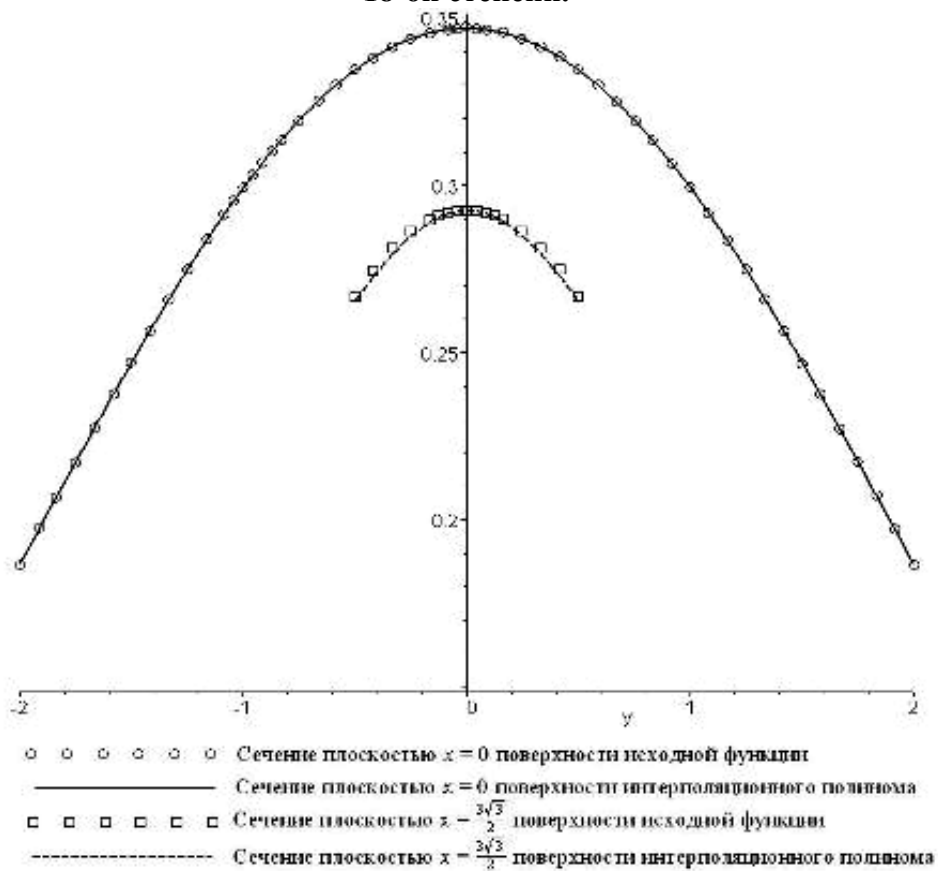


Рис. 9. Сравнительные сечения поверхностей исходной функции и интерполяционного полинома плоскостями $x = 0$ и $x = 3\sqrt{3}/2$.

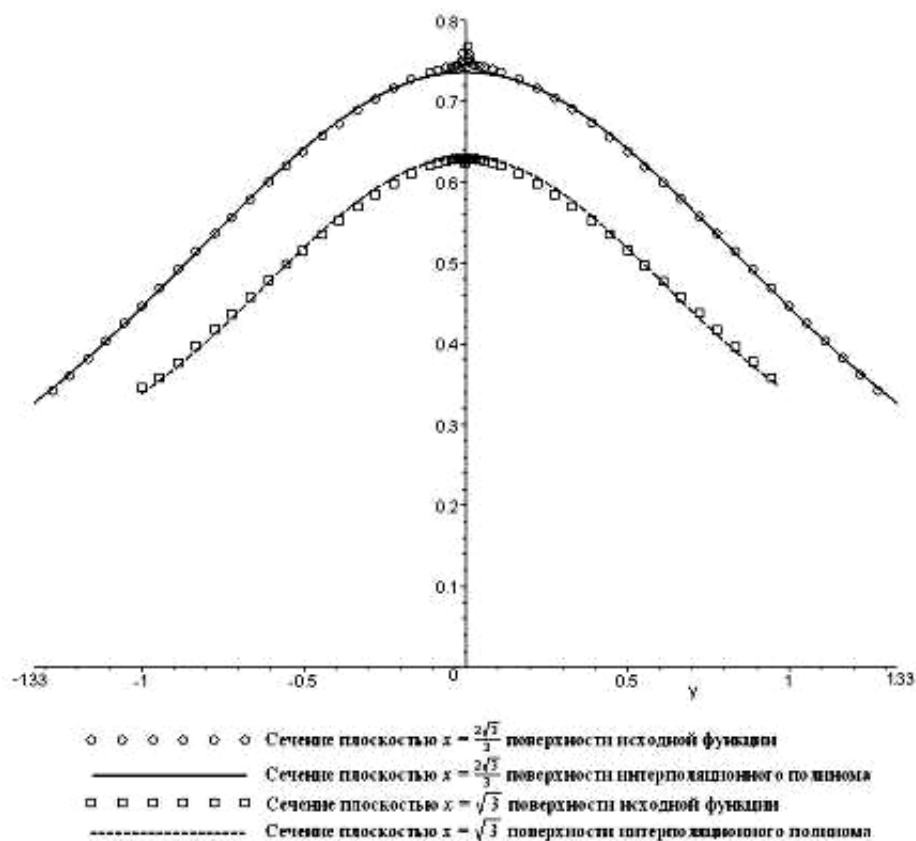


Рис. 10. Сравнительные сечения поверхностей исходной функции и интерполяционного полинома плоскостями $x = \sqrt{3}$ и $x = 2\sqrt{3}/3$.

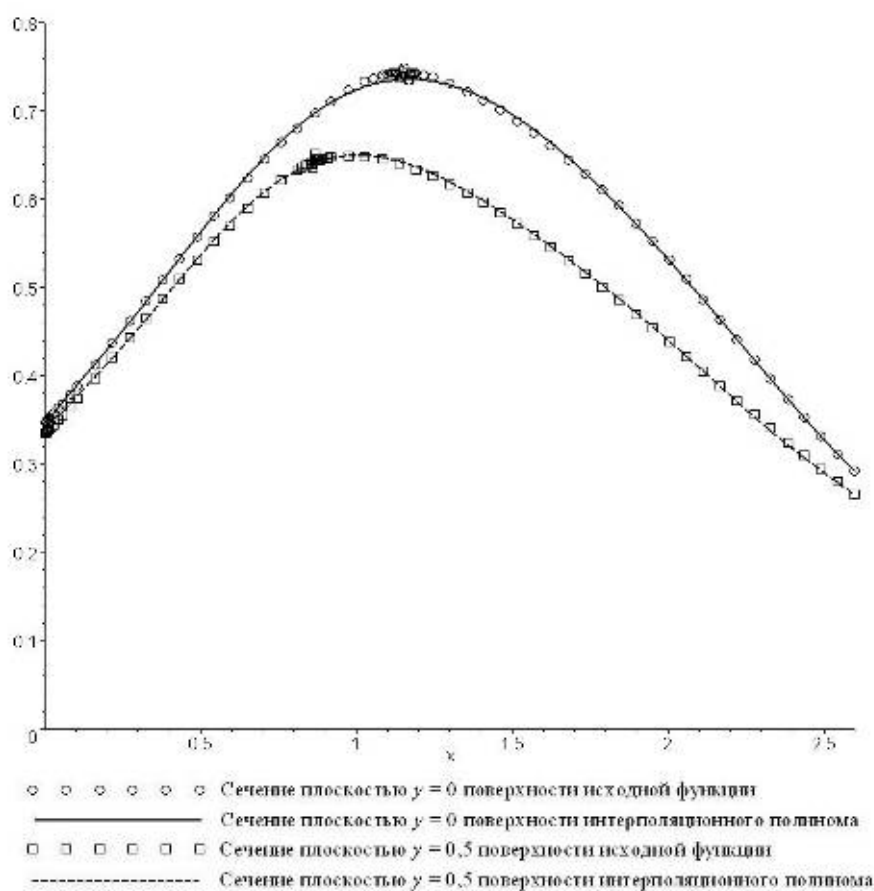


Рис. 11. Сравнительные сечения поверхностей исходной функции и интерполяционного полинома плоскостями $y = 0$ и $y = 0,5$.

Литература

1. Безухов Н.И. Теория упругости и пластичности. М., Гостехизд, 1953, 420 с.
2. Бодунов Д.М. Течение тонкого слоя идеально-пластического материала по деформируемым поверхностям // Дис. канд. физ.-мат.н. – М.: МГТУ МАМИ, 2004, 163 с.
3. Ильюшин А.А. Некоторые вопросы пластического течения. // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. №2. с. 64-68.
4. Ильюшин А.А. Полная пластичность в процессах течения между жёсткими поверхностями, аналогия с песчаной насыпью и некоторые приложения // Прикл. матем. и мех. 1955, т. 19, № 6. с. 693-713.
5. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука. 1969, 420 с.
6. Кийко И.А. Теория пластического течения. М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 50-57.
7. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М.: Изд. ИЛ, 1960, 300 с.
8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Изд. Наука, 1969, т. 2., 800 с.

Численное моделирование релаксационных автоколебаний в двухмассовой системе с трением при периодическом характере нагружения

Михайлова В.Л.
МГТУ «МАМИ»

Рассматривается двухмассовая система с двумя источниками кулоновского трения под действием периодически изменяющейся нагрузки. Решение соответствующей задачи динамики осуществляется на основе пошаговой вычислительной процедуры с регуляризацией и итерациями на каждом временном шаге. Сравниваются результаты моделирования, обусловленных трением автоколебаний, для гармонического и линейного законов нагружения.

Для различного рода технических устройств, машин и их элементов характерна работа в условиях действия сил трения. Сочетание таких факторов, как упругость и трение, может при определенных условиях привести к возникновению фрикционных автоколебаний в процессе работы соответствующего устройства и нарушить его нормальное функционирование. В режимах медленно изменяющихся нагрузок такие фрикционные автоколебания носят релаксационный характер, когда этап относительного движения сменяется этапом относительного застоя.

При исследовании фрикционных автоколебаний релаксационного типа во многих случаях допустимо использование кулоновской модели трения со скачкообразным падением значения силы трения при переходе от покоя к скольжению [1]. На основе такой модели в [2] выполнено численное исследование релаксационных автоколебаний в двухмассовой системе с двумя источниками трения при постоянной скорости нагружения (случай линейной зависимости приложенной нагрузки от времени). В настоящей статье аналогичное исследование осуществляется для закона нагружения периодического типа, характерного для многих технических систем.

Расчетная схема рассматриваемой системы представлена на рис. 1. Здесь m_1, m_2 – массы, c_1, c_2 – жесткости упругих элементов, b_1, b_2 – коэффициенты вязкости, F_{T1}, F_{T2} – значения сил трения в состоянии скольжения. Предполагается, что непосредственно перед началом скольжения силы трения покоя $F_{Tп1}, F_{Tп2}$ превышают соответствующие силы F_{T1}, F_{T2} при скольжении так, что

$$F_{Tп1} = (1 + f_{T1})F_{T1}, \quad F_{Tп2} = (1 + f_{T2})F_{T2}, \quad (1)$$

где безразмерные параметры f_{T1}, f_{T2} характеризуют степень указанного превышения.

Уравнения движения рассматриваемой системы под действием изменяющейся во времени силы $P(t)$ могут быть записаны в виде: