

Литература

1. Безухов Н.И. Теория упругости и пластичности. М., Гостехизд, 1953, 420 с.
2. Бодунов Д.М. Течение тонкого слоя идеально-пластического материала по деформируемым поверхностям // Дис. канд. физ.-мат.н. – М.: МГТУ МАМИ, 2004, 163 с.
3. Ильюшин А.А. Некоторые вопросы пластического течения. // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. №2. с. 64-68.
4. Ильюшин А.А. Полная пластичность в процессах течения между жёсткими поверхностями, аналогия с песчаной насыпью и некоторые приложения // Прикл. матем. и мех. 1955, т. 19, № 6. с. 693-713.
5. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука. 1969, 420 с.
6. Кийко И.А. Теория пластического течения. М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 50-57.
7. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М.: Изд. ИЛ, 1960, 300 с.
8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Изд. Наука, 1969, т. 2., 800 с.

Численное моделирование релаксационных автоколебаний в двухмассовой системе с трением при периодическом характере нагружения

Михайлова В.Л.
МГТУ «МАМИ»

Рассматривается двухмассовая система с двумя источниками кулоновского трения под действием периодически изменяющейся нагрузки. Решение соответствующей задачи динамики осуществляется на основе пошаговой вычислительной процедуры с регуляризацией и итерациями на каждом временном шаге. Сравниваются результаты моделирования, обусловленных трением автоколебаний, для гармонического и линейного законов нагружения.

Для различного рода технических устройств, машин и их элементов характерна работа в условиях действия сил трения. Сочетание таких факторов, как упругость и трение, может при определенных условиях привести к возникновению фрикционных автоколебаний в процессе работы соответствующего устройства и нарушить его нормальное функционирование. В режимах медленно изменяющихся нагрузок такие фрикционные автоколебания носят релаксационный характер, когда этап относительного движения сменяется этапом относительного застоя.

При исследовании фрикционных автоколебаний релаксационного типа во многих случаях допустимо использование кулоновской модели трения со скачкообразным падением значения силы трения при переходе от покоя к скольжению [1]. На основе такой модели в [2] выполнено численное исследование релаксационных автоколебаний в двухмассовой системе с двумя источниками трения при постоянной скорости нагружения (случай линейной зависимости приложенной нагрузки от времени). В настоящей статье аналогичное исследование осуществляется для закона нагружения периодического типа, характерного для многих технических систем.

Расчетная схема рассматриваемой системы представлена на рис. 1. Здесь m_1, m_2 – массы, c_1, c_2 – жесткости упругих элементов, b_1, b_2 – коэффициенты вязкости, F_{T1}, F_{T2} – значения сил трения в состоянии скольжения. Предполагается, что непосредственно перед началом скольжения силы трения покоя $F_{Tп1}, F_{Tп2}$ превышают соответствующие силы F_{T1}, F_{T2} при скольжении так, что

$$F_{Tп1} = (1 + f_{T1})F_{T1}, \quad F_{Tп2} = (1 + f_{T2})F_{T2}, \quad (1)$$

где безразмерные параметры f_{T1}, f_{T2} характеризуют степень указанного превышения.

Уравнения движения рассматриваемой системы под действием изменяющейся во времени силы $P(t)$ могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned}
 m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + b_1 \frac{dx_1}{dt} + F_{T1} \frac{dx_1}{dt} \left/ \left| \frac{dx_1}{dt} \right| \right. + c_1(x_1 - x_2) &= P(t), \\
 m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + b_2 \frac{dx_2}{dt} + F_{T2} \frac{dx_2}{dt} \left/ \left| \frac{dx_2}{dt} \right| \right. + c_2 x_2 - c_1(x_1 - x_2) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Осуществляемые ниже исследования предполагают два типа периодических зависимостей нагрузки от времени. Во-первых, это кусочно-линейная периодическая зависимость (с периодом T и частотой $\omega = 2\pi/T$), формулируемая в виде

$$P = \frac{\pi P_2}{2t_2} \left[t_2 - \int_0^t \text{sign}(\sin \omega t) dt \right],
 \tag{3}$$

и соответствующая случаю постоянной по модулю скорости нагружения. Здесь $t_2 = T/4$, а величина $\pi P_2 / 2$ представляет собой максимальное значение силы P . Во-вторых, это гармонический аналог кусочно-линейной периодической зависимости (3), записываемый в виде

$$P = \frac{\pi^2}{8} P_2 \cos \omega t.
 \tag{4}$$

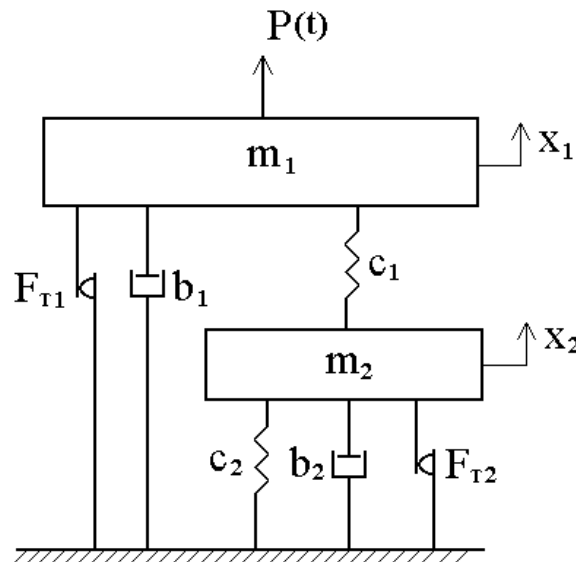


Рис. 1.

Коэффициент $\pi^2 / 8$ в записи (4) подобран таким образом, чтобы импульсы сил (интегралы по времени), вычисляемые на интервале $0 \leq t \leq T/4$ с использованием зависимостей (3) и (4), были одинаковы.

Введем в рассмотрение константу v , характеризующую масштаб скоростей в процессе движения системы, а именно:

$$v = P_2 \omega / c_1.
 \tag{5}$$

Введем, кроме того, обозначения:

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= \sqrt{c_1 / m_1}, \quad \omega_2 = \sqrt{c_2 / m_2}, \quad \tilde{\omega}_{21} = \omega_2 / \omega_1, \quad \tilde{m}_{12} = m_1 / m_2, \\
 \tau &= \omega_1 t, \quad q_1 = x_1 \omega_1 / v, \quad q_2 = x_2 \omega_1 / v, \\
 \tilde{F}_{T1} &= F_{T1} / (m_1 \omega_1 v), \quad \tilde{F}_{T2} = \tilde{\omega}_{21} F_{T2} / (m_2 \omega_2 v), \\
 \xi_1 &= b_1 \omega_1 / (c_1 \tilde{F}_{T1}), \quad \xi_2 = \tilde{\omega}_{21} b_2 \omega_2 / (c_2 \tilde{F}_{T2}), \quad \tilde{P} = P \omega_1 / (c_1 v),
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

с помощью которых приведем уравнения движения (2) и законы нагружения (3), (4) к безразмерному виду. При этом для уравнений движения получаем соответствующий безразмерный аналог вида:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q_1}{d\tau^2} + \xi_1 \tilde{F}_{T1} \frac{dq_1}{d\tau} + \tilde{F}_{T1} \frac{dq_1}{d\tau} \left/ \left| \frac{dq_1}{d\tau} \right| + q_1 - q_2 = \tilde{P}(\tau), \right. \\ \left. \frac{d^2 q_2}{d\tau^2} + \xi_2 \tilde{F}_{T2} \frac{dq_2}{d\tau} + \tilde{F}_{T2} \frac{dq_2}{d\tau} \left/ \left| \frac{dq_2}{d\tau} \right| + \tilde{\omega}_{21}^2 q_2 - \tilde{m}_{12}(q_1 - q_2) = 0. \right. \end{aligned} \quad (7)$$

Входящая в (7) зависимость безразмерного параметра нагрузки от безразмерного времени имеет вид:

$$\tilde{P} = \frac{\pi}{2\Omega} - \int_0^{\tau} \text{sign}(\sin \Omega \tau) d\tau \quad (8)$$

или

$$\tilde{P} = \frac{\pi^2}{8\Omega} \cos \Omega \tau. \quad (9)$$

Параметр Ω в (8) и (9) представляет собой относительную частоту изменения нагрузки и определяется формулой:

$$\Omega = \omega / \omega_1. \quad (10)$$

Вводя новые переменные y_1, y_2, y_3, y_4 такие, что $y_1 = q_1, y_2 = dq_1 / d\tau, y_3 = q_2, y_4 = dq_2 / d\tau$, а также обозначения Q_1, Q_2 для входящих в формулировку (7) безразмерных сил трения, приведем уравнения движения (7) к системе дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{d\tau} &= y_2, \\ \frac{dy_2}{d\tau} &= \tilde{P}(\tau) - \xi_1 \tilde{F}_{T1} y_2 - Q_1(y_2) - y_1 + y_3, \\ \frac{dy_3}{d\tau} &= y_4, \\ \frac{dy_4}{d\tau} &= -\xi_2 \tilde{F}_{T2} y_4 - Q_2(y_4) - \tilde{\omega}_{21}^2 y_3 + \tilde{m}_{12}(y_1 - y_3). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь обозначения $Q_1(y_2), Q_2(y_4)$ указывают на зависимость сил трения от скоростей y_2, y_4 .

Численное моделирование с использованием системы (11) осуществлялось на основе вычислительной процедуры, описанной в статье [2]. Такая процедура включает регуляризацию зависимостей сил трения от скорости, применение неявной схемы Эйлера на шаге интегрирования по времени в сочетании с итерационными процессами, обеспечивающими выполнение условий по трению на каждом таком шаге.

Представленные ниже результаты численного моделирования двухмассовой системы с двумя источниками трения относятся к случаю

$$f_{T1} = f_{T2} = 0,1; \quad \tilde{m}_{12} = 1,2; \quad \tilde{\omega}_{21} = 1; \quad \xi_2 / \xi_1 = 1; \quad \tilde{F}_{T2} / \tilde{F}_{T1} = 0,8.$$

При этом периоды собственных колебаний рассматриваемой системы оцениваются величинами $\tilde{T}_1 \approx 10$ и $\tilde{T}_2 \approx 3$.

Прежде чем перейти к анализу результатов численного моделирования, отметим, что для поведения рассматриваемой системы под действием периодически изменяющейся нагрузки в условиях низких значений частоты Ω (медленного протекания процесса нагружения) характерно наличие зоны продолжительного застоя на каждом полупериоде изменения нагрузки. Параметры такого застоя могут быть оценены на основе квазистатического расчета (пренебрегая инерционными и вязкими факторами).

Поскольку периодическая зависимость (8) содержит линейные участки, результаты по

параметрам релаксационных автоколебаний, полученные в [2] для линейного закона нагружения, могут быть непосредственно перенесены на случай кусочно-линейного периодического закона нагружения (8). При этом имеется в виду колебательный процесс, устанавливающийся на каждом полупериоде изменения нагрузки (на промежутке между двумя соседними продолжительными застоями). Соответствующие результаты оформлены в виде табл. 1 и приводятся здесь для сравнения со случаем гармонического закона нагружения.

Таблица 1.

Диапазоны значений параметра \tilde{F}_{T1} , обеспечивающие реализацию соответствующих типов колебаний, в зависимости от величины ξ_1 (случай линейного закона нагружения).

№ ξ_1	1	2	3	4	5	6
0	$\tilde{F}_{T1} < 7$	$7 \leq \tilde{F}_{T1} < 16$	$16 \leq \tilde{F}_{T1} \leq 28$	$\tilde{F}_{T1} > 28$	-	-
0,002	$\tilde{F}_{T1} < 17$	$17 \leq \tilde{F}_{T1} < 21$	$21 \leq \tilde{F}_{T1} < 34$	$34 \leq \tilde{F}_{T1} < 309$	$309 \leq \tilde{F}_{T1} \leq 398$	$\tilde{F}_{T1} > 398$
0,003	$\tilde{F}_{T1} < 27$	-	$27 \leq \tilde{F}_{T1} < 35$	$35 \leq \tilde{F}_{T1} < 174$	$174 \leq \tilde{F}_{T1} \leq 221$	$\tilde{F}_{T1} > 221$
0,004	$\tilde{F}_{T1} < 35$	-	$35 \leq \tilde{F}_{T1} < 44$	$44 \leq \tilde{F}_{T1} < 109$	$109 \leq \tilde{F}_{T1} \leq 129$	$\tilde{F}_{T1} > 129$
0,0045	$\tilde{F}_{T1} < 60$	-	-	$60 \leq \tilde{F}_{T1} < 63$	$63 \leq \tilde{F}_{T1} \leq 99$	$\tilde{F}_{T1} > 99$
0,0047	$\tilde{F}_{T1} < 64$	-	-	-	$64 \leq \tilde{F}_{T1} \leq 89$	$\tilde{F}_{T1} > 89$
0,0048	$\tilde{F}_{T1} < 66$	-	-	-	$66 \leq \tilde{F}_{T1} \leq 71$	$\tilde{F}_{T1} > 71$

В каждой из строк табл. 1 при фиксированном значении коэффициента вязкости ξ_1 указаны граничные значения параметра трения \tilde{F}_{T1} , выход за которые ведет к качественному изменению картины автоколебаний. Соответствующие диапазоны параметра \tilde{F}_{T1} с качественно различной ситуацией по режиму автоколебаний расположены в столбцах 1–6 таблицы 1. Прочерк означает, что при заданном значении ξ_1 соответствующий режим из набора 1–6 не реализуется.

Попадание значений параметра \tilde{F}_{T1} в столбцы 1 и 6 рассматриваемой таблицы соответствует ситуации отсутствия релаксационных автоколебаний. Типичные картины скоростей установившихся автоколебаний для столбцов 2–5 приведены в [2] с указанием значений параметров \tilde{F}_{T1} и ξ_1 , для которых эти графики построены.

В картину релаксационных автоколебаний типа 2 (по номеру соответствующего столбца в табл. 1) наибольший вклад вносит гармоника с периодом. При этом вклад гармоники с периодом \tilde{T}_2 наблюдается в виде локальных всплесков в картине скоростей. Такой тип автоколебаний устанавливается при небольших значениях параметра трения \tilde{F}_{T1} .

При увеличении параметра \tilde{F}_{T1} увеличивается и вклад гармоники с большей частотой (с периодом \tilde{T}_2). Затем наступает ситуация, когда гармоника с периодом \tilde{T}_2 начинает играть определяющую роль в формировании картины релаксационных автоколебаний (тип 3).

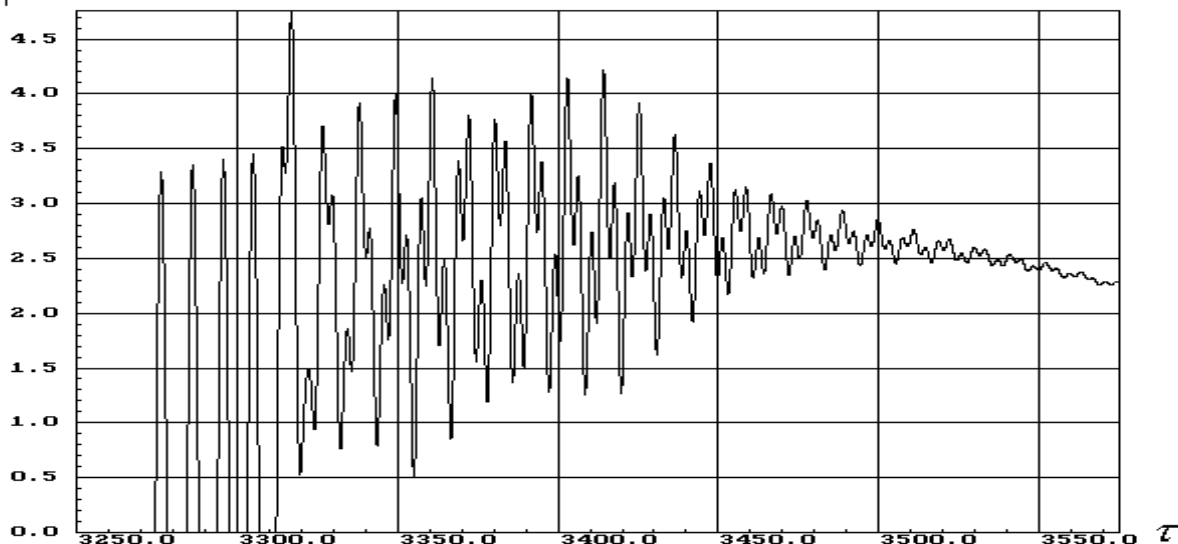
Особенностью колебаний типа 3 является их релаксационный характер по координате q_2 и квазигармонический характер по координате q_1 . Дальнейшее увеличение параметра трения \tilde{F}_{T1} ведет к установлению релаксационных колебаний и по координате q_1 (тип 4). Характерным при этом является наличие локальных всплесков в зоне пиков скоростей.

Наконец при повышенных значениях коэффициента вязкости ξ_1 картина колебаний (тип 5) по координате q_1 теряет релаксационный характер (несмотря на достаточно большие

значения параметра трения \tilde{F}_{T1}). При этом сохраняются локальные всплески в картине скоростей, типичные для больших значений \tilde{F}_{T1} .

Таблица 1 дает представление о том, как по мере роста параметра ξ_1 становится невозможной реализация форм автоколебаний типа 2, затем типов 3 и 4. При $\xi_1=0,0048$ возможно установление автоколебаний (с формой типа 5) лишь для очень узкого диапазона значений параметра трения \tilde{F}_{T1} . Вязкое сопротивление при $\xi_1 \geq 0,0049$ полностью гасит автоколебания (при любых значениях \tilde{F}_{T1}).

$dq_1 / d\tau$



$dq_2 / d\tau$

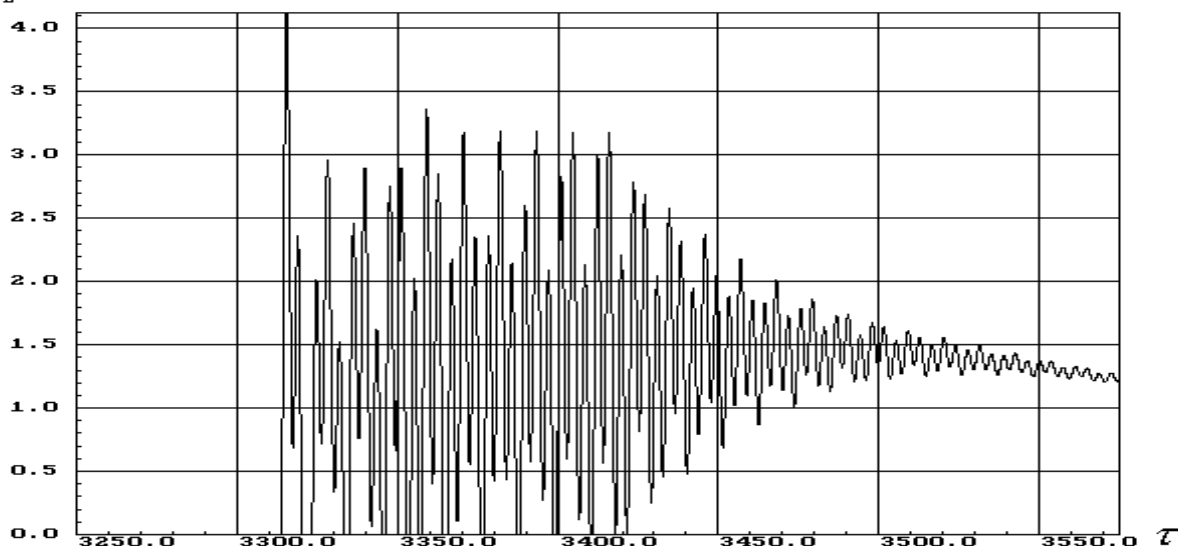


Рис. 2. Установившиеся колебания в двухмассовой системе при гармоническом нагружении. Картина скоростей при $\Omega=0,005$, $\tilde{F}_{T1}=25$ и $\xi_1=0,002$.

В случае гармонического закона (9) скорость нагружения на части полупериода между двумя продолжительными застоями существенно изменяется. Поэтому картина устанавливающихся автоколебаний неоднородна (в отличие от рассмотренного выше случая с постоянной скоростью нагружения на полупериоде). С поправкой на отмеченную неоднородность здесь зафиксированы те же типы 2, 3, 4 автоколебаний, что и в предыдущем случае. Уста-

новлено также и наличие колебаний смешанного типа на части полупериода изменения нагрузки, когда в окрестности продолжительных застоев имеют место релаксационные колебания, а на остальной его части определяющую роль играют собственные колебания (затухающие при наличии вязкости). Такой тип устанавливающихся колебаний иллюстрирует рис. 2.

Качественные и количественные эффекты, связанные с влиянием частоты Ω приложенной нагрузки, параметра трения \tilde{F}_{T1} и коэффициента вязкости ξ_1 на режим автоколебаний в рассматриваемой двухмассовой системе, обнаруживаются из анализа результатов расчетов, приведенных в таблицах 2, 3, 4. Столбец с номером 1 у каждой из таблиц соответствует ситуации отсутствия автоколебаний. Номера столбцов, отличные от единицы, соответствуют отмеченным типам колебаний в системе, а диапазоны значений параметра трения \tilde{F}_{T1} в столбцах указывают величины \tilde{F}_{T1} , которые обеспечивают реализацию соответствующего типа колебаний. Каждая из строк таблиц содержит результаты, полученные при фиксированном значении параметра, указанного в крайнем левом столбце. При анализе неравенств в столбце 4 следует иметь в виду требования к величине параметра \tilde{F}_{T1} , а именно, значения \tilde{F}_{T1} должны быть такими, чтобы длительность зоны колебаний на полупериоде изменения нагрузки существенно превышала длительность продолжительного застоя.

Качественные и количественные эффекты, связанные с влиянием частоты Ω приложенной нагрузки, параметра трения \tilde{F}_{T1} и коэффициента вязкости ξ_1 на режим автоколебаний в рассматриваемой двухмассовой системе, обнаруживаются из анализа результатов расчетов, приведенных в таблицах 2, 3, 4.

Столбец с номером 1 у каждой из таблиц соответствует ситуации отсутствия автоколебаний. Номера столбцов, отличные от единицы, соответствуют отмеченным типам колебаний в системе, а диапазоны значений параметра трения \tilde{F}_{T1} в столбцах указывают величины \tilde{F}_{T1} , которые обеспечивают реализацию соответствующего типа колебаний. Каждая из строк таблиц содержит результаты, полученные при фиксированном значении параметра, указанного в крайнем левом столбце. При анализе неравенств в столбце 4 следует иметь в виду требования к величине параметра \tilde{F}_{T1} , а именно, значения \tilde{F}_{T1} должны быть такими, чтобы длительность зоны колебаний на полупериоде изменения нагрузки существенно превышала длительность продолжительного застоя.

Таблица 2 демонстрирует влияние частоты Ω приложенной нагрузки на режимы колебаний в отсутствие вязкого сопротивления ($\xi_1=0$). Сравнение с аналогичными результатами, полученными для случая постоянной скорости нагружения, показывает, что в случае гармонического закона нагружения значения параметра трения \tilde{F}_{T1} , обеспечивающие установление режима релаксационных автоколебаний (в форме смешанных колебаний типа $\tilde{2}$, когда основной вклад в колебания вносит низкочастотная составляющая собственных колебаний с периодом \tilde{T}_1), в два и более раз меньше, чем в случае постоянной скорости нагружения. (Отметим, что при формировании таблиц 2, 3, 4 использовался критерий, согласно которому колебания относились к типу смешанных, если продолжительность релаксационной фазы в них составляла не менее 5% полупериода π/Ω изменения нагрузки).

Сравнивая с использованием данных таблицы 2 условия реализации автоколебаний типов 2 и 3 при $\Omega = 0,003$ (соответственно $9 \leq \tilde{F}_{T1} < 17$ и $17 \leq \tilde{F}_{T1} \leq 34$) и при $\Omega = 0,005$ (соответственно $10 \leq \tilde{F}_{T1} < 26$ и $26 \leq \tilde{F}_{T1} \leq 34$), приходим к выводу о существенном влиянии частоты Ω изменения нагрузки на установление того или иного из указанных режимов автоколебаний. В данном конкретном случае эффект влияния частоты Ω изменения нагрузки наблю-

дается в виде двукратного (при переходе от $\Omega = 0,003$ к $\Omega = 0,005$) расширения диапазона значений параметра трения \tilde{F}_{T1} , обеспечивающих реализацию режима автоколебаний типа 2 и, соответственно, двукратного сокращения аналогичного диапазона применительно к режиму автоколебаний типа 3.

Таблица 2.

Диапазоны значений параметра \tilde{F}_{T1} , обеспечивающие реализацию соответствующих типов колебаний, в зависимости от величины Ω в случае гармонического закона нагружения.

№ Ω	1	$\tilde{2}$	2	3	4
0,003	$\tilde{F}_{T1} < 4$	$4 \leq \tilde{F}_{T1} < 9$	$9 \leq \tilde{F}_{T1} < 17$	$17 \leq \tilde{F}_{T1} \leq 34$	$\tilde{F}_{T1} > 34$
0,004	$\tilde{F}_{T1} < 3$	$3 \leq \tilde{F}_{T1} < 8$	$8 \leq \tilde{F}_{T1} < 21$	$21 \leq \tilde{F}_{T1} \leq 34$	$\tilde{F}_{T1} > 34$
0,005	$\tilde{F}_{T1} < 3$	$3 \leq \tilde{F}_{T1} < 10$	$10 \leq \tilde{F}_{T1} < 26$	$26 \leq \tilde{F}_{T1} \leq 34$	$\tilde{F}_{T1} > 34$
0,01	$\tilde{F}_{T1} < 1$	$1 \leq \tilde{F}_{T1} < 11$	$11 \leq \tilde{F}_{T1} < 23$	$23 \leq \tilde{F}_{T1} \leq 34$	$\tilde{F}_{T1} > 34$

Таблица 3.

Диапазоны значений параметра \tilde{F}_{T1} , обеспечивающие реализацию соответствующих типов колебаний, в зависимости от величины ξ_1 (случай гармонического закона нагружения при $\Omega = 0,003$).

№ ξ_1	1	$\tilde{2}$	2	3	$\tilde{4}$	4
0	$\tilde{F}_{T1} < 4$	$4 \leq \tilde{F}_{T1} < 9$	$9 \leq \tilde{F}_{T1} < 17$	$17 \leq \tilde{F}_{T1} \leq 34$	-	$\tilde{F}_{T1} > 34$
0,001	$\tilde{F}_{T1} < 6$	$6 \leq \tilde{F}_{T1} < 17$	$17 \leq \tilde{F}_{T1} < 20$	$20 \leq \tilde{F}_{T1} \leq 37$	-	$\tilde{F}_{T1} > 37$
0,002	$\tilde{F}_{T1} < 10$	$10 \leq \tilde{F}_{T1} < 20$	-	$20 \leq \tilde{F}_{T1} \leq 40$	-	$\tilde{F}_{T1} > 40$
0,003	$\tilde{F}_{T1} < 12$	$12 \leq \tilde{F}_{T1} < 19$	-	$19 \leq \tilde{F}_{T1} \leq 45$	-	$\tilde{F}_{T1} > 45$
0,0032	$\tilde{F}_{T1} < 19$	-	-	$19 \leq \tilde{F}_{T1} \leq 40$	$40 < \tilde{F}_{T1} \leq 46$	$\tilde{F}_{T1} > 46$

Таблица 4.

Диапазоны значений параметра \tilde{F}_{T1} , обеспечивающие реализацию соответствующих типов колебаний, в зависимости от величины ξ_1 (случай гармонического закона нагружения при $\Omega = 0,005$).

№ ξ_1	1	$\tilde{2}$	2	3	$\tilde{4}$	4
0	$\tilde{F}_{T1} < 3$	$3 \leq \tilde{F}_{T1} < 10$	$10 \leq \tilde{F}_{T1} < 26$	$26 \leq \tilde{F}_{T1} \leq 34$	-	$\tilde{F}_{T1} > 34$
0,001	$\tilde{F}_{T1} < 11$	$11 \leq \tilde{F}_{T1} < 14$	$14 \leq \tilde{F}_{T1} < 30$	$30 \leq \tilde{F}_{T1} \leq 40$	-	$\tilde{F}_{T1} > 40$
0,002	$\tilde{F}_{T1} < 18$	$18 \leq \tilde{F}_{T1} < 26$	$26 \leq \tilde{F}_{T1} < 29$	$29 \leq \tilde{F}_{T1} \leq 41$	-	$\tilde{F}_{T1} > 41$
0,003	$\tilde{F}_{T1} < 28$	-	-	$28 \leq \tilde{F}_{T1} \leq 34$	$34 < \tilde{F}_{T1} \leq 47$	$\tilde{F}_{T1} > 47$

Данные таблиц 3 и 4 позволяют дать оценку влияния параметра вязкости ξ_1 на условия реализации рассматриваемых типов релаксационных автоколебаний в исследуемой двухмассовой системе при различных значениях параметра частоты изменения нагрузки (при $\Omega = 0,003$ и $\Omega = 0,005$).

Столбец с номером $\tilde{4}$ каждой из таблиц соответствует режиму смешанных колебаний (релаксационные колебания в сочетании с затухающими собственными колебаниями), основной вклад в которые вносит высокочастотная составляющая (с периодом $\tilde{T}_2 \approx 3$). При

достаточно малых значениях коэффициента вязкости ξ_1 релаксационные колебания типа 3 с увеличением параметра трения \tilde{F}_{T1} преобразуются в тип 4, минуя смешанную форму $\tilde{4}$. Соответствующий диапазон значений параметра трения при этом зависит от частоты Ω изменения нагрузки. Как видно из таблиц 3 и 4, увеличение параметра ξ_1 ведет к ситуации, когда становится невозможной реализация режима релаксационных автоколебаний типа 2 (подобные автоколебания сохраняются лишь в форме $\tilde{2}$). Дальнейшее увеличение параметра ξ_1 приводит к полному гашению релаксационных автоколебаний типов 2 и $\tilde{2}$, основанных на низкочастотной составляющей собственных колебаний системы. Значения параметра трения \tilde{F}_{T1} , которые способны при этом обеспечить реализацию релаксационных автоколебаний типа 3, основанных на высокочастотной составляющей собственных колебаний системы, существенно зависят от величины параметра Ω . Сравнивая подобные значения параметра \tilde{F}_{T1} для случаев $\Omega = 0,003$ и $\Omega = 0,005$ (соответственно $\tilde{F}_{T1}=19$ и $\tilde{F}_{T1}=28$), приходим к выводу, что указанная существенная зависимость выражается в почти пятидесятипроцентном при переходе от $\Omega = 0,003$ к $\Omega = 0,005$ увеличении значений параметра трения \tilde{F}_{T1} , способных обеспечить реализацию релаксационных автоколебаний типа 3 (в ситуации, когда колебания типа 2 и $\tilde{2}$ гасятся вязким сопротивлением). К аналогичной оценке приводит и сравнение ситуации с $\Omega = 0,003$ и случаем постоянной скорости нагружения рассматриваемой двухмассовой системы.

Выводы

1. На основе вычислительной процедуры, включающей регуляризацию зависимостей сил трения от скорости, неявную схему Эйлера численного интегрирования и итерации на каждом шаге по времени, выполнено исследование релаксационных автоколебаний в двухмассовой упругой системе с двумя источниками трения, находящейся под действием периодически изменяющейся нагрузки.
2. Представленные результаты демонстрируют эффекты влияния параметров исследуемой механической системы на типы устанавливающихся релаксационных автоколебаний.

Литература

3. Геккер Ф.Р. Динамика машин, работающих без смазочных материалов в узлах трения. М.: Машиностроение, 1983. 167 с.
4. Михайлова В.Л. Вычислительная модель для исследования релаксационных автоколебаний в двухмассовых упругих системах с двумя источниками трения // Известия вузов. Машиностроение. 2003. №10. с.16-25.

Применение метода конечных элементов для определения технологических параметров в операциях растяжения металлического листа

Сухомлинов Л.Г., Швая А.П.
МГТУ «МАМИ»

Представлена модификация разработанной ранее жесткопластической конечноэлементной модели формоизменения листовых металлов на случай учета ортотропии пластических свойств листового материала. Приведены результаты расчетных и экспериментальных исследований растяжения прямоугольных образцов из листовой стали 08ю и латуни Л68 при больших пластических деформациях.

В листовой штамповке растяжение металлического листа является довольно распространенной технологической операцией. Подобная операция используется, например, в целях устранения незначительных дефектов типа исходного коробления листа, а также для предварительного растяжения листа с целью рационального использования металла и повы-