

РАЗДЕЛ 3. ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

Численное решение задачи о концентрации напряжений для случая трехслойной упругой плоскости с двумя одинаковыми вертикально расположенными круговыми отверстиями при продольном растяжении

к.т.н., доцент Михайлова В.Л., д.т.н., проф. Сухомлинов Л.Г., Мазин В.А.
 Московский государственный технический университет «МАМИ»
 Кубанский государственный университет
 (495) 223-05-23, доб.1318

Аннотация. Излагаются результаты по распределению напряжений в продольно растягиваемой трехслойной упругой плоскости с двумя одинаковыми вертикально расположенными круговыми отверстиями, полученные с применением вариационно-разностной процедуры численного решения задач плоской теории упругости для прямоугольных областей с отверстиями. Дается оценка влияния упругих постоянных слоев на уровень напряжений вокруг отверстий.

Ключевые слова: растяжение трехслойной упругой плоскости с двумя отверстиями, напряжения вокруг кругового отверстия.

Вопросы концентрации напряжений около всевозможного рода вырезов, отверстий и включений в однородных упругих телах достаточно подробно (в рамках плоской постановки задачи статики теории упругости) исследованы в литературе [1]. Гораздо менее исследованными в этом плане остаются случаи, касающиеся тел неоднородной, в частности, слоистой структуры. Из имеющихся публикаций этого направления можно отметить работы [2, 3], где получены решения задач о концентрации напряжений в двухслойных упругих средах с дефектами типа щелей и включений на межслойной границе. Между тем практический интерес представляют также случаи слоистых сред, ослабленных отверстиями такой широко распространенной формы, как круговая. В настоящей статье вопрос о концентрации напряжений в подобных случаях рассматривается на примере задачи о продольном растяжении трехслойной упругой плоскости, ослабленной двумя одинаковыми вертикально расположенными круговыми отверстиями (рисунок 1).

Исследование выполняется с использованием вариационно-разностной процедуры численного решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области с отверстиями, представленной в статье [4]. При численном моделировании вместо бесконечно протяженного объекта, каким является плоскость, рассматривается конечная прямоугольная область с размерами, многократно превышающими радиус отверстия. Основные соотношения используемой вычислительной модели формулируются следующим образом.

Рассматриваем прямоугольную область S , составленную из изотропных слоев. Считаем, что каждое из имеющихся в области S отверстий заполнено материалом включения с пренебрежимо малым значением модуля Юнга (другими словами, при численном моделировании случай свободного отверстия сводим к случаю включения пренебрежимо малой жесткости; в данном исследовании модуль Юнга такого «фиктивного» включения принят в виде $E/10000$, где E - значение модуля Юнга материала слоя).

На рисунке 2 представлена схема разбиения рассматриваемой области S на $M \times N$ прямоугольных элементов $S^{(i,j)}$ ($i = 1, 2, \dots, M$; $j = 1, 2, \dots, N$). На рисунке 3 представлена схема, изображающая элементарный прямоугольник $S^{(i,j)}$ с системой его срединных материальных волокон и узловых точек. Для определенности считаем, что на участке Γ_u границы Γ рассматриваемой области S , который включает левую и нижнюю стороны прямоугольника S ,

заданы перемещения ($u_x = u_x^*, u_y = u_y^*$), а на остальном участке Γ_q границы Γ заданы поверхностные нагрузки q_x, q_y .

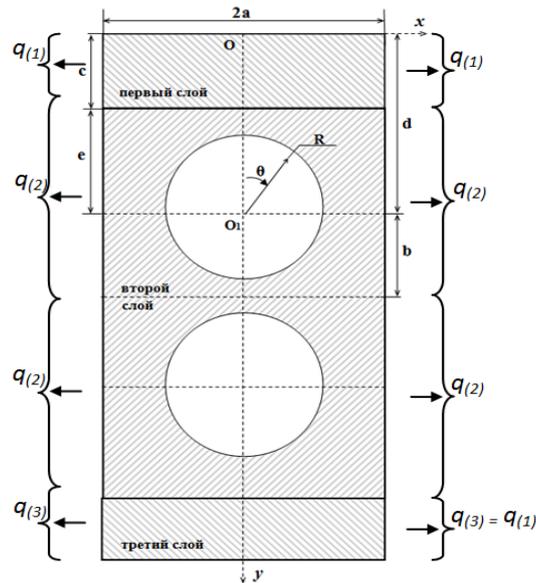


Рисунок 1 – Схема продольно растягиваемой трехслойной плоскости, ослабленной двумя одинаковыми круговыми отверстиями

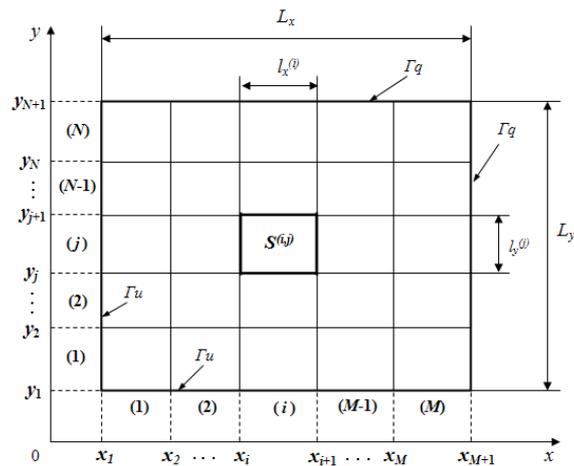


Рисунок 2 – Прямоугольная область с сеткой прямоугольных элементов

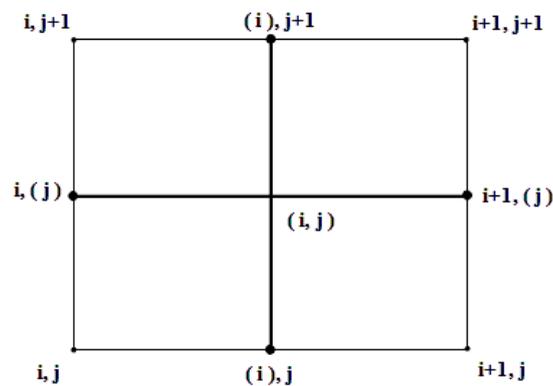


Рисунок 3 – Элементарный прямоугольник $S^{(i,j)}$ с системой срединных материальных волокон и узловых точек

С учетом малости величин $l_x^{(i)} = x_{i+1} - x_i$ и $l_y^{(j)} = y_{j+1} - y_j$ ($i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, N$) соответствующее данной задаче вариационное уравнение принципа возможных перемещений может быть приближенно представлено в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [\tilde{\sigma}_{xx}^{(i,j)} \delta \tilde{\varepsilon}_{xx}^{(i,j)} + \tilde{\sigma}_{yy}^{(i,j)} \delta \tilde{\varepsilon}_{yy}^{(i,j)} + 2\tilde{\sigma}_{xy}^{(i,j)} \delta \tilde{\varepsilon}_{xy}^{(i,j)}] l_x^{(i)} l_y^{(j)} = \\ & = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [\tilde{f}_x^{(i,j)} \delta \tilde{u}_x^{(i,j)} + \tilde{f}_y^{(i,j)} \delta \tilde{u}_y^{(i,j)}] l_x^{(i)} l_y^{(j)} + \\ & + \sum_{i=1}^M [q_x(\tilde{x}^{(i)}) \delta \tilde{u}_x^{(i)} + q_y(\tilde{x}^{(i)}) \delta \tilde{u}_y^{(i)}] l_x^{(i)} + \\ & + \sum_{j=1}^N [q_x(\tilde{y}^{(j)}) \delta \tilde{u}_x^{(j)} + q_y(\tilde{y}^{(j)}) \delta \tilde{u}_y^{(j)}] l_y^{(j)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь “волной” отмечены величины, определяемые в серединах соответствующих участков. При этом $\tilde{x}^{(i)} = x_i + l_x^{(i)}/2$, $\tilde{y}^{(j)} = y_j + l_y^{(j)}/2$. Величины f_x, f_y представляют собой интенсивности объемных сил (которые применительно к заявленной задаче равны нулю).

Вводим далее обозначения $u_x^{i,j}, u_y^{i,j}$ для значений перемещений в узловых точках рассматриваемой сетки прямоугольных элементов с координатами x_i, y_j ($i = 1, 2, \dots, M + 1; j = 1, 2, \dots, N + 1$). Обозначаем так же, как $u_x^{i,(j)}, u_y^{i,(j)}, u_x^{(i),j}, u_y^{(i),j}$ ($(i) = 1, 2, \dots, M; (j) = 1, 2, \dots, N$), перемещения узловых точек срединных материальных волокон элементарных прямоугольников. Входящие в вариационное уравнение (1) деформации, относящиеся к середине элемента $S^{(i,j)}$, определяем по следующей приближенной схеме:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{xx}^{(i,j)} &= (u_x^{i+1,(j)} - u_x^{i,(j)}) / l_x^{(i)}, \quad \tilde{\varepsilon}_{yy}^{(i,j)} = (u_y^{(i),j+1} - u_y^{(i),j}) / l_y^{(j)}, \\ \tilde{\varepsilon}_{xy}^{(i,j)} &= 0,5(u_x^{(i),j+1} - u_x^{(i),j}) / l_y^{(j)} + 0,5(u_y^{i+1,(j)} - u_y^{i,(j)}) / l_x^{(i)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Значения перемещений в средних точках упомянутых участков интегрирования, а также в узловых точках, введенных в рассмотрение срединных материальных волокон, получаем путем усреднения перемещений соответствующих смежных узлов сетки прямоугольных элементов. В результате для узловых точек срединных материальных волокон имеем:

$$\begin{aligned} u_x^{i,(j)} &= 0,5(u_x^{i,j+1} + u_x^{i,j}) \quad (x \Leftrightarrow y), \\ u_x^{(i),j} &= 0,5(u_x^{i+1,j} + u_x^{i,j}) \quad (x \Leftrightarrow y), \end{aligned} \quad (3)$$

для средин граничных отрезков –

$$\begin{aligned} \tilde{u}_x^{(i)} &= u_x^{(i),N+1} \quad (x \Leftrightarrow y), \\ \tilde{u}_x^{(j)} &= u_x^{M+1,(j)} \quad (x \Leftrightarrow y) \end{aligned} \quad (4)$$

и для средин прямоугольных элементов –

$$\tilde{u}_x^{(i,j)} = 0,25(u_x^{i,j} + u_x^{i+1,j} + u_x^{i,j+1} + u_x^{i+1,j+1}) \quad (x \Leftrightarrow y). \quad (5)$$

Для напряжений в серединах элементов в соответствии с соотношениями упругости записываем

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{xx}^{(i,j)} &= \lambda_1 \tilde{\varepsilon}_{xx}^{(i,j)} + \lambda_2 \tilde{\varepsilon}_{yy}^{(i,j)}, \\ \tilde{\sigma}_{yy}^{(i,j)} &= \lambda_2 \tilde{\varepsilon}_{xx}^{(i,j)} + \lambda_1 \tilde{\varepsilon}_{yy}^{(i,j)}, \\ \tilde{\sigma}_{xy}^{(i,j)} &= 2G \tilde{\varepsilon}_{xy}^{(i,j)}. \end{aligned} \quad (6)$$

При этом имеем в виду, что значения параметров упругости в выражениях (6) однозначно определяются принадлежностью данного элемента либо включению, либо подобласти, заполненной материалом слоя. Учитываем также, что коэффициенты G, λ_1, λ_2 линей-

ных зависимостей (6) выражаются через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν согласно следующей схеме:

$$1) G = \frac{E}{2(1+\nu)};$$

2) в случае плоского напряженного состояния

$$\lambda_1 = \frac{E}{1-\nu^2}, \lambda_2 = \nu \lambda_1;$$

3) в случае плоского деформированного состояния

$$\lambda_1 = 2G + \lambda, \lambda_2 = \lambda, \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Заметим, что определяемые схемой (2) параметры $\tilde{\varepsilon}_{xx}^{(i,j)}$, $\tilde{\varepsilon}_{yy}^{(i,j)}$ и $2\tilde{\varepsilon}_{xy}^{(i,j)}$ представляют собой относительные удлинения срединных материальных волокон элементарного прямоугольника и угол сдвига между этими первоначально перпендикулярными волокнами (что соответствует известной трактовке компонент тензора деформаций применительно к достаточно малому элементу деформируемой среды, где картина деформации близка к однородной). Это дает основание сформировать представление о дискретной модели, строящейся с применением схемы (2), как об ансамбле элементарных пар срединных материальных волокон, работающих с учетом схемы (6) на растяжение-сжатие и сдвиг. Схема (3) обеспечивает совместность работы таких пар, принадлежащих смежным элементарным прямоугольникам. А вариационное уравнение в форме (1) обеспечивает приведение внутренних силовых факторов (напряжений) в каждом из элементарных прямоугольников области S к соответствующим срединным волокнам. Такое приведение осуществляется на основе критерия равенства работ.

С использованием связей (2)-(6) окончательно приходим к формулировке вариационного уравнения (1) в терминах перемещений узлов сетки прямоугольных элементов (узловых перемещений). С учетом того, что часть узловых перемещений задается граничными условиями, приравнявая коэффициенты при вариациях неизвестных узловых перемещений в левой и правой части указанного вариационного уравнения, получаем разрешающую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых перемещений. Ее решение осуществляем по методу Гаусса.

К важному свойству данной дискретной модели следует отнести то, что в случае однородного напряженно-деформированного состояния исследуемой области результаты численного моделирования совпадают с точным решением соответствующей задачи теории упругости. В этом можно убедиться, рассматривая случай прямоугольной области S , находящейся под действием равномерно распределенных по ее сторонам поверхностных нагрузок, обеспечивающих однородный характер ее напряженного состояния. В таком случае значения напряжений в точках области и значения интенсивностей соответствующих поверхностных нагрузок совпадают между собой. Если теперь область S представить в виде одного прямоугольного элемента ($M=1, N=1$), то из вариационного уравнения (1), сформулированного применительно к рассматриваемому случаю нагружения, с учетом связей (2) следует, что значения напряжений в середине элемента (в данном случае области S) совпадают со значениями интенсивностей соответствующих поверхностных нагрузок. Другими словами, в рассматриваемом случае получаемые численным моделированием результаты по напряжениям в середине области S совпадают с точным решением. Аналогичное совпадение имеет место для деформаций и перемещений, вычисляемых в середине области S .

Отметим, что для настройки программы расчета на конкретный случай слоистой среды необходимо внести соответствующие изменения в подпрограмму, определяющую модуль Юнга и коэффициент Пуассона элемента модели, имеющего в сформированной сетке номер

(i, j) . Значения упомянутых упругих постоянных задаются при этом в зависимости от принадлежности данного элемента с номером (i, j) определенному слою или включению (с пренебрежимо малой жесткостью в случае свободного отверстия). Принадлежность элемента слою при этом устанавливается путем проверки условия попадания середины элемента в подобласть, занимаемую слоем, а принадлежность данному включению – условию попадания всех четырех вершин элемента в подобласть, занимаемую включением (при этом имеется в виду подобласть вместе с ее границей).

Численное моделирование заявленного случая растяжения трехслойной упругой плоскости (см. рисунок 1) осуществляем в рамках следующих предположений. Считаем, что материалы первого и третьего слоев одинаковы и что отверстия расположены симметрично по отношению к срединной линии второго слоя. Считаем также, что при растяжении рассматриваемой трехслойной плоскости в каждом из ее слоев на бесконечности реализуется состояние однородной деформации при нулевых поперечных напряжениях ($\sigma_{yy} = 0$).

В результате приходим к расчетной схеме рассматриваемой трехслойной плоскости в виде ослабленной двумя одинаковыми круговыми отверстиями трехслойной прямоугольной области с размерами $a \gg R, d \gg R$ (при расчетах принято $a = d = 10R$), растягиваемой в направлении оси Ox нагрузками $q_{(1)}, q_{(2)}, q_{(3)}$, равномерно распределенными по торцам соответствующих слоев. При этом имеют место связи вида

$$q_{(2)} = q_{(1)} \left[\lambda_1^{(2)} - (\lambda_2^{(2)})^2 / \lambda_1^{(2)} \right] / \left[\lambda_1^{(1)} - (\lambda_2^{(1)})^2 / \lambda_1^{(1)} \right], \quad q_{(3)} = q_{(1)}. \quad (7)$$

Используемые в записи (7) верхние индексы 1 и 2 у параметров упругости λ_1, λ_2 указывают на то, что отмеченные таким образом величины относятся соответственно к первому и второму слою.

С учетом симметрии принятой расчетной схемы относительно двух срединных осей (вертикальной и горизонтальной) в качестве моделируемой области S рассматриваем правую верхнюю четверть прямоугольника, изображенного на рисунке 1, формулируя условия симметрии вдоль левой и нижней сторон прямоугольника S в виде $u_x = 0, q_y = 0$ и $u_y = 0, q_x = 0$ соответственно.

Поскольку напряжения в обсуждаемой дискретной модели определяются исключительно в серединах элементов, разбиение исследуемой области S на элементы проводим так, чтобы середины элементов, граничащих с отверстием, оказывались на кромке отверстия. В этих целях равномерно разбиваем контур отверстия на некоторое количество n элементарных дуг (в данном исследовании принято $n = 200$). Проводя через концы указанных дуг прямые, параллельные осям Ox и Oy , приходим к сетке элементов с требуемым свойством. В процессе дальнейшего разбиения моделируемой области на элементы отрезок $R \leq x \leq 10R$ на оси Ox и отрезок $0 \leq y \leq 9R$ на оси Oy разбиваем (двигаясь в направлении от центра O_1 к периферии) на участки с размерами $0,2R; 0,2R; 0,6R; 2R; 2R; 4R$, а отрезок $11R \leq y \leq 11R + b_1$ (где $b_1 = b - R$) – на участки с размерами $0,05b_1; 0,05b_1; 0,1b_1; 0,2b_1; 0,3b_1; 0,3b_1$. Указанные наборы участков в свою очередь разбиваем соответственно на 30, 20, 30, 20, 15, 20 и 30, 20, 30, 20, 20, 15 одинаковых отрезков. Через концы образованных элементарных отрезков проводим прямые, параллельные осям Ox и Oy , завершая формирование сетки расчетной модели.

Тестирование окончательно сформированной вычислительной модели осуществляем следующим образом. Полагаем (на программном уровне), что параметры упругости слоев рассматриваемой области S имеют одинаковые значения, приходя тем самым к случаю растягиваемой в горизонтальном направлении однородной упругой плоскости с двумя одинако-

выми вертикально расположенными отверстиями. При этом в соответствии с записью (7) имеет место равномерное распределение растягивающей нагрузки вдоль правой стороны моделируемой области S , так что $q_{(1)} = q_{(2)} = q_{(3)} = q$. Результаты численного моделирования для данного (тестового) случая (при $b = 1,25R$) в виде зависимости окружного напряжения на кромке отверстия от угла θ представлены сплошной линией на рисунке 4. Здесь же для сравнения представлены точками результаты приближенного аналитического решения А.С. Космодамианского [1].

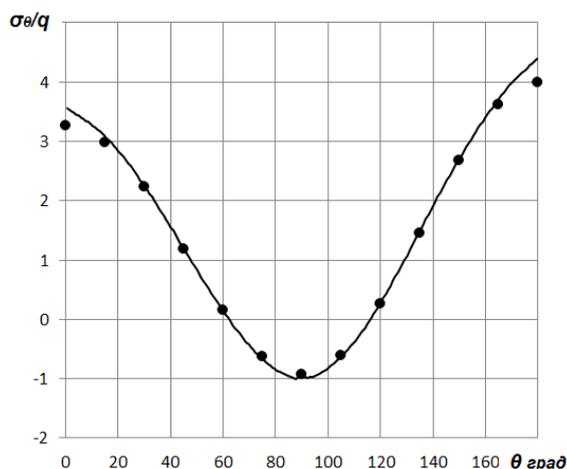


Рисунок 4 – Результаты численного моделирования в сравнении с аналитическим решением А. С. Космодамианского

Убедившись на основе выполненного сравнения в способности сформированной модели давать надежные результаты применительно к рассматриваемому типу задачам о концентрации напряжений, приступаем к исследованию (с использованием этой модели) заявленного случая трехслойной плоскости с двумя отверстиями.

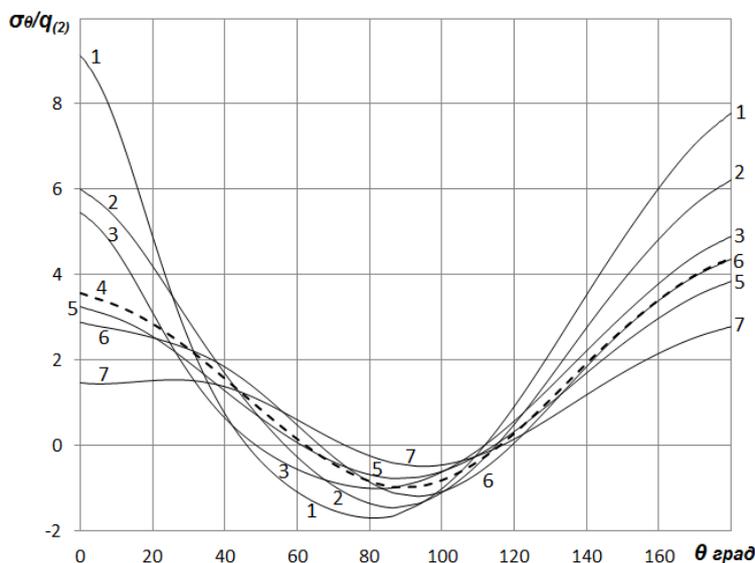


Рисунок 5 – Распределение напряжений по контуру отверстия в зависимости от значений упругих постоянных слоев

На рисунке 5 представлены полученные численным моделированием результаты в виде кривых распределения напряжений по контуру отверстия в зависимости от значений упругих постоянных слоев. Моделирование осуществлялось в предположении, что $b = 1,25R$, $e = 1,2R$ и что исследуемая трехслойная среда находится в состоянии плоской деформации.

Пунктиром на рисунке 5 выделена зависимость, относящаяся к рассмотренному выше случаю однородной плоскости. Кривые 1, 2, 3, 5, 6, 7 на рис. 5 получены при задании значений параметров $E^{(2)}/E^{(1)}$, $\nu^{(1)}$, $\nu^{(2)}$ в виде (10; 0,1; 0,45), (2; 0,1; 0,45), (10; 0,45; 0,1), (2, 0,45; 0,1), (0,1; 0,1; 0,45), (0,1; 0,45; 0,1), соответственно. Как видно, в случае $E^{(2)}/E^{(1)} = 0,1$; $\nu^{(1)} = 0,45$; $\nu^{(2)} = 0,1$ наблюдается снижение уровня напряжений на кромке отверстия в 1,6 раза по сравнению со случаем однородной плоскости. При $E^{(2)}/E^{(1)} = 0,1$ наблюдается, кроме того, ситуация, когда изменения параметров $\nu^{(1)}$ и $\nu^{(2)}$ в широком диапазоне значений (см. кривые 6 и 7) не приводят к выходу уровня напряжений на кромке отверстия за пределы того, что имеет место в случае однородной плоскости (кривая 4). Наконец, даже в ситуации, когда $E^{(2)}/E^{(1)} = 2$, выбрав $\nu^{(1)} = 0,45$ и $\nu^{(2)} = 0,1$ (кривая 5), можно также снизить уровень напряжений на кромке отверстия по сравнению со случаем однородной плоскости.

В качестве общего вывода по выполненному исследованию отметим, что проведенный анализ позволил дать оценку влияния слоистой структуры продольно растягиваемой плоскости на характер распределения напряжений вокруг имеющихся в ней двух одинаковых круговых отверстий. Более того, установлена возможность существенного снижения уровня указанных напряжений при надлежащем выборе характеристик слоев.

Литература

1. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наукова думка, 1968. 888с.
2. Ефимов В.В., Кривой А.Ф., Попов Г.Я. Задачи о концентрации напряжений возле кругового дефекта в составной упругой среде // Изв. РАН. МГТ. 1998. № 2. с. 42-58.
3. Члингарян Г.С. Напряженное состояние составной упругой плоскости с включениями на границе раздела материалов // Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. № 3. с. 52-58.
4. Мазин В.А., Михайлова В.Л., Сухомлинов Л.Г. Вариационно-разностная процедура численного решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области с включениями и отверстиями // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества (ЧЭС). 2010. № 2. с. 53 – 62.

Математическое моделирование циклического деформирования

д.т.н., проф. Темис Ю.М., к.т.н. Азметов Х.Х.

«ЦИАМ им. П.И. Баранова»

tejoum@ciam.ru

Аннотация. На основе модели поведения конструкционного материала при циклическом упругопластическом деформировании и оценки ресурса малоцикло-вой усталости создана система математического моделирования циклического нагружения конструкций методом конечных элементов. Приведены примеры решения тестовых задач и реальных конструкций.

Ключевые слова: циклическое нагружение, малоцикловая усталость, метод конечных элементов

Математическое моделирование циклического деформирования и оценка ресурса малоцикло-вой усталости актуально для высоконагруженных машин и установок энергетического машиностроения, авиационных двигателей и других конструкций, работающих при циклическом нагружении. Явление малоцикло-вой усталости непосредственно связано с процессами пластического деформирования в зонах концентрации напряжений в деталях конструкции: отверстиях, галтелях, выточках, сварных швах, шпоночных и шлицевых соединени-