

РАЗДЕЛ 3. ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ**Смешанная плоская задача теории упругости для двухслойной кольцевой области**

д.т.н. Божкова Л.В., к.т.н. Рябов В.Г., к.т.н. Норицина Г.И.
МГТУ «МАМИ»
(495) 223-05-23, доб. 1318

Аннотация. Предложен аналитический метод решения смешанной плоской задачи теории упругости для двухслойной кольцевой области, справедливый для кольцевых слоев произвольной толщины одновременно в случае сжимаемого и несжимаемого материалов.

Ключевые слова: двухслойная кольцевая область, тензор напряжения, вектор перемещения, двухслойное упругое покрытие.

Основой при определении напряженно-деформированного состояния в различных соединениях инженерных конструкций является решение контактных задач. В этом направлении следует отметить класс неклассических контактных задач. Отступление от классической постановки здесь, в первую очередь, связано с отказом от допущения о малости зоны контакта по сравнению с характерными линейными размерами контактируемых тел. Примером таких задач являются контактные задачи для кольцевых слоёв. Контактное взаимодействие твёрдых тел, имеющих поверхностные слои, упругие характеристики которых отличаются от слоёв основы, часто встречается на практике. Примером могут служить массивные автомобильные шины, представляющие собой металлические катки, покрытые упругим материалом. В ходовой системе гусеничных машин применяют опорные катки с наружной резиновой шиной и т. д.

Учитывая, что к упругим покрытиям катков предъявляется повышенное требование по амортизации и прочности, в последнее время наметилась тенденция поиска многослойного упругого покрытия опорных катков.

Большинство из известных методов решения контактных задач для кольцевых слоёв, неразрывно скрепленных с жёсткой основой, применимы в отдельности только к какому-либо одному конкретному типу задач, например, для случая только сжимаемого или, наоборот, только несжимаемого материала слоя, а также для очень тонких или очень толстых слоёв.

В связи с этим очень важным и актуальным являются методы решения подобного типа контактных задач, пригодные для кольцевых слоёв не только произвольной толщины, но и одновременно для случаев сжимаемого и несжимаемого материалов.

Данные требования, предъявляемые к методам решения контактных задач для кольцевых упругих слоёв, могут быть удовлетворены в случае, если в основе таких методов будут лежать решения соответствующих смешанных плоских задач теории упругости для однослойных или многослойных кольцевых областей, пригодные для кольцевых слоёв произвольной толщины одновременно в случае сжимаемого и несжимаемого материалов.

Таким образом, рассмотрим плоскую смешанную задачу теории упругости для двухслойного кольцевого покрытия твердого цилиндра при радиальной симметричной нагрузке $P(\theta)$, действующей на участках внешнего контура второго слоя $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$ (рисунок 1).

Предполагаем, что первый упругий слой неразрывно связан по внутреннему контуру с жёстким цилиндром.

Таким образом, особенностью данной задачи являются смешанные краевые условия.

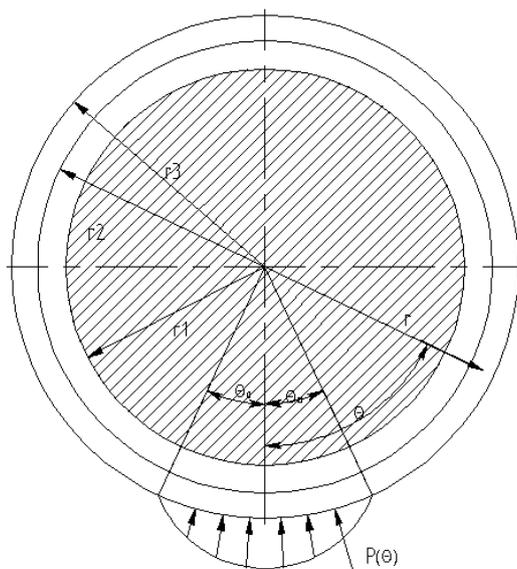


Рисунок 1 – Расчётная схема двухслойного покрытия

Основной целью решения является получение выражений компонент тензора напряжений и вектора перемещения в виде, удобном для дальнейшего использования при решении соответствующей контактной задачи.

Присвоим порядковый номер каждому слою (от 1 до 2), начиная от слоя, непосредственно покрывающего твёрдый цилиндр.

Решение рассматриваемой плоской задачи теории упругости можно свести к отысканию функции напряжения Эри для каждого из двух слоёв. Функции напряжения Эри $\varphi_i(r, \theta) (i = 1, 2)$ являются бигармоническими, то есть удовлетворяющие уравнениям:

$$\Delta^1 \Delta^2 \varphi_i = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Напряжения в каждом из упругих слоёв можно определить через функцию $\varphi_i(r, \theta) (i = 1, 2)$ при помощи следующих соотношений:

$$\sigma_r^{(i)} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta^{(i)} = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta}^{(i)} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \theta^2} \right) \quad (1)$$

Зависимости между компонентами тензора деформаций и напряжений имеют вид:

$$\varepsilon_\theta^{(i)} = \frac{1}{E_i} (A_i \sigma_\theta^{(i)} - B_i \sigma_r^{(i)}), \quad \varepsilon_r^{(i)} = \frac{1}{E_i} (A_i \sigma_r^{(i)} - B_i \sigma_\theta^{(i)}), \quad \gamma_{\theta r}^{(i)} = \sigma_i^{-1} \tau_{r\theta}^{(i)}, \quad (2)$$

$$A_i = (1 - \nu_i^2), \quad B_i = \nu_i(1 + \nu_i), \quad G_i^{-1} = \frac{2(1 + \nu_i)}{E_i}, \quad (3)$$

где: E_i - модули упругости слоёв, ν_i - коэффициенты Пуассона.

Формулы Коши для деформации в рассматриваемом случае запишутся в виде:

$$\varepsilon_\theta^{(i)} = \frac{1}{r} \frac{\partial V_i}{\partial \theta} + \frac{w_i}{r}, \quad \varepsilon_r^{(i)} = \frac{\partial w_i}{\partial r}, \quad \gamma_{r\theta}^{(i)} = \frac{\partial V_i}{\partial r} - \frac{V_i}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_i}{\partial \theta}. \quad (4)$$

Учитывая, что функции $\varphi_i(r, \theta)$ являются чётными, выбираем их в виде [1]:

$$\begin{aligned} \varphi_i = & \bar{a}_0^{(i)} \ln r + \frac{1}{2} \bar{b}_0^{(i)} r^2 + (\bar{b}_1^{(i)} r^3 + \bar{c}_1^{(i)} r^{-1} + \bar{d}_1^{(i)} r \ln r) \cos \theta + \frac{1}{2} \bar{d}_1^{(i)} r \theta \sin \theta + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} (\bar{a}_n^{(i)} r^n + \bar{b}_n^{(i)} r^{n+2} + \bar{c}_n^{(i)} r^{-n} + \bar{d}_n^{(i)} r^{-n+2}) \cos n\theta \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (5)$$

где: $\bar{a}_0^{(i)}, \bar{b}_0^{(i)}, \bar{b}_1^{(i)}, \bar{c}_1^{(i)}, \bar{d}_1^{(i)}, \bar{d}_1^{(i)}, \bar{a}_n^{(i)}, \bar{b}_n^{(i)}, \bar{c}_n^{(i)}, \bar{d}_n^{(i)}$ - неизвестные константы.

Чтобы определить напряжения в каждом кольцевом слое, нужно вычислить необходимые производные функции (5) и подставить их в соотношения (1). В результате получим:

$$\sigma_r^{(i)} = \bar{a}_0^{(i)} r^{-2} + \bar{b}_0^{(i)} + (2\bar{b}_1^{(i)} r + 2\bar{c}_1^{(i)} r^{-3} + \bar{d}_1^{(i)} r^{-1} + \bar{d}_1^{(i)} r^{-1}) \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} [\bar{a}_n^{(i)} (-n^2 + n) r^{n-2} + \bar{b}_n^{(i)} (-n^2 + n + 2) r^n - c_n^{(i)} (n^2 + n) r^{-n-2} + \bar{d}_n^{(i)} (-n^2 - n + 2) r^{-n}] \cos \theta \quad (6)$$

$(i = 1, 2),$

$$\sigma_{\theta}^{(i)} = -\bar{a}_0^{(i)} r^{-2} + \bar{b}_0^{(i)} + (6\bar{b}_1^{(i)} r + 2\bar{c}_1^{(i)} r^{-3} + \bar{d}_1^{(i)} r^{-1}) \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} [\bar{a}_n^{(i)} (n^2 - n) r^{n-2} + \bar{b}_n^{(i)} (n^2 + 3n + 2) r^n + c_n^{(i)} (n^2 + n) r^{-n-2} + \bar{d}_n^{(i)} (n^2 - 3n + 2) r^{-n}] \cos \theta \quad (7)$$

$(i = 1, 2),$

$$\tau_{r\theta}^{(i)} = (2\bar{b}_1^{(i)} r - 2\bar{c}_1^{(i)} r^{-3} + \bar{d}_1^{(i)} r^{-1}) \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} [\bar{a}_n^{(i)} (n^2 - n) r^{n-2} + \bar{b}_n^{(i)} (n^2 + n) r^n - c_n^{(i)} (-n^2 - n) r^{-n-2} + \bar{d}_n^{(i)} (-n^2 + n) r^{-n}] \sin \theta \quad (i = 1, 2). \quad (8)$$

На основании соотношений (6) – (8) с учетом (2) и (4), получим:

$$w_i = \frac{1}{E_i} \{ -(A_i + B_i) \bar{a}_0^{(i)} r^{-1} + (A_i - B_i) \bar{b}_0^{(i)} r + [\bar{b}_1^{(i)} r^2 (A_i - 3B_i) + \bar{c}_1^{(i)} r^{-2} (A_i + B_i) + \bar{d}_1^{(i)} \ln r (A_i - B_i) + \bar{d}_1^{(i)} A_i \ln r] \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} \{ -\bar{a}_n^{(i)} n r^{n-1} (A_i + B_i) + \bar{b}_n^{(i)} [(-n + 2) A_i - (n + 2) B_i] r^{n+1} + \bar{c}_n^{(i)} n r^{-n-1} (A_i + B_i) + \bar{d}_n^{(i)} [(n + 2) A_i - (-n + 2) B_i] r^{-n+1} \} \cos n\theta - f_i(\theta) \} \quad (i = 1, 2), \quad (9)$$

$$V_i = \frac{1}{E_i} \{ [(5A_i + B_i) \bar{b}_1^{(i)} r^2 + (A_i + B_i) r^{-2} \bar{c}_1^{(i)} + (A_i - B_i) \bar{d}_1^{(i)} - B_i \bar{d}_1^{(i)} - (A_i - B_i) \bar{d}_1^{(i)} \ln r - A_i \bar{d}_1^{(i)} \cdot \ln r] \sin \theta + \sum_{n=2}^{\infty} \{ \bar{a}_n^{(i)} (A_i + B_i) n r^{n-1} + \bar{b}_n^{(i)} [A_i (n + 4) + B_i n] r^{n+1} + \bar{c}_n^{(i)} (A_i + B_i) n r^{-n-1} + \bar{d}_n^{(i)} [A_i (n - 4) + B_i n] r^{-n+1} \} \sin n\theta - \int f_i(\theta) d\theta \} \quad (i = 1, 2), \quad (10)$$

где $f_i(\theta)$ - некоторые функции, появившиеся в результате интегрирования.

Доказано [2], что

$$f_i(\theta) = \frac{1}{2} [4A_i \bar{d}_1^{(i)} + (A_i - B_i) \bar{d}_1^{(i)}] \theta \sin \theta \quad (11)$$

и что функции должны тождественно равняться нулю при любом θ . Отсюда следует, что

$$\bar{d}_1^{(i)} = -\frac{A_i - B_i}{4A_i} \bar{d}_1^{(i)} \quad (i = 1, 2). \quad (12)$$

Выражения, полученные для компонент тензора напряжения и вектора перемещений, имеют ряд неизвестных констант:

$$\bar{a}_0^{(i)}, \bar{b}_0^{(i)}, \bar{b}_1^{(i)}, \bar{c}_1^{(i)}, \bar{d}_1^{(i)}, \bar{d}_1^{(i)}, \bar{a}_n^{(i)}, \bar{b}_n^{(i)}, c_n^{(i)}, \bar{d}_n^{(i)} \quad (n = 2, \dots, \infty); \quad (i = 1, 2).$$

Для их определения нужно записать граничные условия задачи. С этой целью, прежде всего, разложим функцию $P(\theta)$ на промежутке $-\pi \leq \theta \leq \pi$ в ряд Фурье:

$$P(\theta) = \frac{\tilde{A}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k \cos k\theta, \quad (13)$$

где:

$$\tilde{A}_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} P(\theta) \cos k\theta d\theta \quad (k = 0, 1, 2, \dots, \infty). \quad (14)$$

Граничные условия имеют вид:

$$\sigma_r^{(2)} = \begin{cases} -P(\theta), & |\theta| < \theta_0 \\ 0, & |\theta| > \theta_0 \end{cases}; \quad (15)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(2)} = 0 \text{ при } r = r_3; \quad w_1 = V_1 = 0 \text{ при } r = r_1.$$

Учитывая, что напряжения и перемещения на связывающей поверхности слоёв равны, можно записать:

$$w_1 = w_2, \quad V_1 = V_2, \quad \sigma_r^{(1)} = \sigma_r^{(2)}, \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = \tau_{r\theta}^{(2)} \text{ при } r = r_2. \quad (16)$$

Для удобства дальнейшего численного решения задачи все параметры и коэффициенты запишем в следующем безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r^{(i)} &= \frac{\sigma_r^{(i)}}{E_2}, \quad \bar{\sigma}_\theta^{(i)} = \frac{\sigma_\theta}{E_2}, \quad \bar{\tau}_{r\theta}^{(i)} = \frac{\tau_{r\theta}^{(i)}}{E_2}, \quad \bar{w}_i = \frac{w}{r_3}, \quad \bar{V}_i = \frac{V_i}{r_3}, \quad \bar{P}(\theta) = \frac{P(\theta)}{E_2}, \\ \bar{A}_k &= \frac{\tilde{A}_k}{E_2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \rho = \frac{r}{r_3}, \quad \rho_1 = \frac{r_1}{r_3}, \quad \rho_2 = \frac{r_2}{r_3}, \quad d_1^{(i)} = \frac{\bar{d}_1^{(i)} r_3^{-1}}{E_2}, \\ a_n^{(i)} &= \frac{\bar{a}_n^{(i)} r_3^{n-2}}{E_2}, \quad b_n^{(i)} = \frac{\bar{b}_n^{(i)} r_3^n}{E_2}, \quad c_n^{(i)} = \frac{\bar{c}_n^{(i)} r_3^{-n-2}}{E_2}, \quad d_n^{(i)} = \frac{\bar{d}_n^{(i)} r_3^{-n}}{E_2}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (17)$$

При этом граничные условия (15) и (16) примут следующий вид:

$$\bar{\sigma}_r^{(2)} = \begin{cases} -\bar{P}(\theta), & |\theta| < \theta_0 \\ 0 & |\theta| > \theta_0 \end{cases}, \quad (18)$$

$$\bar{\tau}_{r\theta}^{(2)} = 0, \text{ при } \rho = 1; \quad \bar{w}_1 = \bar{V}_1 = 0 \text{ при } \rho = \rho_1.$$

$$\bar{w}_1 = \bar{w}_2, \quad \bar{V}_1^{(1)} = \bar{V}_2^{(2)}, \quad \bar{\sigma}_r^{(1)} = \bar{\sigma}_r^{(2)}, \quad \bar{\tau}_{r\theta}^{(1)} = \bar{\tau}_{r\theta}^{(2)}, \text{ при } \rho = \rho_2.$$

Так как граничные условия должны выполняться при любом угле θ , а системы функций $\sin n\theta (n = 1, 2, \dots)$ и $\cos \theta (n = 0, 1, 2, \dots)$ являются ортогональными на отрезке $-\pi \leq \theta \leq \pi$, то на основании граничных условий (18) получена система двадцати линейных алгебраических уравнений относительно двадцати двух неизвестных констант:

$$\bar{a}_0^{(i)}, \bar{a}_1^{(i)}, \bar{b}_0^{(i)}, \bar{b}_1^{(i)}, \bar{c}_1^{(i)}, \bar{d}_1^{(i)}, \bar{d}_1^{(i)}, \bar{a}_n^{(i)}, \bar{b}_n^{(i)}, \bar{c}_n^{(i)}, \bar{d}_n^{(i)} \quad (i = 1, 2); \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Эта система может быть дополнена двумя уравнениями (12).

Таким образом, двадцать две неизвестные константы выражаются явно через упругие характеристики, конструктивные параметры кольцевых слоёв, а также коэффициенты ряда Фурье функции, определяющей действующую нагрузку на внешний слой.

Следует отметить, что в случае, когда упругие характеристики двух слоёв равны между собой ($E_1 = E_2; \nu_1 = \nu_2$), полученное решение тождественно совпадает с решением смешанной задачи теории упругости для одного кольцевого слоя [2].

В качестве примера закон распределения радиальной нагрузки был взят в виде:

$$P(\theta) = \begin{cases} P_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\theta}{\theta_0}\right) & \text{при } |\theta| < \theta_0, \\ 0 & \text{при } |\theta| > \theta_0. \end{cases}$$

Расчёты проведены при

$$\frac{P_0}{E_2} = 0.08; \quad \theta_0 = 0.05; \quad \frac{E_1}{E_2} = 10; \quad \nu = 0.5, \quad \rho_1 = 0.95; \quad \rho_2 = 0.98; \quad 0.97; \quad 0.96;$$

$$\frac{P_0}{E_2} = 0.08; \theta_0 = 0.05, \frac{E_1}{E_2} = 10, \nu = 0.5, \rho_1 = 0.95, \rho_2 = 0.98, 0.97, 0.96.$$

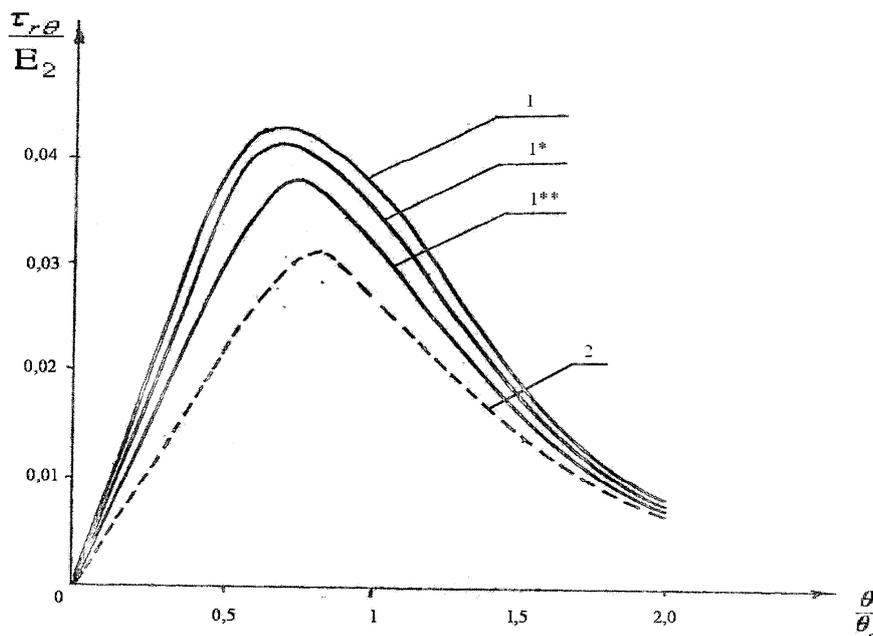


Рисунок 2 – Касательные напряжения на внутренней связывающей поверхности первого слоя:

1, 1*, 1** - соответственно: $\rho_2 = 0.98$; $\rho_2 = 0.97$; $\rho_2 = 0.96$ для $\frac{E_1}{E_2} = 10$; 2 – для $\frac{E_1}{E_2} = 1$.

Выводы

Полученное выше решение смешанной плоской задачи теории упругости для двух слоёв, покрывающих твёрдый цилиндр и нагруженных на части внешней поверхности второго слоя радиальной симметричной нагрузкой, может быть положено в основу решения контактных задач без учёта сил трения в зоне контакта.

Литература

1. Тимошенко С. П., Дж. Гудьер. Теория упругости. -М.: Наука, 1979.- 560 с.
2. Божкова Л. В, Невельская Т. П., Чебанюк А.М. Определение перемещений и напряжений в кольце со смешанными краевыми условиями // Известия Вузов СССР-М.: Машиностроение, 1980, №4, 6 с.

Наблюдение новых явлений в картине течений вязкой жидкости

к.т.н. доц. Выхребцов В.Г.
МГТУ «МАМИ»

Аннотация. После получения точного решения уравнений движения вязкой жидкости (уравнений Навье-Стокса) при условии установившегося течения и несжимаемости жидкости было выявлено, что траекториями реальных течений могут быть очень ограниченное число линий. В это число входят прямые линии, concentрические окружности и некоторые спирали, осесимметричные течения и течения, у которых вихрь скорости постоянен (в том числе равен нулю). При этом существенно, что установившееся обтекание шара или цилиндра невозможно, т.к. траекторий такого течения нет среди указанных теорией. Для выявления особенностей обтекания шара проводились наблюдения за равномерным движением как единичных шаров разного размера, так и жёстко соединенных между собой по два