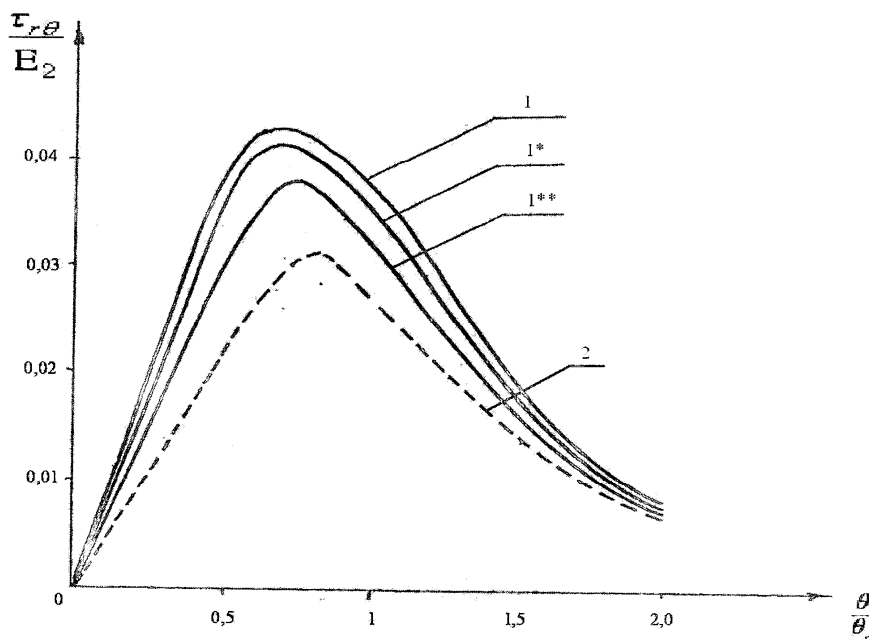


$$\frac{P_0}{E_2} = 0.08; \theta_0 = 0.05, \frac{E_1}{E_2} = 10, \nu = 0.5, \rho_1 = 0.95, \rho_2 = 0.98, 0.97, 0.96.$$



**Рисунок 2 – Касательные напряжения на внутренней связывающей поверхности первого слоя:**

1, 1\*, 1\*\* - соответственно:  $\rho_2 = 0.98$ ;  $\rho_2 = 0.97$ ;  $\rho_2 = 0.96$  для  $\frac{E_1}{E_2} = 10$ ; 2 – для  $\frac{E_1}{E_2} = 1$ .

#### Выводы

Полученное выше решение смешанной плоской задачи теории упругости для двух слоёв, покрывающих твёрдый цилиндр и нагруженных на части внешней поверхности второго слоя радиальной симметричной нагрузкой, может быть положено в основу решения контактных задач без учёта сил трения в зоне контакта.

#### Литература

1. Тимошенко С. П., Дж. Гудьер. Теория упругости. -М.: Наука, 1979.- 560 с.
2. Божкова Л. В, Невельская Т. П., Чебанюк А.М. Определение перемещений и напряжений в кольце со смешанными краевыми условиями // Известия Вузов СССР-М.: Машиностроение, 1980, №4, 6 с.

#### **Наблюдение новых явлений в картине течений вязкой жидкости**

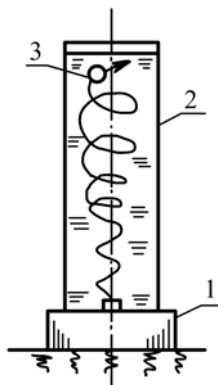
к.т.н. доц. Выскребцов В.Г.  
МГТУ «МАМИ»

*Аннотация.* После получения точного решения уравнений движения вязкой жидкости (уравнений Навье-Стокса) при условии установившегося течения и несжимаемости жидкости было выявлено, что траекториями реальных течений могут быть очень ограниченное число линий. В это число входят прямые линии, концентрические окружности и некоторые спирали, осесимметричные течения и течения, у которых вихрь скорости постоянен (в том числе равен нулю). При этом существенно, что установившееся обтекание шара или цилиндра невозможно, т.к. траекторий такого течения нет среди указанных теорией. Для выявления особенностей обтекания шара проводились наблюдения за равномерным движением как единичных шаров разного размера, так и жёстко соединенных между собой по два

или по четыре. Эти шары образовывали фигуру, подобную одиночной «гантели» или сдвоенным под прямым углом двум «гантелям». Опыты обнаружили факт самопроизвольного закручивания шаров и «гантелей» со скоростью кругового движения, пропорциональной линейной скорости шаров в неподвижной воде озера. При этом закручивание происходило всегда, если не было начального возмущения, только против часовой стрелки как при движении шаров в направлениях север-юг, так и восток-запад, так и вверх-вниз, что доказывает, что на вращение шаров вращение Земли влияния оказать не может.

*Ключевые слова:* уравнения Навье-Стокса, точные решения, вязкая несжимаемая жидкость, вращение против часов, вращение Земли.

Вначале проводилось наблюдение за траекторией подъёма пузырьков в воде, что удобно делать с помощью имеющихся в продаже ночников в виде прозрачного пластмассового цилиндра длиной около полуметра и диаметром восемь сантиметров. В цилиндр, расположенной вертикально и заполненной водой, снизу нагнетается насосом воздух и даётся подсветка. Воздушные пузырьки поступают из трубочки на дне цилиндра, в которую нагнетается воздух. Наблюдения за одиночными пузырьками (при многочисленности пузырьков наблюдение за траекторией каждого практически невозможно) путём дросселирования воздушного насоса и при наблюдении с верхнего торца цилиндра выявило (и это зафиксировано на видеоклипах длительностью 15 – 50 секунд), что вначале траектория пузырьков плоская, в виде синусоиды (рисунок 1). По мере дальнейшего подъёма пузырьков траектория принимает форму винтовой линии, причём направление кручения (правое или левое) этой линии может меняться непредсказуемо. Не удалось наблюдать какой-либо закономерности в направлении закручивания траекторий. В этих наблюдениях диаметр пузырьков был равен нескольким миллиметрам, причём этот диаметр увеличивался по мере подъёма пузырьков за счёт расширения воздуха в пузырьке. Такой же характер движения пузырьков наблюдался и в других вязких жидкостях, например, в бензине.

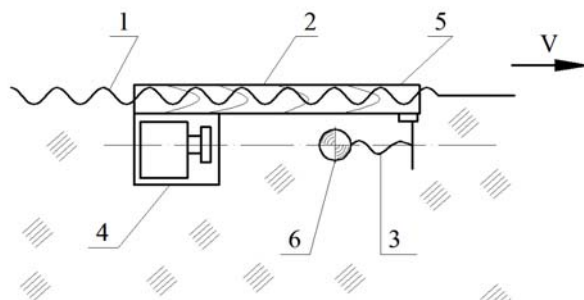


**Рисунок 1 - Схема наблюдений за движением воздушных пузырьков в воде:**

**1 – основание ночника с подсветкой и воздушным насосом, 2 – пластиковый цилиндр с водой, 3 – воздушный пузырёк и его траектория движения**

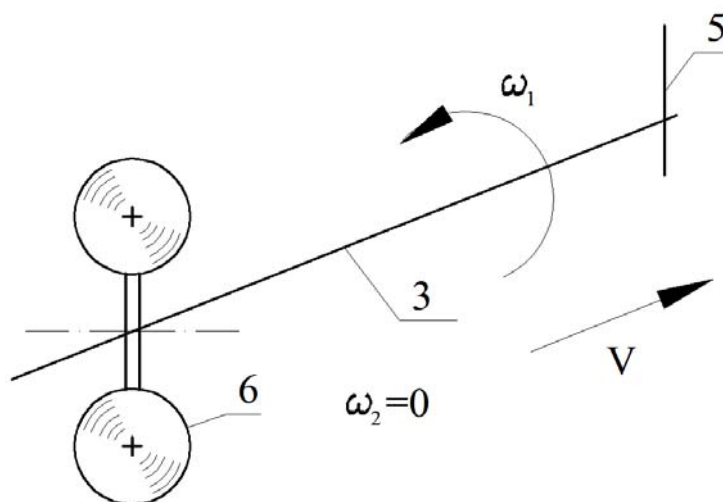
Поскольку подобный характер траектории для автора был неожиданным, то для дальнейшего более подробного изучения указанного спирального движения фиксировалось на видеоклипах установившееся движение в воде твёрдых, т.е. постоянного размера, шариков из сплошного пластика диаметром девять миллиметров и шариков диаметром 40 миллиметров, у которых только оболочка была из пластика. В качестве шариков диаметром четыре сантиметра использовались шарики для настольного тенниса с дырочками диаметром два миллиметра для заполнения этих шариков водой [1]. При этом было установлено, что при буксировке шариков любого размера за нитку в горизонтальном направлении с постоянной скоростью примерно 1 м/сек – 2 м/сек в неподвижной воде (рисунок 2) их траектория тоже

представляет собой винтовую линия, причём левозакрученную (рисунок 4). Плотность этих теннисных шариков с пластиковой оболочкой и заполненных водой близка к плотности воды.



**Рисунок 2 - Схема наблюдений за траекторией движения шариков, буксируемых под водой с постоянной скоростью  $V$ : 1 – поверхность воды, 2 – деревянная доска со спицей и нитью 3, 4 – подводный бокс с фотоаппаратом, 5 – поверхностные волны, появляющиеся вследствие движения доски, не достигающие до шарика 6**

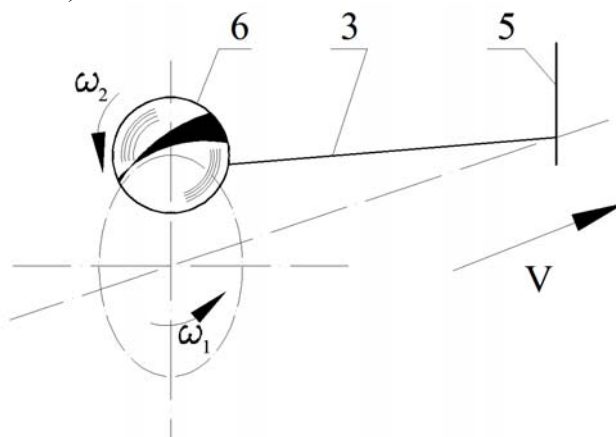
Кроме того наблюдалось вращение фигуры в виде двух описанных шариков равного размера, жёстко соединённых между собой стержнем, длина которого примерно равна диаметру шариков, а толщина стержня примерно в десять и более раз меньше этого диаметра. Фигура из двух одинаковых шариков (диаметры шариков менялись от одного сантиметра до четырёх) напоминала собой гантель и буксировалась, как и одиночные шарики, в невозмущённой воде горизонтально на глубине примерно тридцати сантиметров нитью, прикреплённой к середине «гантели» (рисунок 3). Скорость буксировки определялась скоростью вёсельной лодки (примерно до 2-х м/сек). При этом наблюдалось вращение «гантели», причём против часовой стрелки для наблюдателя, смотрящего вслед «гантели» (рисунок 3). Таким образом, во всех этих случаях равномерное установившееся движение одиночных шаров в воде в неподвижной воде сопровождается периодическим автоколебательным движением шаров по левозакрученной траектории, а «гантели» - вращением этой фигуры против часовой стрелки. Помимо этих движений наблюдалось более медленное вращение самих одиночных шаров вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega_2$  (рисунок 4).



**Рисунок 3 - Схема вращения с угловой скоростью  $\omega_1$  в воде «гантели» 6, буксируемой с постоянной скоростью  $V$  нитью 3, прикреплённой к поводку 5**

Самым неожиданным явилось то, что во всех этих опытах оказалось, что направление угловой скорости вращения шариков, если смотреть на «гантель» сзади, «вдогон», - всегда против часовой стрелки, т.е. левое. В некоторых опытах в начальный момент движения, в

период разгона лодки в течение времени 2 – 3 секунды наблюдалось и вращение по часовой стрелке, однако оно переходило в устойчивое вращение против часовой стрелки уже при скорости примерно 1 м/сек и более (для шариков диаметром 1 сантиметр). Причём существенно, что направление устойчивого вращения «гантели» не зависело от направления скорости буксировки: с юга на север или с севера на юг, с востока на запад или с запада на восток. Кроме того описанное явление вращения как одиночных шаров, так и «гантелей» из шаров диаметром один сантиметр и четыре сантиметра имело место и для случая движения снизу вверх (как и воздушных пузырьков).



**Рисунок 4- Схема движения уединённого шара при его буксировке под водой с постоянной скоростью  $V$  согласно рисунку 2**

**Обозначения: 5 – спица, 3 – нить, 6 – шар с раскрашенными на его поверхности участками для наблюдения за его вращением с угловой скоростью  $\omega_2$ ,  $\omega_1$  – угловая скорость движения шара по спиральной траектории.**

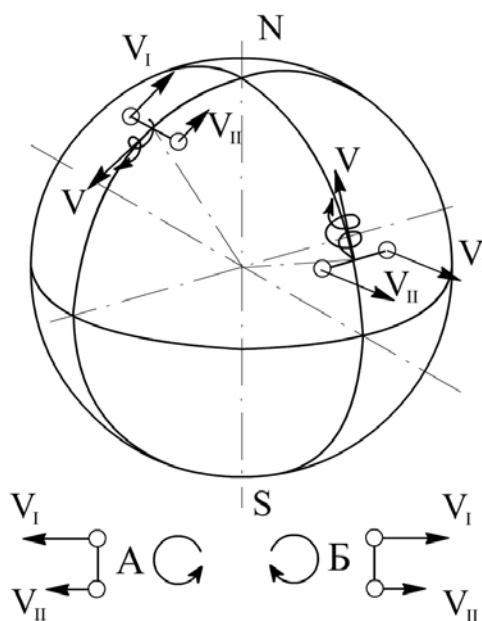
Объяснение этому явлению все лица, просмотревшие видеоклипы опытов, находили в том, что наблюдаемый эффект обусловлен вращением Земли. Якобы в южном полушарии можно было бы наблюдать вращение «гантелей» по часовой стрелке, а траектория поднимающихся воздушных пузырьков имела бы спиральность, обратную спиральности пузырьков в северном полушарии. Рассмотрим поэтому возможное влияние вращения Земли на указанное явление.

Для этого обратимся к схеме (рисунок 5), на которой указаны две «гантели». Слева вариант «А»: «гантель» движется вдоль поверхности Земли с севера на юг, а справа вариант «Б»: наоборот, с юга на север. Отметим сначала, что для точек экватора с учётом того, что радиус земли равен примерно 6 378 км, линейная скорость равна примерно 460 м/сек. Градиент изменения скорости равен 0,072 [1/сек], т.е. с каждым сантиметром экваториального радиуса Земли скорость вращения увеличивается на 0,72 мм/сек. По сравнению со скоростью движения в воде указанных ранее шаров «гантели», равной около 1 м/сек, и расстоянием между центрами шаров примерно 2 сантиметра, скорость 0,72 мм/сек (или с учётом расстояния между центрами шаров около двух сантиметров составит 1,43 мм/сек) оказывается равной всего лишь примерно 0,7% от скорости движения шаров в воде.

Однако возможно, что именно этой малой разницей в скоростях шаров в тот момент движения «гантели», когда её шары находятся в вертикальном положении, пренебрегать нельзя и именно эта разница и обуславливает наблюдаемое вращение.

Если это так, то для левой «гантели» (рисунок 5), поскольку при её движении с севера на юг шарик № 1 расположен на большем радиусе от центра Земли, чем шарик № 2 (при вертикальном расположении шаров), и имеет соответственно большую скорость, вращение должно быть против часовой стрелки (если смотреть с северного направления). Для правой «гантели» в силу тех же причин при её движении к северу вращение должно быть по часовой стрелке. Однако, как уже указывалось, в опытах вращение «гантелей» практически всегда

было левое, угловая скорость «гантелей» была пропорциональна скорости центра «гантели»  $V$ .



**Рисунок 5 - Схема распределения скоростей для шариков «гантелей» при их горизонтальном перемещении с севера на юг (слева) и с юга на север (справа) со скоростью  $V$ : N – северный полюс Земли, S – южный полюс,  $V_0 = 460$  м/сек – скорость точек экватора,  $V_I$  и  $V_{II}$  – скорости движения, определяемые вращением Земли, соответственно верхнего и нижнего шариков**

Как отмечено, наблюдалось как спиральное винтовое движение единичных твёрдых шариков, так и вращение «гантелей» с двумя шариками («гантели» с тремя, четырьмя и т.д. шариками пока не испытывались) диаметров один сантиметр и четыре сантиметра при вертикальном перемещении «гантелей» в спокойной воде. При этом скорость перемещения центра «гантелей» в вертикальном направлении в спокойной воде озера составляла примерно те же 1,0 – 2,0 метра в секунду. Вращение «гантелей» оставалось левым. Если принять, что явление винтового вращения обусловлено вращением Земли, или, как выражаются некоторые исследователи, «тут всё ясно, это влияние сил Кориолиса», то непонятно, каким же всё-таки образом вращение остаётся левым при изменении движения шаров то с юга на север, то с севера на юг, то снизу вверх, то сверху вниз, то на восток, то на запад. Не объясняется также влиянием вращения Земли и вращение единичных шаров вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega_2$  (рисунок 4).

Это заставляет сделать вывод о том, что вращение Земли не влияет на описываемый эффект. Естественно, что такой вывод не отменяет желательности проведения подобных опытов в южном полушарии Земли.

Важно отметить, что свойство винтообразности траекторий сплошной среды не следует из уравнений Навье-Стокса (которые можно рассматривать как запись уравнения Ньютона для сплошной среды) и из уравнения сохранения массы (уравнения непрерывности) [2, 3]. Винтообразность проявляется при рассмотрении свойств ортогональной сети, образованной семействами непрерывных гладких линий, в которой одним из семейств сети служат траектории движения [3].

Насколько известно автору, учёт описанного явления в работе технических конструкций не ведётся, хотя именно этим явлением, по мнению автора, объясняется вращение против часовой стрелки стабилизаторов авиабомб при их полёте, вращение корпусов ракет и т.п.

Кроме того этим же объясняется движение прядей водорослей в реках, колебания затонувших веток в достаточно быстро текущей воде и т.п.

Другими словами, по мнению автора, описанное явление не фиксируется потому, что оно необъяснимо, т.к. используемые сейчас уравнения движения сплошной среды не учитывают все свойства этой среды. Какое же именно свойство не учитывается и как провести учёт, автор пока объяснить не может.

В заключение можно сказать, что у автора в ходе наблюдений над реальными наблюдаемыми течениями создалось впечатление, что эти течения не могут быть описаны с помощью численных методов, применяемых в настоящее время для решения уравнений Навье-Стокса в виду того, что все известные численные методы и, соответственно, так называемые пакеты программ для работы на современных компьютерах изначально не предполагают расчёты течений сплошных сред с изменяющимися во времени траекториями течений, хотя бы и в режимах так называемого ламинарного течения. Другими словами не предполагают рассмотрение неустановившихся течений с неустановившимися траекториями даже в простейших случаях (редким исключением из этого может служить работа Шапеева А.В., в которой делается попытка рассмотреть нестационарность траекторий течения [5]). Во всех современных компьютерных программах используются приближения, не содержащие возможности изменений линий тока во времени (аналогично тому, как при расчётах на прочность отсутствует возможность изменения во времени линий главных напряжений) и не позволяющие, по мнению автора, адекватно моделировать действительные движения вязких жидкостей. Результатом этого является кратные количественные расхождения теоретических и опытных результатов, а также их качественные расхождения.

Другим существенным, по мнению автора, упущением программного обеспечения на настоящий момент является отсутствие требования достаточной гладкости линий тока, т.е. непрерывность изменения кривизны линий тока (радиуса кривизны или третьей производной от ординаты линии тока), что учитывается дополнительным к уравнению Навье-Стокса «геометрическим» уравнением [1, 2]. Это требование непрерывности кривизны линий тока по существу физического содержания означает то, что движение по линиям тока должно происходить без ударов. В результате этого так называемые «приближённые» решения не стремятся при увеличении точности (путём, например, уменьшения шага сетки) к пределу (к точному решению).

Таким образом, применение численных методов для расчёта течений вязких сред оказывается сложнее, чем для упругих сред. Поэтому, по мнению автора, перспективным программным обеспечением при расчётах течения вязких сред могут быть только такие, в которых предусмотрена возможность влияния времени на поведение линий тока, а также предусмотрен учёт достаточной гладкости этих линий.

#### **Выводы**

Для выявления особенностей обтекания шара проводились наблюдения над равномерным движением как единичных шаров разного размера, так и жёстко соединённых между собой по два или по четыре. Эти шары образовывали фигуру, подобную одиночной «гантели» или сдвоенным под прямым углом двум «гантелям». опыты обнаружили факт самопроизвольного закручивания шаров и «гантелей» со скоростью кругового движения, пропорциональной линейной скорости шаров в неподвижной воде озера. При этом закручивание происходило всегда, если не было начального возмущения, только против часовой стрелки как при движении шаров в направлениях север-юг, так и восток-запад, так и вверх-вниз, что доказывает, что вращение Земли на вращение шаров влияния оказать не может.

#### **Литература**

1. Вискребцов В.Г. «О свойстве самопроизвольного образования винтообразности траекторий при движении осесимметричных тел в сплошной среде. Сборник докладов конференции МГТУ «МАМИ», 2008г, Москва-Сочи, стр. 121 - 127.

2. Сью Т.Ц. Получение точного решения уравнений Навье-Стокса, International Journal of non-linear mechanics, Vol 20, №20, G. Britain, 1985.
3. Выскребцов В.Г. Гидромеханика в новом изложении, из-во «Спутник+», М, 2001г.
4. Жуковский Н.Е. Собрание сочинений, Том 2, Гидродинамика, М-Л, 1949, стр. 698.
5. Шапеев А.Н. Вязкие несжимаемые течения жидкости в секторах и конусах. Автореферат диссертации на соискание к.ф.-м.н., Новосибирск, 2009г.

### **Прикладные варианты теорий упругопластического деформирования материалов при сложном нагружении**

к.ф.-м.н. доц. Даншин В.В., Семенов П.В.

МГТУ «МАМИ»

8 (495) 223-05-23, [tm@mami.ru](mailto:tm@mami.ru)

*Аннотация.* В статье рассмотрены математические модели упругопластического деформирования на основе теории процессов пластического деформирования, развиваемая В.Г. Зубчаниновым и частного варианта теории неупругости В.С. Бондаря. Основные положения и уравнения этих теорий упругопластического деформирования материалов приводятся в виде систем дифференциальных уравнений, что позволяет проведение теоретических исследований закономерностей упругопластического деформирования материалов при сложном нагружении по плоским траекториям деформаций.

*Ключевые слова:* упругость, пластичность, сложное нагружение.

#### **Введение.**

Проблемы надежного функционирования и снижения материалоемкости конструкций современной техники, работающей в условиях высоких уровней силовых нагрузок, делают весьма актуальной задачу математического моделирования упругопластического поведения материала конструкций. Увеличение рабочих параметров современных машин и аппаратов приводит к возрастанию как общей, так и местной напряженности конструкций. Реальные процессы нагружения таких конструкций таковы, что в материале конструкций возникают упругопластические деформации. При этом нагружение является сложным и характер его изменения может быть самым произвольным в условиях повторности действия силовых нагрузок. Правильный учет упругопластической стадии деформирования материала конструкций в конечном счете приводит к повышению прочности, долговечности, надежности функционирования машин и аппаратов современной техники.

Развитие теории пластичности и разработка определяющих соотношений, описывающих процессы сложного нагружения, в настоящее время идет двумя основными путями. К первому направлению относятся различные варианты упругопластических процессов, базирующиеся на общей математической пластичности А.А. Ильюшина [1, 2]. Ко второму направлению относятся различные варианты теории пластического течения при комбинированном упрочнении, базирующиеся на концепции микронапряжений, выдвинутой В.В. Новожиловым [3].

В статье рассматриваются теория процессов пластического деформирования [4-6], успешно развиваемая В.Г. Зубчаниновым и его учениками и относящаяся к теориям первого направления, а также достаточно простой вариант второго направления - теории упругопластического деформирования, являющейся частным вариантом разработанной В.С. Бондарем теории неупругости [7-12].

#### **Основные положения и уравнения теорий упругопластического деформирования**

Определяющие уравнения общей теории процессов [4-6] имеют вид: