

2. Сью Т.Ц. Получение точного решения уравнений Навье-Стокса, International Journal of non-linear mechanics, Vol 20, №20, G. Britain, 1985.
3. Выскребцов В.Г. Гидромеханика в новом изложении, из-во «Спутник+», М, 2001г.
4. Жуковский Н.Е. Собрание сочинений, Том 2, Гидродинамика, М-Л, 1949, стр. 698.
5. Шапеев А.Н. Вязкие несжимаемые течения жидкости в секторах и конусах. Автореферат диссертации на соискание к.ф.-м.н., Новосибирск, 2009г.

Прикладные варианты теорий упругопластического деформирования материалов при сложном нагружении

к.ф.-м.н. доц. Даншин В.В., Семенов П.В.
МГТУ «МАМИ»
8 (495) 223-05-23, tm@mami.ru

Аннотация. В статье рассмотрены математические модели упругопластического деформирования на основе теории процессов пластического деформирования, развиваемая В.Г. Зубчаниновым и частного варианта теории неупругости В.С. Бондаря. Основные положения и уравнения этих теорий упругопластического деформирования материалов приводятся в виде систем дифференциальных уравнений, что позволяет проведение теоретических исследований закономерностей упругопластического деформирования материалов при сложном нагружении по плоским траекториям деформаций.

Ключевые слова: упругость, пластичность, сложное нагружение.

Введение.

Проблемы надежного функционирования и снижения материалоемкости конструкций современной техники, работающей в условиях высоких уровней силовых нагрузок, делают весьма актуальной задачу математического моделирования упругопластического поведения материала конструкций. Увеличение рабочих параметров современных машин и аппаратов приводит к возрастанию как общей, так и местной напряженности конструкций. Реальные процессы нагружения таких конструкций таковы, что в материале конструкций возникают упругопластические деформации. При этом нагружение является сложным и характер его изменения может быть самым произвольным в условиях повторности действия силовых нагрузок. Правильный учет упругопластической стадии деформирования материала конструкций в конечном счете приводит к повышению прочности, долговечности, надежности функционирования машин и аппаратов современной техники.

Развитие теории пластичности и разработка определяющих соотношений, описывающих процессы сложного нагружения, в настоящее время идет двумя основными путями. К первому направлению относятся различные варианты упругопластических процессов, базирующиеся на общей математической пластичности А.А. Ильюшина [1, 2]. Ко второму направлению относятся различные варианты теории пластического течения при комбинированном упрочнении, базирующиеся на концепции микронапряжений, выдвинутой В.В. Новожиловым [3].

В статье рассматриваются теория процессов пластического деформирования [4-6], успешно развиваемая В.Г. Зубчаниновым и его учениками и относящаяся к теориям первого направления, а также достаточно простой вариант второго направления - теории упругопластического деформирования, являющейся частным вариантом разработанной В.С. Бондарем теории неупругости [7-12].

Основные положения и уравнения теорий упругопластического деформирования

Определяющие уравнения общей теории процессов [4-6] имеют вид:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{dt} = M_1 \hat{p}_1 + M \hat{\sigma} + M_3 \hat{p}_3, \quad (1)$$

$$\hat{p}_1 = \frac{d\bar{\Theta}}{ds}, \hat{p}_2 = \frac{1}{\chi_1} \frac{d^2 \bar{\Theta}}{ds^2}, \hat{p}_3 = \frac{1}{\chi_2} \left[\chi_1 \hat{p}_1 + \frac{d\hat{p}_2}{ds} \right].$$

Здесь $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3$ - ортонормированные реперы (базисы) Френе, а χ_1, χ_2 соответственно кривизна и кручение траектории деформирования. Единичный вектор напряжений $\hat{\sigma}$ представим в репере Френе:

$$\begin{aligned} \sigma &= \cos \vartheta_1 p_1 + \sin \vartheta_1 [\cos \vartheta_2 p_2 + \sin \vartheta_2 p_3], \\ \hat{\sigma} &= \frac{\bar{\sigma}}{\sigma}, \bar{\sigma} = S_1 \hat{i}_1 + S_2 \hat{i}_2 + S_3 \hat{i}_3, \bar{\Theta} = \vartheta_1 \hat{i}_1 + \vartheta_2 \hat{i}_2 + \vartheta_3 \hat{i}_3, \end{aligned} \quad (2)$$

где: $\bar{\sigma}$ и $\bar{\Theta}$ - векторы напряжений и деформаций [1, 2] в пространстве А.А. Ильюшина.

Функционалы процесса определены формулами:

$$\begin{aligned} M &= \frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \vartheta_1 - M_3 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2, \\ M_k &= M_k(\vartheta, \chi_1, \chi_2) \quad (k=1,3). \end{aligned} \quad (3)$$

Векторные свойства материала могут быть получены из уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta_1}{ds} + \chi_1 \cos \vartheta_2 &= \frac{1}{\sigma} [-M_1 \sin \vartheta_1 + M_3 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2], \\ \sin \vartheta_1 \left(\frac{d\vartheta_2}{ds} + \chi_2 \right) &= \chi_1 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + \frac{M_3}{\sigma} \cos \vartheta_2, \end{aligned} \quad (4)$$

где ϑ_1 - угол сближения, ϑ_2 - угол депланации.

Если траектория деформирования задана в параметрическом виде $\bar{\Theta} = \bar{\Theta}(t)$, где t - параметр нагружения, то определяющие соотношения (1) в скалярной форме преобразуются к виду:

$$\frac{dS_k}{ds} = N \frac{d\vartheta_k}{ds} + M \frac{S_k}{\sigma} + \frac{M_3}{\chi_2} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\chi_1} \frac{d^2 \vartheta_k}{dt^2} \right), \quad (5)$$

где:

$$N = M_1 + \frac{\chi_1}{\chi_2} M_3. \quad (6)$$

На рисунках 1 и 2 представлены образ процесса деформирования и фрагмент локального образа процесса деформирования в репере Френе в текущей точке K .

Для плоских траекторий [4-6] $N = M_1, M_3 = 0$.

Тогда вместо соотношений (5) получим:

$$\dot{S}_k = M_1 \dot{\vartheta}_k + M \frac{S_k}{\sigma} \dot{s} \quad (k=1,3). \quad (7)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{\Phi(s)}{s}, M = \frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \vartheta_1, \frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\Phi}{ds}, \\ \sigma &= \sqrt{S_1^2 + S_3^2}, \dot{s} = \sqrt{\dot{\vartheta}_1^2 + \dot{\vartheta}_3^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для функционалов $M_1, d\sigma/ds$ в теории процессов часто принимаются аппроксимации [6]:

$$M_1 = \frac{\Phi(s)}{s} + \left(2G - \frac{\Phi(s)}{s}\right) f^q \exp(-\gamma_0 s),$$

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\Phi}{ds} - \left(2G - \frac{d\Phi}{ds}\right) f^p \exp(-\gamma s),$$
(9)

где функция сложности процесса:

$$f = \frac{1 - \cos \vartheta_1}{2}.$$
(10)

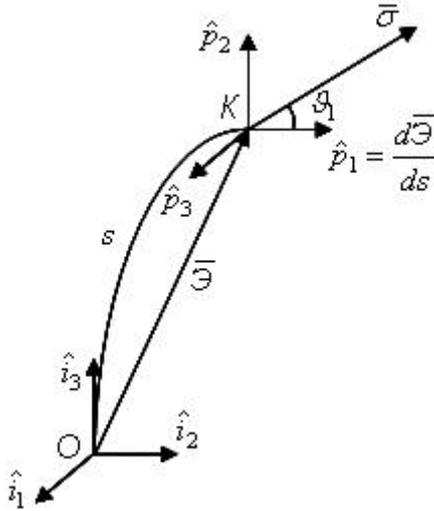


Рисунок 1 - Образ процесса деформирования

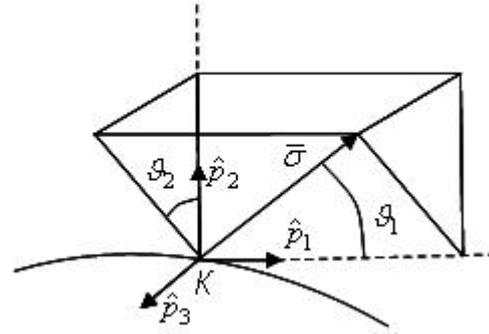


Рисунок 2 - Локальный образ процесса

В формулах (8), (9) s - длина дуги траектории деформирования, $\Phi(s)$ - универсальная функция, определяемая из опыта на простое растяжение. Считается, что эта функция мало отличается от диаграммы растяжения. Параметры p, q, γ, γ_0 находятся из базового эксперимента [4] по траекториям деформаций типа веера.

Сформулируем основные положения и уравнения теории упругопластического деформирования [8] – частного варианта теории неупругости. Тензор скоростей деформаций представляется в виде суммы скоростей упругой и пластической деформаций:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p.$$
(11)

Упругие деформации при изменении напряжений следуют обобщенному закону Гука:

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{E} [\dot{\sigma}_{ij} - \nu(3\dot{\sigma}_0 \delta_{ij} - \dot{\sigma}_{ij})],$$
(12)

где: E, ν - соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона, $\sigma_0 = 1/3 \sigma_{ii}$ - среднее напряжение.

Полагается, что в пространстве составляющих тензора напряжений существует поверхность нагружения, разделяющая области упругого и упругопластического состояний. Уравнение поверхности нагружения принимается в следующем виде:

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{3}{2} (s_{ij} - a_{ij})(s_{ij} - a_{ij}) - [C_p(\varepsilon_{ij}^p)]^2 = 0.$$
(13)

Здесь $s_{ij}^* = (s_{ij} - a_{ij})$ - девиатор активных напряжений, s_{ij} - девиатор напряжений, ε_{ij}^p - длина дуги пластической деформации. Тензор a_{ij} характеризует смещение поверхности нагружения в девиаторном пространстве напряжений, функция $C_p(\varepsilon_{ij}^p)$ - изотропное упрочне-

ние.

Смещение поверхности нагружения определяется следующим уравнением:

$$\dot{a}_{ij} = \frac{2}{3} g \dot{\varepsilon}_{ij} + \left(\frac{2}{3} g_{\varepsilon} \varepsilon_{ij}^p + g_a a_{ij} \right) \dot{\varepsilon}_{u^*}^p. \quad (14)$$

В общем случае g , g_{ε} , g_a являются функционалами процесса нагружения, здесь же они считаются константами материала. Уравнение (14) характеризует анизотропное упрочнение.

Пластические деформации зависят от истории нагружения и являются функционалами процесса. Считается, что поле скоростей пластической деформации в пространстве напряжений имеет потенциал. Тогда, принимая в качестве потенциала функцию (13), тензор скоростей пластической деформации будет определяться уравнением:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^*}{\sigma_u^*} \dot{\varepsilon}_{u^*}^p, \quad (15)$$

где σ_u^* - интенсивность активных напряжений, $\dot{\varepsilon}_{u^*}^p$ - интенсивность скоростей пластической деформации.

Используя зависимости (11)-(15), можно получить уравнение для скорости пластической деформации для жесткого нагружения:

$$\dot{\varepsilon}_{u^*}^p = \frac{3G}{E_* + 3G} \frac{s_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^p}{\sigma_u^*},$$

$$E_* = q_{\varepsilon} + g + g_{\varepsilon} \varepsilon_u^{p*} + g_a a_u^*, \quad q_{\varepsilon} = \frac{dC_p(\varepsilon_{u^*}^p)}{d\varepsilon_{u^*}^p}, \quad (16)$$

$$\varepsilon_u^{p*} = \frac{s_{ij}^* \varepsilon_{ij}^p}{\sigma_u^*}, \quad a_u^* = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^* a_{ij}}{\sigma_u^*}.$$

Условия упругого и упругопластического состояний имеют вид:

упругость –

$$\sigma_u^* < C_p \cup \dot{\varepsilon}_{u^*}^p \leq 0; \quad (17)$$

упругопластичность –

$$\sigma_u^* = C_p \cap \dot{\varepsilon}_{u^*}^p > 0. \quad (18)$$

Для определяющих и материальных функций теории упругопластического деформирования установлены следующие зависимости [7]:

$$g = E_a + \beta \sigma_a, \quad g_{\varepsilon} = \beta E_a, \quad g_a = -\beta. \quad (19)$$

Теорию замыкают материальные функции, подлежащие экспериментальному определению:

E , ν - упругие параметры;

$C_p(\varepsilon_{u^*}^p)$ - функция изотропного упрочнения;

E_a , β , σ_a - параметры анизотропного упрочнения.

Упругие параметры определяются традиционными методами, материальные функции модели определяются из опытов на одноосное растяжение-сжатие, которые являются сложным нагружением по двухзвенным траекториям с изломом на 180 градусов.

Заключение

Система уравнений (7) теории процессов и система уравнений (11)-(16) упругопластического деформирования при известных начальных условиях могут быть проинтегрированы одним из известных численных методов, например, методом Рунге-Кутты четвертого порядка

точности. Представляет несомненный интерес проведение теоретического эксперимента с помощью изложенных теорий для сравнительного исследования закономерностей упруго-пластического деформирования материалов при сложном нагружении по плоским траекториям, вид которых определяется программой экспериментальных исследований, разработанной В.Г. Зубчаниновым и реализованной под его руководством Тверской научной школой.

Литература

1. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Изд. АН СССР, 1963. 271 с.
2. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
3. Новожилов В., Кадашевич Ю.И. Микронапряжения в конструкционных материалах. – Л.: Машиностроение, 1974. 344 с.
4. Зубчанинов В.Г. Математическая теория пластичности - Тверь.: ТГТУ. - 2002. – 300 с.
5. Зубчанинов В.Г. Устойчивость и пластичность. Т. 2. Пластичность. - М.: Физматлит, 2008. 366 с.
6. Зубчанинов В.Г. Механика процессов пластических сред. - М.: Физматлит, 2010. 352 с.
7. Бондарь В.С. Неупругость. Варианты теории. - М.: Физматлит, 2004. 144 с.
8. Бондарь В.С., Даншин В.В. Пластичность. - М.: Физматлит, 2008. 176 с.
9. Бондарь В.С. Математическая модель неупругого поведения и накопления повреждения материала // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения: Всесоюз. межвуз. сб. / Горьк. ун-т. 1987. С. 24-28.
10. Бондарь В.С. Математическое моделирование процессов неупругого поведения и накопления повреждений при сложном неизотермическом нагружении в условиях ионизирующего излучения // Расчеты на прочность. – М.: Машиностроение, 1988. Вып. 29. С. 23-29.
11. Бондарь В.С. Неупругое поведение и разрушение материалов и конструкций при сложном неизотермическом нагружении // Автореф. дисс. на соиск. уч. степени докт. физ.-матем. наук. - М.: МАМИ, 1990. 40 с.
12. Бондарь В.С. Теория неупругости // Материалы 49-й Межд. науч.-техн. конф. ААИ «Приоритеты развития отечественного автотракторостроения и подготовки инженерных научных кадров». Школа-семинар «Современные модели термовязкопластичности» Ч. 2. – М.: МАМИ, 2005. С. 3-24.

Задача о флаттере пластины переменной толщины в уточненной и дополненной постановке

к.ф.-м.н. доц. Кудрявцев Б.Ю.
МГТУ «МАМИ»

Аннотация. В линейной постановке исследована задача об устойчивости в сверхзвуковом потоке газа пластины переменной толщины, составляющей часть поверхности тонкого клина. При этом пластина свободно операется по кромкам, а вектор скорости потока направлен по оси клина. Найдена критическая скорость при различных значениях параметров.

Ключевые слова: флаттер, сверхзвуковой поток газа, пластина переменной толщины, устойчивость.

Задача о флаттере пластины постоянной толщины изучена достаточно подробно как с использованием линейной поршневой теории [1, 2], так и в случае некоторых других новых постановок [3-7]. При этом работ, где исследовалась бы устойчивость в потоке газа пластины переменной толщины или жесткости, довольно мало [8-11], и рассмотрена в них только бесконечная полоса. В предлагаемой статье представлено решение задачи линейного флаттера