точности. Представляет несомненный интерес проведение теоретического эксперимента с помощью изложенных теорий для сравнительного исследования закономерностей упруго-пластического деформирования материалов при сложном нагружении по плоским траекториям, вид которых определяется программой экспериментальных исследований, разработанной В.Г. Зубчаниновым и реализованной под его руководством Тверской научной школой.

Литература

1. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Изд. АН СССР, 1963. 271 с.
2. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
3. Новожилов В., Кадашевич Ю.И. Микронапряжения в конструкционных материалах. – Л.: Машиностроение, 1974. 344 с.
4. Зубчанинов В.Г. Математическая теория пластичности - Тверь.: ТГТУ. - 2002. – 300 с.
5. Зубчанинов В.Г. Устойчивость и пластичность. Т. 2. Пластичность. - М.: Физматлит, 2008. 366 с.
6. Зубчанинов В.Г. Механика процессов пластических сред. - М.: Физматлит, 2010. 352 с.
7. Бондарь В.С. Неупругость. Варианты теории. - М.: Физматлит, 2004. 144 с.
8. Бондарь В.С., Даншин В.В. Пластичность. - М.: Физматлит, 2008. 176 с.
9. Бондарь В.С. Математическая модель неупругого поведения и накопления повреждения материала // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения: Всесоюз. межвуз. сб. / Горьк. ун-т. 1987. С. 24-28.
10. Бондарь В.С. Математическая моделирование процессов неупругого поведения и накопления повреждений при сложном неизотермическом нагружении в условиях ионизирующего излучения // Расчеты на прочность. – М.: Машиностроение, 1988. Вып. 29. С. 23-29.
11. Бондарь В.С. Неупругое поведение и разрушение материалов и конструкций при сложном неизотермическом нагружении // Автореф. дисс. на соиск. уч. степени докт. физ.-матем. аукн. - М.: МАМИ, 1990. 40 с.
12. Бондарь В.С. Теория неупругости // Материалы 49-й Межд. науч.-техн. конф. ААИ «Приоритеты развития отечественного автотракторостроения и подготовки инженерных научных кадров». Школа-семинар «Современные модели термовязкопластичности» Ч. 2. – М.: МАМИ, 2005. С. 3-24.

Задача о флаттере пластины переменной толщины в уточненной и дополненной постановке

к.ф.-м.н. доц. Кудрявцев Б.Ю.
МГТУ «МАМИ»

Аннотация. В линейной постановке исследована задача об устойчивости в сверхзвуковом потоке газа пластины переменной толщины, составляющей часть поверхности тонкого клина. При этом пластина свободно операется по кромкам, а вектор скорости потока направлен по оси клина. Найдена критическая скорость при различных значениях параметров.

Ключевые слова: флаттер, сверхзвуковой поток газа, пластина переменной толщины, устойчивость.

Задача о флаттере пластины постоянной толщины изучена достаточно подробно как с использованием линейной поршневой теории [1, 2], так и в случае некоторых других новых постановок [3-7]. При этом работ, где исследовалась бы устойчивость в потоке газа пластины переменной толщины или жесткости, довольно мало [8-11], и рассмотрена в них только бесконечная полоса. В предлагаемой статье представлено решение задачи линейного флаттера конечной пластины переменной толщины, составляющей часть поверхности тонкого клина.

Рассмотрим задачу о флаттере пластины со свободно опертыми кромками, которая находится на поверхности клина и в плоскости OXY занимает область $G = \{(x,y), x_0 \le x \le x_0 + s, 0 \le y \le 1\}$. Тогда согласно [4] линейное уравнение колебаний будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(h_1{}^3(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2})) + 2(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(h_1{}^3\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(h_1{}^3(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})) + A_2 M^2 x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} +$$

$$+ A_1 M^2\frac{\partial w}{\partial x} + A_0 M\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\cdot h_1 = 0$$

с соответствующими граничными условиями, где:

$$A_0 = \frac{8k\sqrt{3(1-\nu^2)}pl^2}{(k+1)c_0 h_0{}^2\sqrt{E\rho}}tg\beta(1+2\eta-\eta a^*(tg\beta)),\ A_1 = \frac{48k(1-\nu^2)pl^3}{Eh_0{}^3(k+1)}tg\beta(1+2\eta-\eta a^*(tg\beta)),$$

$$A_2 = \frac{12k(1-\nu^2)pl^3}{Eh_0{}^3}tg(\beta)(1-\eta\frac{12a^*(tg\beta)}{k(1+k)}),\ a^* = 1+2/((k-1)M^2 tg^2\beta),\ \eta = \frac{k-1}{k+1},$$

w - прогибы пластины, $h = h_0 \cdot h_1(x,y)$ и l - ее толщина и ширина, ρ - плотность материала, E – модуль Юнга, ν - коэффициент Пуассона, M – число Маха, κ - показатель политропы, p и c_0 - давление и скорость звука в невозмущенном потоке, α - угол полураствора клина, наклон ударной волны β определяется из уравнения:

$$tg\beta = tg\alpha + \eta a(tg\beta)tg\beta\,.$$

Рассмотрим случай, когда $h_1(x,y) = 1 + \varepsilon f(y), \varepsilon << 1$. Тогда с точностью до бесконечно малых высшего порядка уравнение колебаний можно представить следующим образом:

$$(1+3\varepsilon\cdot f(y))(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}) + 6\varepsilon\cdot f'(y)(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}) + 3\varepsilon\cdot f''(y)(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) +$$

$$+A_2 M^2 x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_1 M^2\frac{\partial w}{\partial x} + A_0 M\frac{\partial w}{\partial t} + (1+\varepsilon\cdot f(y))\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

Решения будем искать в виде:

$$w = \exp(\omega t)\sin\pi y(c_1\sin\frac{\pi(x-x_0)}{s} + c_2\sin\frac{2\pi(x-x_0)}{s}), c_1, c_2 \in R, \omega \in C\,.$$

Задача состоит в том, чтобы найти критическую скорость потока $M_{кр}$, то есть минимальное значение M, при котором комплексная частота ω переходит в правую полуплоскость. Проведя процедуру Бубнова-Галеркина, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$c_1(b(\frac{\pi}{s}) - A_2\left(\frac{\pi}{s}\right)^2 M^2(\frac{s}{4} + \frac{x_0}{2}) + A_0 M\omega\frac{1}{2} + \omega^2(\varepsilon\cdot \mathrm{I}_{10} + \frac{1}{2})) + c_2(\frac{32}{9}A_2 M^2\cdot\frac{1}{s} -$$

$$- A_1 M^2\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{s}) = 0,$$

$$c_1(A_2 M^2\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{s} + A_1 M^2\cdot\frac{4}{3}\frac{1}{s}) + C_2(b(2\frac{\pi}{s}) - 4\left(\frac{\pi}{s}\right)^2 A_2 M^2(\frac{s}{4} + \frac{x_0}{2}) + A_0 M\omega\frac{1}{2} +$$

$$+ \omega^2(\varepsilon\cdot \mathrm{I}_{10} + \frac{1}{2})) = 0,$$

где:

$$b(u) = (u^4 + 2u^2\pi^2 + \pi^4) \cdot (0{,}5 + 3 \cdot \varepsilon \cdot \mathrm{I}_{10}) + 6\varepsilon(-\pi^3 - u^2\pi)\mathrm{I}_{21} +$$
$$+ 3 \cdot \varepsilon(-\pi^2 - \nu u^2) \cdot \mathrm{I}_{12},$$
$$I_{10} = \int_0^1 f(y)\sin^2 \pi y dy,\ I_{12} = \int_0^1 f''(y)\sin^2 \pi y dy,\ I_{21} = \int_0^1 f'(y)\cos \pi y \sin \pi y dy.$$

Приравняем определитель системы к нулю, будем искать критическую скорость потока $M_{кр}$ как наименьшую скорость *М*, при которой комплексная частота ω переходит в правую полуплоскость.

В качестве примера рассмотрим металлическую пластину, находящуюся в потоке воздуха, при следующих значениях параметров:

$$h_0 = 0{,}001м, p = 10^5 па, \kappa = 1{,}4, c_0 = 330 м/с, \alpha = 10^\circ, x_0 = 0.$$

Функцию *f* возьмем в виде: $f(y) = \cos(2\pi y)$, при таком выборе площадь сечения пластины плоскостью $x = const$ останется неизменной при любом ε.

В таблице 1 представлены значения критической скорости для стальной пластины ($E = 2 \cdot 10^{11} па, \rho = 8 \cdot 10^3 кг/м^3, \nu = 0{,}3$) при различных соотношениях длин сторон и вариантах распределения толщины. В таблицах 2 и 3 содержатся аналогичные результаты для алюминиевой пластины ($E = 6{,}7 \cdot 10^{10} па, \rho = 2{,}7 \cdot 10^3 кг/м^3$) при $\nu = 0{,}32$ и $\nu = 0{,}36$ соответственно.

Таблица 1.

	l=0,5,s=1/2	*l=0,375,s=2/3*	*l=0,25,s=1*	*l=0,25,s=1,5*	*l=0,25,s=2*
ε=0,3	5,43	5,46	5,57	5,36	5,29
ε=0	5,59	5,63	5,70	5,39	5,29
ε=-0,3	5,76	5,78	5,85	5,42	5,29

Таблица 2.

	l=0,5,s=1/2	*l=0,375,s=2/3*	*l=0,25,s=1*	*l=0,25,s=1,5*	*l=0,25,s=2*
ε=0,3	5,28	5,30	5,33	5,28	5,28
ε=0	5,34	5,35	5,38	5,28	5,27
ε=-0,3	5,40	5,40	5,43	5,29	5,26

Таблица 3.

	l=0,5,s=1/2	*l=0,375,s=2/3*	*l=0,25,s=1*	*l=0,25,s=1,5*	*l=0,25,s=2*
ε=0,3	5,29	5,30	5,34	5,28	5,28
ε=0	5,34	5,35	5,39	5,28	5,27
ε=-0,3	5,40	5,41	5,44	5,29	5,26

Из таблиц видно, что в большинстве случаев утолщение пластины к середине повышает значения критической скорости, а концентрация материала ближе к кромкам, наоборот, способствует снижению динамической устойчивости. Этот эффект наиболее сильно проявляется для удлиненной вдоль оси OY пластины, а для вытянутой вдоль направления потока практически не ощущается или становится обратным. Поведение критической скорости для пластины конечных размеров оказалось существенно зависящим от многих параметров задачи, как в [7], а не только от коэффициента Пуассона ν, в отличие от неограниченной полосы [8], где эффект стабилизации принципиальным образом зависел от того, $\nu < 1/3$ или нет.

Для сравнения можно исследовать задачу, положив в уравнении колебаний $A_2 = 0$. Тогда оно получится в виде, близком к случаю линейной поршневой теории.

В таблице 4 приведены результаты при тех же параметрах, что и в таблице 1. Поведение критической скорости оказалось аналогичным остальным случаям, хотя сами значения получились в несколько раз меньшими.

Таблица 4.

	$l=0,5,s=1/2$	$l=0,375,s=2/3$	$l=0,25,s=1$	$l=0,25,s=1,5$
$\varepsilon=0,3$	1,45	1,58	1,91	1,17
$\varepsilon=0$	2,00	2,09	2,33	1,30
$\varepsilon=-0,3$	2,46	2,52	2,69	1,42

Выводы

Исследована зависимость критической скорости панельного флаттера от распределения толщины пластины. Концентрация материала к середине оказывает, как правило, стабилизирующий эффект.

Литература

1. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек // Механика деформируемого твердого тела. М., 1978. (Итоги науки и техники / ВИНИТИ; Т.11).
2. Ильюшин А.А., Кийко И.А. Новая постановка задачи о флаттере пологой оболочки. ПММ, 1994, т. 58, в. 3, с 167-171.
3. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М., Наука, 2006.
4. Кийко И.А. Постановка задачи о флаттере оболочки вращения и пологой оболочки, обтекаемых потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью. ПММ, 1999, т. 63, в 2, с. 305-312.
5. Кудрявцев Б.Ю. Флаттер упругой пластины,находящейся в потоке газа,при умеренных сверхзвуковых скоростях. Изв. ТулГУ,сер. мат.,мех.,инф., -Т.11,-Вып.3, Тула: изд. ТулГУ,2005,с.99-102.
6. Кудрявцев Б.Ю. Флаттер прямоугольной пластины, составляющей часть поверхности тонкого клина , обтекаемого потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью.Деп. в ВИНИТИ, 2002, № 1085-В2002.
7. Кийко И.А., Кудрявцев Б.Ю. Нелинейные аэроупругие колебания прямоугольной пластины // Вестн. МГУ. Сер. 1, Матем, мех. 2005. № 1. С. 68-71.
8. Кийко И.А.,Кудрявцев Б.Ю. Флаттер упругой полосы переменной жесткости. Деп. в ВИНИТИ, 1997, № 1103-В97.
9. Исаев В.П., Кийко И.А. Аэроупругие колебания и устойчивость ортотропной полосы переменной толщины. Деп. в ВИНИТИ, 2002, № 203-В2002.
10. Кадыров А.К., Кийко И.А. Флаттер упругой полосы переменной толщины. Изв. ТулГУ. Сер. Мат. Мех. Инф.-Т.11.-Вып.2.мех.,Тула: изд. ТулГУ,2005,с. 46-52.
11. Кадыров А.К. Флаттер пластины переменной жесткости. Изв. ТулГУ. Сер. Мат. Мех. Инф.-Т.13.-Вып.2.мех.,Тула: изд. ТулГУ,2007,с. 76-81.

Скорость течения времени

к.т.н. доц. Выскребцов В.Г.
МГТУ «МАМИ»
(495) 223-05-23 доб. 1465

На основе почти постоянного отношения длительности последовательных геологических эпох, примерно равного двум, и предположения о том, что изменение уровня развития органического мира на Земле для каждой эпохи одно и то же, делается вывод о том, что скорость развития органики на Земле за последние два миллиарда лет может быть описана показательной (или экспоненциальной) зависимостью. Высказывается мнение, что экспонента может быть использована для описания не только геологических эпох, но и для более коротких промежутков