

**РАЗДЕЛ 3. ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ**

**Приближённое решение контактной задачи для двухслойного упругого покрытия твёрдого цилиндра**

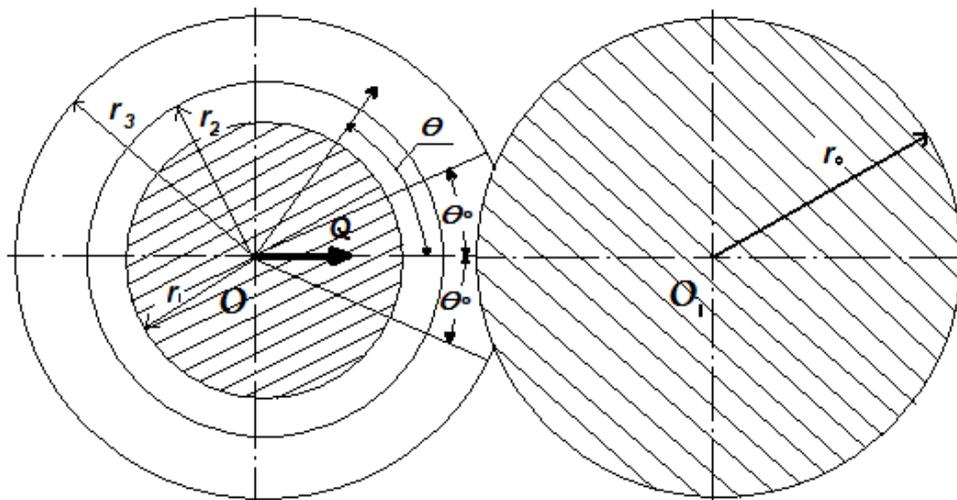
д.т.н. проф. Божкова Л.В., к.т.н. проф. Рябов В.Г., к.т.н. доц. Норицина Г.И., Акульшина Т.В.  
МГТУ «МАМИ»

8(495) 223-05-23, tm@mami.ru

*Аннотация.* Предложен приближенный аналитический метод решения задачи о контактном взаимодействии двухслойного упругого покрытия твердого цилиндра с другим твердым цилиндром. В основе этого метода лежит допущение о том, что контактные давления изменяются по закону косинуса и геометрическое условие контакта удовлетворяется в трех точках зоны контакта.

*Ключевые слова:* контактная задача, упругие деформации, двухслойное упругое покрытие цилиндра.

Рассмотрим приближённый инженерный метод решения задачи о контактном взаимодействии двухслойного кольцевого упругого покрытия твёрдого цилиндра с другим твёрдым цилиндром. В результате деформации упругих слоев произойдет соприкосновение твердого цилиндра с внешним упругим слоем по некоторой его части, характеризуемой углом  $\theta_0$  (рисунок 1)



**Рисунок 1 – Схема контактного взаимодействия двухслойного кольцевого упругого покрытия твердого цилиндра с другим твердым цилиндром**

Предполагая справедливыми условия плоской деформации и пренебрегая силами трения в зоне контакта, определим величину зоны контакта (угол  $\theta_0$ ), закон распределения контактных давлений  $p(\theta)$ , а также напряженное и деформированное состояние упругих слоев.

При решении задачи не налагается никаких ограничений на конструктивные параметры слоев, то есть полученные результаты будут справедливыми для упругих слоев любой толщины и при любом сколь угодно большом радиусе твердого цилиндра  $r_0$  (при  $r_0 \rightarrow \infty$  упругий слой будет контактировать с жестким плоским основанием). Кроме того, решение будет справедливым одновременно в случае сжимаемого и несжимаемого материалов слоев.

Для определённости присвоим порядковый номер кольцевым слоям соответственно 1 и 2, начиная от слоя, непосредственно покрывающего твёрдый цилиндр.

В рассматриваемой задаче величина зоны контакта при малых упругих деформациях будет малой (по сравнению с радиусами слоев), вследствие чего радиальные упругие перемещения в зоне контакта внешней поверхности второго упругого слоя  $W_2(r_3, \theta)$  могут быть представлены в виде

$$W_2(r_3, \theta) = -\delta + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{r_3}{r_0} \right) r_3 \theta^2, |\theta| < \theta_0, \quad (1)$$

где:  $\delta$  - неизвестный параметр, характеризующий сближение тел при сжатии.

Перейдём в соотношении (1) к безразмерным параметрам:

$$\bar{W}_2(1, \theta) = -\bar{\delta} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{r_3}{r_0} \right) \theta^2, |\theta| < \theta_0, \quad (2)$$

где:  $\bar{W}_2(1, \theta) = \frac{W_2(r_3, \theta)}{r_3}$ ;  $\bar{\delta} = \frac{\delta}{r_3}$ .

Для приближенного решения задачи введем допущение о том, что контактные давления изменяются по закону косинуса, а именно:

$$p(\theta) = p_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\theta}{\theta_0}\right), \quad |\theta| < \theta_0, \quad (3)$$

где:  $p_0$  - неизвестный параметр, подлежащий определению.

Представим (3) также в безразмерном виде:

$$\bar{p}(\theta) = \bar{p}_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\theta}{\theta_0}\right), \quad |\theta| < \theta_0, \quad (4)$$

где:  $\bar{p}(\theta) = \frac{p(\theta)}{E_2}$ ,  $\bar{p}_0 = \frac{p_0}{E_2}$ ,  $E_2$  - модуль упругости второго слоя.

Разложим функцию  $\bar{p}(\theta)$  в ряд Фурье на промежутке  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ .

В случае, когда функция  $\bar{p}(\theta)$  имеет вид (4), безразмерные коэффициенты ряда Фурье представляются следующим образом:

$$\bar{A}_k = \frac{\bar{p}_0 \cos k\theta_0}{\theta_0 \left[ \frac{\pi^2}{4\theta_0^2} - k^2 \right]} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

На основании результатов [1] можно определить радиальные упругие перемещения точек внешней поверхности второго слоя  $\bar{W}_2(1, \theta)$ , вызванные действием на участке  $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$  контактных радиальных давлений  $\bar{p}(\theta)$ :

$$\begin{aligned} \bar{W}_2(1, \theta) = & -(A_2 + B_2)\bar{a}_0^{(2)} + (A_2 - B_2)\bar{b}_0^{(2)} + \\ & + [\bar{a}_1^{(2)} + (A_2 - 3B_2)\bar{b}_1^{(2)} + (A_2 + B_2)\bar{c}_1^{(2)}] \cos \theta + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \{ -(A_2 + B_2)n\bar{a}_n^{(2)} - [A_2(n-2) + B_2(n+2)]\bar{b}_n^{(2)} + \\ & + (A_2 + B_2)n\bar{c}_n^{(2)} + [A_2(n+2) + B_2(n-2)]\bar{d}_n^{(2)} \} \cos \theta, \end{aligned} \quad (6)$$

где постоянные  $A_2$  и  $B_2$  определяются по формулам  $A_2 = (1 - \mathcal{G}_2^2)$ ,  $B_2 = \mathcal{G}_2(1 + \mathcal{G}_2)$  ( $\mathcal{G}_2$  - коэф-

фициент Пуассона второго слоя), а безразмерные константы  $\bar{a}_n^{(2)}$  и  $\bar{b}_n^{(2)}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ),  $\bar{c}_n^{(2)}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) и  $\bar{d}_n^{(2)}$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) могут быть найдены путём решения системы линейных алгебраических уравнений, полученных в [1] на основании граничных условий.

На основании (7) с учетом (4)-(5) функцию  $W_2(1, \theta)$  можно представить в следующем виде:

$$\bar{W}_2(1, 0) = \sum \gamma_n \bar{A}_n \cos n\theta, \quad (7)$$

где:  $\gamma_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) – некоторая последовательность чисел, зависящая от конструктивных параметров (радиусов кольцевых слоев и твердых цилиндров), упругих характеристик материала, и определяемая по формулам:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= -(A_2 + B_2)\bar{a}_0^{(2)} + (A_2 - B_2)\bar{b}_0^{(2)}, \\ \gamma_1 &= \bar{a}_1^{(2)} + (A_2 - 3B_2)\bar{b}_1^{(2)} + (A_2 + B_2)\bar{c}_1^{(2)}, \\ \gamma_n &= -(A_2 + B_2)n\bar{a}_n^{(2)} - [A_2(n-2) + B_2(n+2)]\bar{b}_n^{(2)} + \\ &+ (A_2 + B_2)n\bar{c}_n^{(2)} + [A_2(n+2) + B_2(n-2)]\bar{d}_n^{(2)} \quad (n = 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

где константы  $\bar{a}_0^{(2)}$ ,  $\bar{b}_0^{(2)}$ ,  $\bar{a}_1^{(2)}$  и т.д. равны константам  $\bar{a}_0^{(2)}$ ,  $\bar{b}_0^{(2)}$ ,  $\bar{a}_1^{(2)}$  и т.д., деленным на соответствующие коэффициенты ряда Фурье (5).

Естественно, что функции (2) и (8) должны совпадать между собой в зоне контакта ( $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$ ). При приближенном решении этой задачи можно потребовать, чтобы функции (2) и (8) совпадали в трех точках зоны контакта ( $\theta = 0, \theta = \pm\theta_0$ ). В результате получим следующие два уравнения:

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \bar{A}_n = -\bar{\delta} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \bar{A}_n \cos \theta_0 = -\bar{\delta} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{r_3}{r_0} \right) \theta_0^2. \end{cases}$$

Полученная система уравнений с учетом (6) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{\bar{p}_0}{\theta_0} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \frac{\cos n\theta_0}{\left( \frac{\pi^2}{4\theta_0^2} - n^2 \right)} = -\bar{\delta} \\ \frac{\bar{p}_0}{\theta_0} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \frac{\cos^2 n\theta_0}{\left( \frac{\pi^2}{4\theta_0^2} - n^2 \right)} = -\bar{\delta} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{r_3}{r_0} \right) \theta_0^2. \end{cases} \quad (8)$$

Два уравнения (9) связывают между собой три параметра  $\bar{p}_0, \theta_0, \bar{\delta}$ . Чтобы однозначно определить эти параметры, нужно составить еще одно недостающее уравнение. Таким уравнением может служить уравнение статического равновесия, а именно:

$$Q = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} p(\theta) \cos \theta r_3 d\theta, \quad (9)$$

где:  $Q$  - результирующая нагрузка.

В результате подстановки (3) в (10), интегрирования и перехода к безразмерным параметрам получим:

$$\bar{Q} = \bar{p}_0 \frac{4\pi \theta_0 \cos \theta_0}{\pi^2 - 4\theta_0^2}, \quad (10)$$

где:  $\bar{Q} = \frac{Q}{E_2 r_3}$ .

На основании (9) и (11) можно представить безразмерные параметры  $\bar{p}_0, \bar{\delta}, \bar{Q}$  в виде зависимостей от угла  $\theta_0$ , характеризующего величину зоны контакта, а именно:

$$\bar{p}_0 = -\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{r_3}{r_0} \right) \frac{\theta_0^2}{[\varphi_1(\theta_0) - \varphi_2(\theta_0)]}, \quad (11)$$

$$\bar{\delta} = -\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{r_3}{r_0} \right) \frac{\varphi_1(\theta_0) \theta_0^2}{[\varphi_1(\theta_0) - \varphi_2(\theta_0)]}, \quad (12)$$

$$\bar{Q} = -\left( 1 + \frac{r_3}{r_0} \right) \frac{2\pi \theta_0^3 \cos \theta_0}{(\pi^2 - 4\theta_0^2)[\varphi_1(\theta_0) - \varphi_2(\theta_0)]}, \quad (13)$$

где:

$$\varphi_1(\theta_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n \cos n \theta_0}{\theta_0 \left( \frac{\pi^2}{4\theta_0^2} - n^2 \right)}, \quad (14)$$

$$\varphi_2(\theta_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n \cos^2 n \theta_0}{\theta_0 \left( \frac{\pi^2}{4\theta_0^2} - n^2 \right)}, \quad (15)$$

Таким образом, общая схема приближенного решения рассматриваемой контактной задачи состоит в следующем:

- на основании (14) с учетом (15) и (16) строим график зависимости между безразмерной нагрузкой  $\bar{Q}$  и углом  $\theta_0$ .
- в соответствии с (13) строим график зависимости между параметром  $\bar{\delta}$  и углом  $\theta_0$ .
- по заданной результирующей нагрузке  $\bar{Q}$  (или заданному сближению тел  $\bar{\delta}$ ) с помощью построенных графиков определяем величину угла  $\theta_0$  и тем самым определяем величину зоны контакта.
- на основании (12) с учетом (15) и (16) и найденного выше угла  $\theta_0$  вычисляем параметр  $\bar{p}_0$ .

В соответствии с (4) по найденным значениям параметра  $\bar{p}_0$  и угла  $\theta_0$  можно установить приближенный закон изменения контактных давлений, а значит, на основании результатов [1] полностью исследовать напряженное и деформированное состояние каждого из слоев.

На рисунке 2 показаны зависимости между результирующей нагрузкой и величиной зоны контакта при разных отношениях модулей упругости слоев и при заданных конструктивных параметрах  $\rho_1 = \frac{r_1}{r_3}$  и  $\rho_2 = \frac{r_1}{r_3}$ .

Следует отметить, что в случае, когда модули упругости двух слоев равны между собой ( $E_1 = E_2$ ), полученная зависимость между результирующей нагрузкой  $Q$  и углом  $\theta_0$ , характеризующем величину зоны контакта, тождественно совпадает с аналогичной зависимостью для однослойного упругого покрытия твердого цилиндра [2].

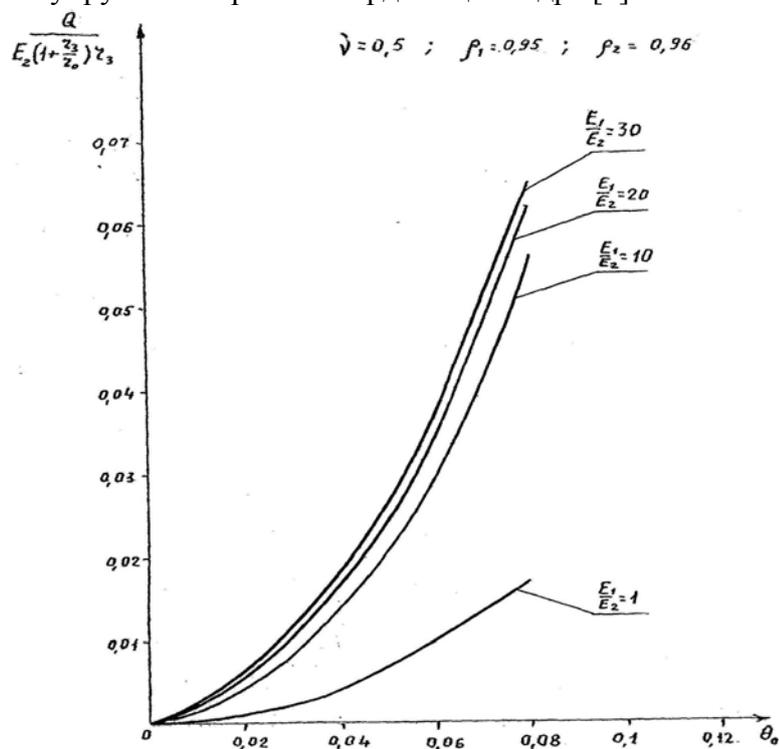


Рисунок 2 – Зависимость между результирующей нагрузкой  $Q$  и углом  $\theta_0$

#### Литература

1. Божкова Л.В., Рябов В.Г., Норицина Г.И. Смешанная плоская задача теории упругости для двухслойной кольцевой области // Известия МГТУ «МАМИ». М.: МАМИ, 2011, №1, - С.217-221
2. Божкова Л.В., Чебанюк А.М. Взаимодействия кольца, жестко насаженного на абсолютно твердое цилиндрическое тело, с жестким основанием. // Известия вузов. Машиностроение. – 1977., №8, с.16-22.

#### Значение именно точных решений уравнений движения вязкой жидкости Навье-Стокса

к.т.н. Выскребцов В.Г.  
МГТУ «МАМИ»  
(495) 223-05-23, доб. 1465

*Аннотация.* Исследованы решения уравнений Слэзкина Н.А. установившегося движения в ламинарном режиме вязкой несжимаемой жидкости при осесимметричном течении. На основании точного решения уравнения Слэзкина (типа Риккати) показана множественность решения этого уравнения, причём физический смысл имеет лишь небольшое число решений. Рассмотрен простейший случай безвихревых решений, для которых линиями тока могут быть окружности, эллипсы, параболы, гиперболы и прямые. Эти течения неструйные.

*Ключевые слова:* вязкая жидкость, уравнения Навье-Стокса, уравнение Риккати, точные решения.